Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Послойные бирациональные соответствия,
Матем. заметки, 2000, том 68, выпуск 1, 120–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm926>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:01:30

УДК 513.6

ПОСЛОЙНЫЕ БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ

А. В. Пухликов

Доказано, что послойное бирациональное соответствие между гладкими расслоениями на гиперповерхности Фано над кривой, индуцирующее (бирегулярный) изоморфизм общего слоя, есть послойный изоморфизм.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Если V, V' – алгебраические многообразия одинаковой размерности над одним и тем же полем констант k , то либо множество $\text{Bir}_k(V, V') = \{\chi : V \dashrightarrow V'\}$ бирациональных соответствий пусто, либо для любого $\chi \in \text{Bir}_k(V, V')$ композиция

$$\circ\chi : \text{Bir}_k V \rightarrow \text{Bir}_k(V, V'), \quad \circ\chi : \varphi \mapsto \chi \circ \varphi : V \dashrightarrow V'$$

определяет биекцию группы бирациональных автоморфизмов многообразия V над k и множества $\text{Bir}_k(V, V')$. Таким образом, задача бирациональной классификации алгебраических многообразий (возможно, ограниченная рамками определенного класса многообразий) распадается на две: во-первых, необходимо уметь распознавать бирационально эквивалентные многообразия, т.е. отвечать на вопрос о существовании бирационального отображения $V \dashrightarrow V'$ для заданных V, V' , и, во-вторых, вычислять группу бирациональных автоморфизмов $\text{Bir}_k V$ заданного многообразия. Наиболее нетривиальными и содержательными задачи бирациональной классификации являются для *расслоений Фано* $\pi : V \rightarrow S$, общий слой которых $V_s = \pi^{-1}(s)$, $s \in S$, есть многообразие Фано.

Для бирационального отображения $\chi : V \dashrightarrow V'$ между расслоениями Фано V/S и V'/S' первый и ключевой вопрос состоит в том, согласовано ли χ со структурами расслоений Фано. Иначе говоря, достраивается ли диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \dashrightarrow^{\chi} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & & S' \end{array}$$

до коммутативной посредством подходящего (рационального доминантного) отображения $\alpha : S \dashrightarrow S'$? В последние десятилетия было понято, что в некотором смысле для

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-15-96013 и № 99-01-01132, и грантом INTAS-OPEN 97/2072.

“подавляющего большинства” расслоений Фано V/S ответ оказывается положительным при произвольных V'/S' и χ . Это так называемый феномен *бирациональной жесткости*, угаданный Фано сто лет назад и на строгой основе открытый В. А. Исковских и Ю. И. Маниным в [1] ($V = V_4 \subset \mathbb{P}^4$ – гладкая трехмерная квартика, $S = *$ – точка). Позднее было обнаружено много классов бирационально жестких расслоений Фано (см. [2]–[6]), что и позволило сделать вывод о типичности этого свойства.

Для бирационально жесткого расслоения Фано V/S задачи бирациональной классификации сводятся к *послойной* бирациональной классификации. Точная последовательность

$$1 \rightarrow \mathrm{Bir}(V/S) \rightarrow \mathrm{Bir} V \rightarrow \mathrm{Bir} S$$

сводит вычисление группы бирациональных автоморфизмов к вычислению группы *собственных* бирациональных автоморфизмов, сохраняющих слои π :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \longleftrightarrow & S \end{array},$$

или, что то же самое, группы $\mathrm{Bir} F_\eta$ бирациональных автоморфизмов слоя F_η над общей (незамкнутой) точкой базы S . Аналогично, для бирационально жесткого расслоения Фано V/S вопрос о существовании бирационального отображения $V \dashrightarrow V'/S'$ решается в рамках послойных бирациональных соответствий.

Рассмотрим послойное бирациональное соответствие

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & \xrightarrow{\alpha} & S' \end{array},$$

где $\alpha \in \mathrm{Bir}(S, S')$ – бирациональное соответствие. Отображение χ индуцирует бирациональное соответствие на общих слоях $\chi: F_\eta \dashrightarrow F'_\eta$. Можно понимать χ и как непрерывное семейство бирациональных отображений слоев $S \ni s \mapsto \chi_s \in \mathrm{Bir}(F_s, F'_{\alpha(s)})$. Предположим теперь, что слой F_s общего положения есть *бирационально сверхжесткое* [4] многообразие. Тогда бирациональные эквивалентности слоев χ_s суть бирегулярные изоморфизмы, и мы получаем задачу описания послойных бирациональных отображений χ , индуцирующих бирегулярный изоморфизм на слое общего положения.

Эта задача локальна по базе S расслоения Фано и заключается в описании возможных перестроек специальных слоев.

