Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Политов, Критерий сходимости орторекурсивных разложений в евклидовых пространствах, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:20:05

Критерий сходимости орторекурсивных разложений в евклидовых пространствах

А. В. Политов

1. Введение. Орторекурсивные разложения (далее ОРР) были введены Лукашенко [1]. Они являются естественным обобщением классических разложений элементов гильбертова пространства в ряды Фурье.

ОРР определяются следующим образом. Рассмотрим евклидово пространство $\mathcal{H}$ над полем действительных чисел и зафиксируем в нем произвольную систему элементов $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ с единичной нормой. Для каждого элемента $f \in \mathcal{H}$ определим коэффициенты разложения. Положим $\hat{f}_1 = (f, e_1)$. Далее, если уже определены $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}$, положим

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}(f), e_n), \quad \text{где} \quad r_{n-1}(f) = f - \sum_{k=1}^{n-1} \hat{f}_k e_k.$$

Коэффициенты $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^\infty$ называются *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента f по системе $\mathcal{E}$, ряд $\sum_{n=1}^\infty \hat{f}_n e_n$ — *орторекурсивным рядом Фурье* элемента f по системе $\mathcal{E}$.

В случае, если система $\mathcal{E}$ является ортонормированным базисом, ОРР по ней совпадает с классическим разложением в ряд Фурье.

Для введенных разложений сохраняются такие свойства обычных рядов Фурье, как равенство Бесселя $\|r_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\hat{f}_k|^2$ и неравенство Бесселя $\sum_{k=1}^\infty |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|^2$. Помимо этого, сходимость к разлагаемому элементу эквивалентна равенству Парсеваля $\sum_{k=1}^\infty |\hat{f}_k|^2 = \|f\|^2$. Доказательства этих утверждений см. в [1].

В 2007 г. Б. С. Кашиным был поставлен вопрос о получении критерия сходимости ОРР в терминах матрицы Грама системы $\mathcal{E}$. В случае, когда $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, известен следующий критерий сходимости ОРР (см. [2]):

ТЕОРЕМА 1. *Для сходимости орторекурсивного ряда Фурье каждого элемента $f \in \mathcal{H}$ по системе $\mathcal{E}$ к разлагаемому элементу необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\prod_{n=1}^{\infty} g_{n,n+1} = 0, \quad \text{где} \quad g_{ij} = (e_i, e_j).$$

В настоящей работе получен ответ для случая произвольного пространства.

2. Критерий сходимости ОРР. Далее будем считать, что линейная оболочка системы $\mathcal{E}$ всюду плотна в $\mathcal{H}$. Вначале отметим следующий факт.

ЛЕММА 1. *Сходимость (слабая сходимость) орторекурсивного ряда Фурье каждого элемента $f \in \mathcal{H}$ по системе $\mathcal{E}$ к разлагаемому элементу равносильна сходимости (соответственно, слабой сходимости) орторекурсивного ряда Фурье каждого элемента $e \in \mathcal{E}$ к разлагаемому элементу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из равенства Бесселя, линейности ОРР и того, что линейная оболочка $\mathcal{E}$ всюду плотна в $\mathcal{H}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00476-а).

DOI: 10.4213/mzm9263

© А. В. Политов, 2013

Введем несколько обозначений. Через G обозначим матрицу Грама системы $\mathcal{E}$. Через H обозначим матрицу, у которой элементы, лежащие не выше главной диагонали, совпадают с элементами G , а остальные равны 0 (т.е. $G = H + H^\top - I$, где I – единичная матрица).

Для каждого $e_n \in \mathcal{E}$ рассмотрим его орторекурсивный ряд Фурье по системе $\mathcal{E}$, который будет иметь вид $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} e_k$, где $c_{nk} = (\widehat{e_n})_k$. Матрицу, состоящую из чисел c_{nk} (т.е. матрицу, в n -й строке которой стоят орторекурсивные коэффициенты вектора e_n), обозначим через C .

Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 2. *Сходимость орторекурсивного ряда Фурье каждого элемента $e \in \mathcal{E}$ к разлагаемому элементу равносильна равенству $CC^\top = G$.*

ЛЕММА 3. *Слабая сходимость орторекурсивного ряда Фурье каждого элемента из $\mathcal{E}$ к разлагаемому элементу эквивалентна равенству $CG = G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть $CC^\top = G$. Выражения, получающиеся из этого равенства для диагональных элементов матрицы G , представляют собой в точности равенства Парсеваля для каждого элемента из $\mathcal{E}$; следовательно, ОРР элементов $\mathcal{E}$ сходятся к разлагаемым элементам.

Пусть ОРР элементов из $\mathcal{E}$ сходятся к разлагаемым элементам. Тогда для них выполняется равенство Парсеваля, поэтому имеет место цепочка равенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} c_{lk} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (c_{nk} + c_{lk})^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_{lk}^2 \right] = \frac{1}{2} [\|e_n + e_l\|^2 - 2] = g_{nl}.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Утверждение следует из определения слабой сходимости и того, что линейная оболочка $\mathcal{E}$ всюду плотна в $\mathcal{H}$.

Эти критерии еще не решают поставленную задачу, поскольку содержат матрицу C , не выраженную через матрицу Грама. Выразим матрицу C через матрицы G и H .