2. Основной результат. В настоящей работе изучаются послойные бирациональные соответствия гладких расслоений Фано над кривой, слой которых есть гиперповерхность Фано $W_d \subset \mathbb{P}^M$ степени $d \leq M$. Основное поле – поле комплексных чисел $k = \mathbb{C}$. Пусть C – гладкая алгебраическая кривая (вообще говоря, *аффинная* кривая) с отмеченной точкой $p \in C$ и $C^* = C \setminus \{p\}$ – “проколотая” кривая. Все построения остаются верными, если вместо C рассматривать “росток гладкой кривой” в точке p или малый диск $\Delta_\varepsilon = \{|z| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$. Символ $\mathbb{P}$ обозначает комплексное проективное пространство $\mathbb{P}^M$, $M \geq 3$. Пусть $\mathcal{V}(d)$ – класс гладких дивизоров $V \subset X = C \times \mathbb{P}$, слой которых

$F_x = V \cap X_x$, $X_x = \{x\} \times \mathbb{P}$, $x \in C$, есть гиперповерхность степени $d \geq 2$. Положим $X^* = C^* \times \mathbb{P}$, $V^* = V \cap X^*$, так что V^* получается из V удалением слоя F_p над отмеченной точкой. Основной результат работы

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $d \geq 3$. Пусть $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(d)$ и $\chi^*: V_1^* \rightarrow V_2^*$ – послойный изоморфизм. Тогда χ^* продолжается до послойного изоморфизма $\chi: V_1 \rightarrow V_2$.*

Иными словами, в пределах класса $\mathcal{V}(d)$ многообразия не допускают нетривиальных бирациональных перестроек слоев.

Кроме того, будут описаны бирациональные перестройки расслоений на квадрики ($d = 2$) и самого расслоения X .

Пусть $\mathbb{Z}_{\geq 2}$ обозначает множество целых чисел $m \geq 2$.

ГИПОТЕЗА. *Для заданного $k \geq 2$ существуют целое $M_* \geq k + 2$ и конечное подмножество $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 2}^k$ (возможно пустое) такие, что для любого $M \geq M_*$ и любого набора $(d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^k \setminus S$ утверждение теоремы 1 справедливо для класса $\mathcal{V}(d_1, \dots, d_k)$ гладких полных пересечений типа $(d_1, \dots, d_k)$ в $C \times \mathbb{P}^M$.*

Другое направление обобщения теоремы 1 связано с рассмотрением более широкого класса дивизоров в $C \times \mathbb{P}$, допускающего особенности на V , а не только на слоях $V \rightarrow C$. Нет сомнений, что для “достаточно мягких” особенностей теорема 1 остается верной. Весьма интересной является задача отыскания границы, после перехода через которую возникают нетривиальные перестройки слоев.

До сих пор задачам послойных перестроек уделялось мало внимания [7], и там, где они рассматривались, они играли вспомогательную роль (так, перестройки расслоений на коники использовались в [2] для доказательства бирациональной жесткости). По сути, задача считалась решенной, если бирациональное отображение расслоений Фано оказывалось послойным. И действительно, “послойные” задачи несравнимо легче, чем “канонические” задачи бирациональной геометрии [1]–[5]. Тем не менее, послойные отображения заслуживают внимания. Первая работа в этом направлении была сделана И. Паком [8], доказавшим отсутствие перестроек гладких слоев для гладких трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пешо степени ≤ 4 . За ней последовала работа [9], в которой доказано отсутствие перестроек гладких слоев для 4-мерных многообразий с пучком трехмерных квартик. Кроме того, И. А. Чельцов анонсировал аналогичный результат для пучков гиперповерхностей Фано $W_M \subset \mathbb{P}^M$ произвольной размерности.

Рассуждения Чельцова и Пака основаны на результатах программы лог-минимальных моделей, главным образом на теореме В. В. Шокурова о связности [10], [11]. Между тем, как показывает наше доказательство, теорема 1 – это простой факт *проективной* геометрии, не требующий лог-пар и связанной с ними техники. Наше рассуждение совершенно элементарно и дает более сильное утверждение, чем теоремы Чельцова и Пака, потому что мы не требуем, чтобы специальный слой над отмеченной точкой был неособым: достаточно гладкости многообразия V .

В частности, теорема 1 влечет следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $V/\mathbb{P}^1$ и $V'/\mathbb{P}^1$ – гладкие расслоения на гиперповерхности Фано индекса 1 и $V/\mathbb{P}^1$ достаточно закручено по базе [5]. Тогда любое бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V'$ есть послойный бирегулярный изоморфизм.*

Настоящая работа является естественным дополнением [5] и в значительной степени продолжает мою работу с многомерными расслоениями Фано, которую я проводил в Математическом институте Макса Планка в 1997 году в Бонне.

3. Расслоения на полные пересечения. Пусть $(d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^k$ – фиксированный тип полного пересечения. Рассмотрим класс подмногообразий в $C \times \mathbb{P}$, локально по C имеющих представление $f_1 = \dots = f_k = 0$, где относительно системы $(x_0 : \dots : x_M)$ однородных координат на $\mathbb{P}$ уравнения f_i имеют вид

$$f_i = \sum_{|I|=d_i} a_I x^I,$$

$I = (j_0, \dots, j_M)$ – мультииндексы степени $j_0 + \dots + j_M = d_i$ и коэффициенты a_I суть регулярные функции на C , причем для любой точки $y \in C$ набор уравнений $\{f_*\}$, ограниченный на слой $X_y = \{y\} \times \mathbb{P} \cong \mathbb{P}$, задает полное пересечение коразмерности k в $\mathbb{P}$. Обозначим класс таких многообразий через $\mathcal{X}(d_1, \dots, d_k)$. Пусть $V \in \mathcal{X}(d_1, \dots, d_k)$ и $F = V \cap X_p$ – слой над отмеченной точкой.

Зафиксируем систему уравнений $\{f_*\}$ для V около точки $p \in C$ и локальный параметр t на кривой C в точке p . Теперь уравнения f_i можно разложить в ряд Тейлора $f_i = f_i^{(0)} + t f_i^{(1)} + \dots + t^j f_i^{(j)} + \dots$, где $f_i^{(j)}$ – однородные многочлены степени d_i от (x_*) . Слой $F \subset \mathbb{P}$ задается системой уравнений $\{f_*^{(0)} = 0\}$.

ЛЕММА 1. *Имеет место оценка $\dim(X_p \cap \text{Sing } V) \geq \dim \text{Sing } F - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 3.4.2 в [12]. Множество $\text{Sing } F$ задается на F условием $\text{rk} \|\partial f_i^{(0)} / \partial x_j\| \leq k - 1$. Если $\dim \text{Sing } F \leq 0$, то доказывать нечего. В противном случае пусть $Y \subset \text{Sing } F$ – компонента максимальной размерности, $\dim Y \geq 1$. Множество $X_p \cap \text{Sing } V$ задается на F условием

$$\text{rk} \left\| \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x_j} \mid f_i^{(1)} \right\| \leq k - 1. \quad (1)$$

Если множество $D = \{x \in Y \mid \text{rk} \|\partial f_i^{(0)} / \partial x_j\| \leq k - 2\}$ имеет в Y коразмерность 1, то лемма доказана, так как $D \subset X_p \cap \text{Sing } V$. Предположим противное: $\text{codim}_Y D \geq 2$. Возьмем общую кривую $\Gamma \subset Y$, не имеющую общих точек с D . Во всех точках кривой Γ ранг матрицы $\|\partial f_i^{(0)} / \partial x_j\|$ постоянен и равен $k - 1$. Рассмотрим морфизмы пучков

$$\mu_j : \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_\Gamma(1 - d_i) \rightarrow \mathcal{O}_\Gamma,$$

заданные локально на наборах сечений $(s_1, \dots, s_k)$ формулой

$$\mu_j : (s_1, \dots, s_k) \mapsto \sum_{i=1}^k s_i \frac{\partial f_0^{(i)}}{\partial x_j}$$

относительно фиксированного отождествления $\mathcal{O}(-a) \otimes \mathcal{O}(a) \cong \mathcal{O}$. По предположению подпучок

$$\text{Ker}(\mu_*) = \bigcap_{j=0}^M \text{Ker } \mu_j \subset \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_\Gamma(1 - d_i)$$

имеет постоянный ранг 1. Рассмотрим морфизм пучков

$$\lambda: \text{Ker}(\mu_*) \rightarrow \mathcal{O}_\Gamma(1), \quad \lambda: (s_1, \dots, s_k) \mapsto \sum_{i=1}^k s_i f_i^{(1)}.$$

Предположим, что условие (1) не выполнено ни в одной точке кривой Γ . Тогда λ – изоморфизм обратимых пучков, т.е.

$$\mathcal{O}_\Gamma(1) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_\Gamma(1 - d_i),$$

что невозможно.

Обратимся к расслоениям на гиперповерхности. Согласно лемме 1 многообразие $V \in \mathcal{Z}(d)$ с локальным уравнением $f = f^{(0)} + tf^{(1)} + \dots$ является гладким, т.е. $V \in \mathcal{V}(d)$, в том и только том случае, если выполнены два условия:

- i) гиперповерхность $F = \{f^{(0)} = 0\}$ имеет не более чем нульмерные особенности;
- ii) для любой точки $x \in \text{Sing } F$ имеем $f^{(1)}(x) \neq 0$.

4. Диагональное представление. Пусть $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(d)$, $d \geq 2$, и $\chi^*: V_1^* \rightarrow V_2^*$ – послойный изоморфизм вне отмеченной точки $p \in C$. Поскольку слои над точками общего положения $y \in C$ суть гладкие гиперповерхности степени $d \geq 2$, над точкой $y \in C^*$ изоморфизм χ_y^* индуцирован автоморфизмом объемлющего проективного пространства $\xi_y \in \text{Aut } \mathbb{P}$. Таким образом, $\chi^* = \xi^*|_{V_1}$, где $\xi_y^* = \xi_y$ есть алгебраическая кривая $\xi^*: C^* \rightarrow \text{Aut } \mathbb{P}$ проективных автоморфизмов. Пусть $\mathbb{P} = \mathbb{P}(L)$, где $L \cong \mathbb{C}^{M+1}$ – линейное пространство. Кривая ξ^* может быть поднята до кривой $\xi: C \rightarrow \text{End } L$, $\xi(C^*) \subset \text{Aut } L$. Если $\xi(p) \in \text{Aut } L$, то χ^* продолжается до послойного (бирегулярного) изоморфизма $\chi = \xi|_{V_1}$ и многообразия V_1 и V_2 послойно изоморфны. Предположим, что это не так: $\det \xi(p) = 0$.

Зафиксируем локальный параметр t на кривой C в точке p , и пусть $\sum_{i=0}^{\infty} t^i \xi^{(i)}$ – ряд Тейлора кривой ξ . Можно считать, что $\xi^{(0)} \neq 0$.

ЛЕММА 2. *Существуют кривые эндоморфизмов $\beta, \gamma: C \rightarrow \text{End } L$ и базис $(e_0, \dots, e_M)$ пространства L такие, что $\beta(p), \gamma(p) \in \text{Aut } L$, и в этом базисе кривая $\beta\xi\gamma^{-1}: C \rightarrow \text{End } L$ имеет диагональный вид:*

$$\beta\xi\gamma^{-1}: e_i \mapsto t^{w(e_i)} e_i, \quad (2)$$

где $w(e_i) \in \mathbb{Z}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это хорошо известный факт элементарной линейной алгебры.

Заменим V_1 на $\gamma(V_1)$ и V_2 на $\beta(V_2)$. Теперь мы можем просто считать, что послойное бирациональное соответствие ξ имеет вид (2) с самого начала. Покажем, что если $m = \max\{w(e_i)\} \geq 1$, то этого не может быть.

Пусть $\{a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_k\} = \{w(e_i), i = 0, \dots, M\} \subset \mathbb{Z}_+$ – множество весов диагонального преобразования (2), $k \leq M$, $m = a_k$ – максимальный вес. Рассмотрим

систему однородных координат $(x_0 : \dots : x_M)$, двойственную базису (e_*) . Определим вес мономов от x_* , полагая

$$w(x_0^{n_0} x_1^{n_1} \dots x_M^{n_M}) = \sum_{i=0}^M n_i w(e_i).$$

Положим $\mathcal{A}_i = \{x_j \mid w(e_j) = a_i\} \subset \mathcal{A} = \{x_0, \dots, x_M\}$ – множество координат веса a_i . Выделим особо множества $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}_k$ координат минимального и максимального веса соответственно.

5. Доказательство теоремы 1. Пусть $f = f^{(0)}(x) + t f^{(1)} + \dots$ – локальное по базе C уравнение гиперповерхности $V_2 \subset C \times \mathbb{P}$, $f^{(i)}$ – однородные многочлены степени $d \geq 3$ от координат x_* . Ряд

$$f_\xi = \sum_{l=0}^{\infty} t^l f_\xi^{(l)}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} t^l f^{(l)}(t^{w(x_0)} x_0, \dots, t^{w(x_M)} x_M)$$

обращается в нуль на V_1 , а вне отмеченного слоя F_1 , т.е. при $t \neq 0$, дает уравнение V_1 . Пусть $b \in \mathbb{Z}_+$ – максимальная степень параметра t , делящая f_ξ . Тогда

$$t^{-b} f_\xi = g = \sum_{l=0}^{\infty} t^l g^{(l)}(x_0, \dots, x_M)$$

дает уравнение гиперповерхности V_1 и в отмеченном слое X_p .

ЛЕММА 3. Для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ многочлен $f^{(l)}$ есть линейная комбинация мономов веса $\geq b - l$, а многочлен $g^{(l)}$ есть линейная комбинация мономов веса $\leq b + l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что моном x^I входит в многочлен $f^{(l)}$ с ненулевым коэффициентом. Тогда он порождает компоненту $t^{l+w(x^I)} x^I$ ряда f_ξ и, более того, эта компонента порождается *только* этим мономом в $f^{(l)}$. Отсюда $l + w(x^I) \geq b$, как и утверждалось. Предположим, что моном x^I входит в $g^{(l)}$ с ненулевым коэффициентом. Он происходит из монома $t^{l+b} x^I$ ряда f_ξ , который, в свою очередь, может происходить только из монома x^I в составе многочлена f^α , где $\alpha + w(x^I) = l + b$. Лемма доказана.

Пусть

$$\begin{aligned} P_* &= \{x_j = 0 \mid w(x_j) \geq 1\} = \mathbb{P}\langle e_j \mid w(x_j) = 0 \rangle, \\ P^* &= \{x_j = 0 \mid w(x_j) \leq m - 1\} = \mathbb{P}\langle e_j \mid w(x_j) = m \rangle \end{aligned}$$

– подпространства минимального и максимального веса соответственно.

ЛЕММА 4. Если $b \geq m + 1$, то $P_* \subset \text{Sing } F_2$. Если $m(d - 1) \geq b + 1$, то $P^* \subset \text{Sing } F_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $b \geq m + 1$. Слой $F_2 \subset \mathbb{P}$ над отмеченной точкой задается уравнением $f^{(0)} = 0$. В силу предположения $f^{(0)}$ есть линейная комбинация мономов веса $\geq m + 1$. Если моном x^I входит в $f^{(0)}$ с ненулевым коэффициентом, то x^I делится на квадратичный моном от переменных $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_*$ (иначе $w(x^I) \leq m$). Поэтому все первые частные производные многочлена $f^{(0)}$ обращаются в нуль на P_* . Тем самым, $P \subset \text{Sing } F_2$.

Аналогично, если $b \leq m(d-1) - 1$, то любой моном x^I в $g^{(0)}$ делится на квадратичный моном от $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^*$, иначе имеем $w(x^I) \geq m(d-1)$, что противоречит предположению и лемме 3. Лемма 4 доказана.

Заметим теперь, что при $d \geq 3$ неравенства $b \leq m$ и $b \geq m(d-1)$ не могут выполняться одновременно. Следовательно, выполнено хотя бы одно из двух неравенств леммы 4. Пусть $b \geq m + 1$. Поскольку V_2 неособо, P_* – точка. Пусть $\mathcal{A}_* = \{x_0\}$, так что $P_* = (1, 0, \dots, 0)$. Снова в силу того, что V_2 неособо, имеем $f^{(1)}(1, 0, \dots, 0) \neq 0$. Следовательно, моном x_0^d входит в $f^{(1)}$ с ненулевым коэффициентом. По лемме 3 получаем $b \leq 1$. Отсюда $m = 0$ – противоречие. В случае $b \leq m(d-1) - 1$ рассуждения симметричны: V_1 неособо, P^* – точка $(0, \dots, 0, 1)$, $\mathcal{A}^* = \{x_M\}$ и $g^{(1)}(0, \dots, 0, 1) \neq 0$, так что $md \leq b + 1$, откуда снова получаем $m = 0$ – противоречие.

Значит, нетривиальных весов быть не может, и ξ – послойный бигегулярный изоморфизм. Следовательно, и $\chi = \xi|_{V_1}$ есть послойный изоморфизм. Доказательство теоремы 1 закончено.

6. Расслоения на квадрики. Единственный момент, когда мы использовали условие $d \geq 3$, это получение одного из неравенств леммы 4. Сами леммы 3, 4 и заключительная часть доказательства теоремы остаются справедливыми и при $d = 2$. Отсюда следует, что нетривиальное бирациональное преобразование при $d = 2$ возможно только в случае $b = m$. Рассмотрим этот случай подробнее. Переменные веса нуль могут входить в $f^{(0)}$ только в мономах вида $c_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$, $w(x_\alpha) = 0$, $w(x_\beta) = m$. Пусть L_* и L^* – подпространства в L , натянутые на базисные векторы минимального и максимального веса соответственно, так что $P_* = \mathbb{P}L_*$, $P^* = \mathbb{P}L^*$. Пусть $q_0: L_* \times L^* \rightarrow \mathbb{C}$ – билинейная форма $\sum c_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$. Если q_0 имеет нетривиальное ядро в L_* , то, как и в доказательстве теоремы 1, $b = m \leq 1$. Это же верно, если q_0 имеет нетривиальное ядро в L^* . Следовательно, если $m \geq 2$, то q_0 – невырожденная билинейная форма, $\dim L_* = \dim L^*$ и заменой базиса в L_* , L^* можно добиться того, что $q_0 = \sum x_i^{(0)} x_i^{(m)}$ есть стандартная форма, $w(x_i^{(\alpha)}) = \alpha$. Рассуждая аналогичным образом, получаем следующий факт.

ТЕОРЕМА 2. При $m = 2k$ четном координаты (x_*) могут быть выбраны и затем перенумерованы в виде $x_i^{(j)}$, $w(x_i^{(j)}) = j$, таким образом, что $f^{(0)} = q + f_+^{(0)}$, где $f_+^{(0)}$ есть линейная комбинация мономов $x_i^{(\alpha)} x_j^{(\beta)}$ с $\alpha + \beta \geq m + 1$, а q имеет вид

$$q = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_i x_i^{(j)} x_i^{(m-j)} + \sum_i' (x_i^{(k)})^2,$$

где сумма $\sum'$ распространяется либо на все переменные веса k и тогда слои F_1, F_2 неособы, либо на все, кроме одной, и тогда F_1, F_2 суть конусы с нульмерной вершиной. Вершина конуса F_2 содержится в подпространстве $\mathbb{P}L_{\leq k} = \mathbb{P}\langle e_i^{(j)}, j \leq k \rangle$, но не в $\mathbb{P}L_{\leq k-1}$. Наоборот, вершина конуса F_1 содержится в

$\mathbb{P}L_{\geq k} = \mathbb{P}\langle e_i^{(j)}, j \geq k \rangle$, но не в $\mathbb{P}L_{\geq k+1}$. В любом случае F_1 задается уравнением $g^{(0)} = q + g_-^{(0)}$, где $g_-^{(0)}$ есть линейная комбинация мономов $x_i^{(\alpha)} x_j^{(\beta)}$ с $\alpha + \beta \leq t-1$.

При $t = 2k + 1$ нечетном координаты (x_*) могут быть выбраны и перенумерованы в виде $x_i^{(j)}$, $w(x_i^{(j)}) = j$, таким образом, что $f^{(0)} = q + f_+^{(0)}$, $g^{(0)} = q + g_-^{(0)}$, где $f_+^{(0)}$, $g_-^{(0)}$ имеют тот же смысл, что и выше, а q имеет вид

$$q = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_i x_i^{(j)} x_i^{(m-j)} + \sum_i x_i^{(k)} x_i^{(k+1)},$$

где либо $\#\{x_i^{(k)}\} = \#\{x_i^{(k+1)}\}$ и тогда слои F_1, F_2 неособые, либо $\#\{x_i^{(k)}\} = \#\{x_i^{(k+1)}\} \pm 1$ и тогда слои F_1, F_2 суть конусы с нульмерной вершиной.

Все эти возможности реализуются.

Таким образом, при $d = 2$ наборы весов $\{a_i\}$ и размерности соответствующих им подпространств не могут быть произвольными, а подчиняются соотношениям симметрии относительно половины максимального веса $t/2$. Обратим внимание, что неособые слои перестраиваются в неособые, а особые – в особые, так что наличие или отсутствие особых точек на слое есть инвариант послойных бирациональных преобразований.

7. Описание структуры раздутий. Сохраняя обозначения п. 1 для диагонального представления (2) послойного отображения $\xi: X \dashrightarrow X$, положим $L_a = \langle e_i \mid w(e_i) = a \rangle \subset L$ – подпространство, натянутое на базисные векторы веса a . Положим также

$$L_{\leq a} = \bigoplus_{b \leq a} L_b, \quad L_{< a} = \bigoplus_{b < a} L_b, \quad L_{\geq a} = \bigoplus_{b \geq a} L_b, \quad L_{> a} = \bigoplus_{b > a} L_b$$

и для каждого $? \in \{a, \leq a, < a, \geq a, > a\}$ положим $P_? = \mathbb{P}L_?$ и $R_? = P_? \times C$. Имеют место очевидные соотношения $L_{\leq a} = L_{< a} \oplus L_a$, $L = L_{\leq a} \oplus L_{> a}$ и т.д., и определены линейные проекции

$$\begin{aligned} \pi_{\leq a}: \mathbb{P} &\dashrightarrow P_{\leq a} && \text{из подпространства } P_{> a}, \\ \pi_{< a}: \mathbb{P} &\dashrightarrow P_{< a} && \text{из подпространства } P_{\geq a}, \end{aligned}$$

так что, например, $\pi_{< a}|_{P_{\leq a}}: P_{\leq a} \dashrightarrow P_{< a}$ есть линейная проекция из подпространства P_a .

Пусть $\{a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_k\}$ – все веса диагонального представления (2). Положим $b_i = a_i - a_{i-1}$. Построим последовательность $b_1 + \dots + b_k = a_k = t$ раздутий $\varphi_{i,j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, b_i$, следующим образом (см. диаграмму ниже). Раздутия $\varphi_{i,j}$ имеют вид

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i,j}: X_{i,j} & \longrightarrow & X_{i,j-1} \\ \cup & & \cup \\ E_{i,j} & \longrightarrow & B_{i,j-1} \end{array},$$

где $j \geq 1$, $B_{i,j-1}$ – гладкий центр раздутия, $E_{i,j}$ – исключительный дивизор. Собственный прообраз цикла Y на $X_{i,j}$ обозначается добавлением верхнего индекса i, j : $Y^{i,j}$.

Первый раздуваемый цикл есть $B_{1,0} = P_{\geq a_1} = P_{\geq 1}$;

$$\begin{array}{c}
 X \\
 \parallel \\
 X_{1,0} \xleftarrow{\varphi_{1,1}} \dots \\
 \vdots \\
 X_{i-1,b_{i-1}} \\
 \parallel \\
 X_{i,0} \xleftarrow{\varphi_{i,1}} X_{i,1} \xleftarrow{\varphi_{i,2}} \dots \xleftarrow{\varphi_{i,b_i}} X_{i,b_i} \quad \cdot \\
 \parallel \\
 X_{i+1,0} \\
 \vdots \\
 \xleftarrow{\varphi_{k,b_k}} X_{k,b_k} \\
 \parallel \\
 X^*
 \end{array}$$

Для $1 \leq j \leq b_i$ имеем $B_{i,j-1} = E_{i,j-1} \cap R_{\geq a_i}^{i,j-1} \cong P_{\geq a_i}$ (последний изоморфизм легко доказывается по индукции), так что $\varphi_{i,j}: E_{i,j} \rightarrow B_{i,j-1} \cong P_{\geq a_i}$ есть $\mathbb{P}^{c(i)}$ -расслоение над $P_{\geq a_i}$, где $c(i) = \text{codim}_{\mathbb{P}} P_{\geq a_i} = \dim P_{< a_i} + 1$.

Для упрощения обозначений положим: $E_{i,j}^+$ – собственный прообраз $E_{i,j}$ на следующем раздутии, $(i, j)_+$ – следующий за (i, j) , а $(i, j)_-$ – предшествующий (i, j) бииндексы соответственно.

Легко видеть, что $E_{i,j}^+ \cap B_{(i,j)_+} = \emptyset$, так что $E_{i,j}^+ \cong E_{i,j}^{k,b_k}$. Положим $S_{i,j} = E_{i,j} \cap R_{\geq a_i}^{i,j} \cong P_{\geq a_i}$ при $0 \leq j \leq b_i$, так что для $j = 0, \dots, b_i - 1$ имеем $S_{i,j} = B_{i,j}$. Для $j = 1, \dots, b_i$ цикл $S_{i,j}$ есть сечение расслоения $\varphi_{i,j}: E_{i,j} \rightarrow B_{i,j-1}$. Имеет место диаграмма

$$S_{i+1,0} = B_{i+1,0} \cong P_{\geq a_{i+1}} = P_{> a_i}$$

$$\cap \quad \cap \quad ,$$

$$S_{i,b_i} \cong P_{\geq a_i}$$

где горизонтальные изоморфизмы естественны в том смысле, что раздутия $\varphi_{\alpha,\beta}$ с $\alpha \leq i$ не меняют подмногообразий $R_{\geq a_i}$: на $R_{\geq a_i}$ раздувается дивизор. В частности, при $2 \leq j \leq b_i$ цикл $B_{i,j-1} \subset E_{i,j-1}$ есть сечение расслоения $\varphi_{i,j-1}: E_{i,j-1} \rightarrow B_{i,j-2}$. Отметим, что $E_{(i,j)_-}^+ \cap S_{i,j} = \emptyset$. Положим $\Gamma_{i,j} = E_{(i,j)_-}^+ \cap E_{i,j}$. В силу только что сказанного $\Gamma_{i,j} \cap S_{i,j} = \emptyset$. Для удобства обозначим через $E_{1,0}$ слой X_p над отмеченной точкой $p \in \mathbb{P}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Описанная последовательность раздутий разрешает особенности ξ , т.е. $\xi: X^* \dashrightarrow X$ продолжается до (бirationального) морфизма $\tilde{\xi}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – прямые вычисления в локальных координатах.

8. Стягивания. Опишем теперь действие морфизма $\bar{\xi}: \cup E_{i,j}^+ \rightarrow \mathbb{P}$. Прежде всего, $E_{1,0} \cong \mathbb{P}$, $E_{1,0}^+$ есть раздутие $\mathbb{P}$ вдоль $P_{\geq a_1}$ и $\bar{\xi}|_{E_{1,0}^+}$ есть регулярное продолжение линейной проекции $\mathbb{P} \dashrightarrow P_0$ из $P_{\geq a_1}$.

Морфизмы

$$\xi_{i,j} = \bar{\xi}|_{E_{i,j}^+}: E_{i,j}^+ \rightarrow \mathbb{P}$$

опишем по индукции. Пусть $1 \leq j \leq b_i - 1$ и $\xi_{\alpha,\beta}$ для предшествующих (α, β) уже построены. Легко проверить, что

$$E_{i,j} \supset \Gamma_{i,j} \cong P_{\geq a_i} \times P_{< a_i}.$$

Напомним, что $\Gamma_{i,j}$ содержится в $E_{(i,j)-}^+$, так что $\bar{\xi}|_{\Gamma_{i,j}} = \xi_{i,j-1}|_{\Gamma_{i,j}}$ уже построено. На самом деле $\bar{\xi}|_{\Gamma_{i,j}}$ есть просто проекция на $P_{< a_i}$. Далее, послонная проекция $\gamma_{i,j}: E_{i,j} \dashrightarrow \Gamma_{i,j}$ из сечения $S_{i,j} \subset E_{i,j}$ регуляризуется до морфизма $\gamma_{i,j}^+: E_{i,j}^+ \rightarrow \Gamma_{i,j}$ (в слое расслоения $\varphi_{i,j}: E_{i,j} \rightarrow B_{i,j-1}$ над точкой $x \in B_{i,j-1}$ проекция $\gamma_{i,j}$ есть проекция из точки $S_{i,j} \cap \varphi_{i,j}^{-1}(x)$ на гиперплоскость $\Gamma_{i,j} \cap \varphi_{i,j}^{-1}(x)$ в этом слое). Теперь

$$\xi_{i,j} = (\xi_{i,j}|_{\Gamma_{i,j}}) \circ \gamma_{i,j}^+: E_{i,j}^+ \rightarrow P_{< a_i}.$$

Осталось описать морфизм $\xi_{i+1,0}: E_{i+1,0}^+ = E_{i,b_i}^+ \rightarrow \mathbb{P}$. Для упрощения обозначений мы будем опускать индексы и писать ξ вместо $\xi_{i+1,0}$, E вместо $E_{i+1,0}$, E^+ вместо $E_{i+1,0}^+$, S вместо $S_{i+1,0}$, Γ вместо $\Gamma_{i+1,0}$, a вместо a_i , Γ^+ вместо $\Gamma_{i+1,1}$, φ вместо φ_{i,b_i} , φ^+ вместо $\varphi_{i+1,1}$, B_- вместо B_{i,b_i-1} , B вместо $B_{i+1,0}$.

Итак, $S \cong P_{\geq a}$ – сечение расслоения $\varphi: E \rightarrow B_-$. Пусть $S^+ \subset E^+$ – собственный прообраз S на E^+ . Геометрически S^+ есть раздутие $P_{\geq a}$ вдоль $P_{> a}$. Теперь $\xi: S^+ \rightarrow P_a$ есть регулярное продолжение линейной проекции $P_{\geq a} \dashrightarrow P_a$ из подпространства $P_{> a}$.

Далее, $\Gamma \cong P_{\geq a} \times P_{< a}$. Отображение $\xi|_{\Gamma}$ построено на предыдущем шаге. Легко проверить, что $\xi|_{\Gamma}$ есть проекция на второй сомножитель $P_{< a}$.

Пусть $x \in B_- \setminus \varphi(B)$. Слой расслоения φ над x обозначим через $F(x)$. На нем имеется точка $S(x) = S \cap F(x)$ и гиперплоскость $\Gamma(x) = \Gamma \cap F(x)$. Значение $\xi(S(x)) = s(x) \in P_a$ мы уже знаем. Изоморфизм $\xi: \Gamma(x) \rightarrow P_{< a}$ уже построен. Теперь $\xi|_{F(x)}$ есть изоморфизм $F(x)$ и линейного пространства $\langle P_{< a}, s(x) \rangle$.

Наконец, пусть $x \in \varphi(B)$. Опишем действие ξ на слое морфизма $\varphi \circ \varphi^+: E^+ \rightarrow B_-$ над точкой x . Этот слой приводим и имеет две компоненты $F^+(x) \cup \Gamma^+(x)$, где $F^+(x)$ – собственный прообраз слоя $\varphi^{-1}(x)$ на E^+ .

Имеем $\Gamma^+ \cong P_{> a} \times P_{\leq a}$ и $\Gamma^+(x) \cong P_{\leq a}$ – слой проекции на первый сомножитель. Морфизм $\xi|_{\Gamma^+}$ есть проекция на второй сомножитель $P_{\leq a}$, так что $\xi: \Gamma^+(x) \rightarrow P_{\leq a}$ есть изоморфизм проективных пространств.

Цикл $F^+(x)$ есть проективное пространство размерности $\dim P_{< a} + 1$ с раздутой точкой $S(x)$. Гиперплоскость $\Gamma(x) \subset F^+(x)$ канонически изоморфна $P_{< a}$, причем $S(x) \notin \Gamma(x)$. Теперь $\xi|_{F^+(x)}$ есть регуляризация линейной проекции из точки $S(x)$ на $P_{< a} \cong \Gamma(x)$.

Отметим, что все дивизоры $E_{i,j}$, $(i, j) \neq (k, b_k)$, теряют размерность на $\mathbb{P}$ и, кроме того, $\bar{\xi}(E_{k,b_k}) = \mathbb{P}$.

9. Пример. Пусть $V \in \mathcal{V}(2)$ – расслоение на квадрики, $F_p \subset \mathbb{P}$ – слой над отмеченной точкой. Предположим, что $M = 2k + 1$ нечетно и слой F_p неособ. При $m = 1$ перестройка многообразия V есть раздутие плоскости $P \subset F_p$ максимальной размерности $(M-1)/2$ и последующее стягивание раздутого проективного пространства X_p на другую плоскость $Q \subset X_p$ размерности $(M-1)/2$. Например, при $M = 3$ берем прямую $P \subset F_p$ на F_p , раздуваем P и затем стягиваем собственный прообраз $\tilde{F}_p \cong F_p$ на прямую Q : $F_p \cong Q \times \mathbb{P}^1$. В связи с этим возникает вопрос: можно ли разложить любую перестройку многообразия V в композицию элементарных перестроек $\varphi_{P,Q}$ для всех пар плоскостей максимальной размерности? И еще вопрос: какова группа бирациональных автоморфизмов V , индуцирующих бирегулярный автоморфизм на слое общего положения? В последнем случае речь идет об описании вырождений одномерных семейств проективных изоморфизмов $\xi_x \in \text{Aut } \mathbb{P}$, сохраняющих квадрику $F_x \subset V$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Лյорота // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.
- [2] Саркисов В. Г. О структурах расслоений на коники // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 2. С. 371–408.
- [3] Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей Дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
- [4] Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. № 2. P. 401–426.
- [5] Пухликов А. В. Бирационально жесткие расслоения Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 3.
- [6] Гриненко М. М. Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степени 1 и 2 // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 5. С. 17–38.
- [7] Corti A. Del Pezzo surfaces over Dedekind schemes // Ann. of Math. 1996. V. 144. P. 641–683.
- [8] Park J. Birational maps of del Pezzo fibrations. Preprint. Baltimore: Johns Hopkins Univ., 1999.
- [9] Cheltsov I. A., Park J. Eckard points on quartic 3-fold. Preprint. Baltimore: Johns Hopkins Univ., 2000.
- [10] Шокуров В. В. Трехмерные лог-перестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–203.
- [11] Kollár J. Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Astérisque. V. 211, 1993.
- [12] Iskovskikh V. A., Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of multi-dimensional algebraic varieties // J. Math. Sci. 1996. V. 82. P. 3528–3613.