Сначала отметим важные отличия в действиях над конечными и бесконечными матрицами (подробнее см. [3]). Во-первых, умножение бесконечных матриц не является ассоциативным. Во-вторых, матрица может иметь бесконечное количество обратных, кроме того, множества правых и левых обратных к данной матрице, вообще говоря, не совпадают. Для нижнетреугольных матриц с ненулевыми элементами на диагонали существует ровно одна правая обратная матрица, которая также будет являться одной из левых обратных. Алгоритм нахождения этой матрицы полностью аналогичен алгоритму нахождения обратной к треугольной матрице в конечном случае.

Обозначим через H^{-1} правую обратную к H матрицу. Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Справедливы равенства $G = CH^\top$ и $C = G(H^{-1})^\top$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место равенство

$$c_{nk} = (r_{k-1}(e_n), e_k) = \left(e_n - \sum_{l=1}^{k-1} c_{nl} e_l, e_k \right) = g_{nk} - \sum_{l=1}^{k-1} c_{nl} g_{lk}.$$

Так как $g_{kk} = 1$, получаем, что $g_{nk} = \sum_{l=1}^k c_{nl} g_{lk}$. Переписывая это равенство в матричном виде, получаем, что $G = CH^\top$. Ввиду отсутствия ассоциативности для умножения бесконечных матриц второе равенство не следует напрямую из полученного, поэтому потребуются дополнительные рассуждения. Отметим, что далее в доказательстве леммы 4 используется только то, что матрица H треугольная и на диагонали у нее ненулевые числа.

Обозначим через G_m , H_m , C_m верхние левые блоки матриц G , H , C соответственно, состоящие из элементов, индексы которых не превосходят m . Справедливо равенство

$G_m = C_m H_m^\top$, откуда $C_m = G_m (H_m^{-1})^\top$. Поскольку матрица H треугольная, справедливо равенство $H_m^{-1} = (H^{-1})_m$ (так как соответствующие линейные уравнения для нахождения элементов обратных матриц совпадают); следовательно, $C_m = G_m (H^{-1})_m^\top$ для любого натурального m . Для произвольных n, k возьмем $m = \max(n, k)$; тогда с учетом последнего равенства $c_{nk} = \sum_{l=1}^k g_{nl} ((H^{-1})^\top)_{lk}$ или, в матричном виде, $C = G(H^{-1})^\top$, что и требовалось.

Таким образом, матрица C выражена через G и H , и леммы 2, 3 можно трактовать как критерии сходимости ОРР в терминах матрицы Грама. Так, критерий слабой сходимости приобретает следующий вид.

ТЕОРЕМА 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) орторекурсивный ряд Фурье любого элемента $f \in \mathcal{H}$ по системе $\mathcal{E}$ слабо сходится к разлагаемому элементу;
- 2) выполнено равенство $G(H^{-1}G) = G$.

Аналогично, из лемм 2 и 4 может быть получен критерий сильной сходимости ОРР в терминах матрицы Грама. Кроме того, этот критерий может быть приведен к виду, близкому к критерию слабой сходимости. Более формально, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) орторекурсивный ряд Фурье каждого элемента $f \in \mathcal{H}$ по системе $\mathcal{E}$ сходится к разлагаемому элементу;
- 2) выполнена система равенств
 - а) $G(H^{-1}G) = G$,
 - б) $(CH)C^\top = C(HC^\top)$.

Напомним, что по лемме 4 матрица C может быть определена через G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что из утверждения 1) следует 2). По лемме 1 сходимость имеет место для всех $e \in \mathcal{E}$, поэтому имеет место и слабая сходимость; следовательно, по теореме 2 справедливо условие а). Из леммы 4 следует, что

$$CG = C(H + H^\top - I) = CH + CH^\top - C = CH + G - C,$$

откуда с учетом леммы 3 вытекает соотношение $CH = C$. Поскольку имеют место равенства $(CH)C^\top = CC^\top$ и $C(HC^\top) = CG = G$, а также $CC^\top = G$ по лемме 2, то условие б) доказано.

Докажем теперь, что из утверждения 2) следует 1). Пусть для данной системы $\mathcal{E}$ выполняются условия утверждения 2). По лемме 4 из условия а) следует равенство $CG = G$, откуда, как и ранее, вытекает равенство $CH = C$. Тогда из условия б) и леммы 4 следует, что

$$G = CG = C(HC^\top) = (CH)C^\top = CC^\top;$$

следовательно, по лемме 2 справедливо утверждение 1).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, условия сходимости из теорем 1 и 2 напрямую следуют друг из друга. Для доказательства введем несколько обозначений. Через $\varphi_{m,n}$ обозначим ориентированный угол от вектора e_m до вектора e_n . Положим $\alpha_n = \sin \varphi_{n,n+1}$, $\beta_n = \cos \varphi_{n,n+1}$, $\gamma_n = \prod_{k=1}^n \beta_k$. В этих терминах условие из теоремы 1 эквивалентно равенству $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$.

Без ограничения общности будем считать, что e_1 и e_2 не коллинеарны. Поскольку орторекурсивное разложение – линейный процесс, а векторы $\{e_n\}_{n=3}^\infty$ являются линейными комбинациями e_1 и e_2 , равенство $CG = G$ эквивалентно равенству $C'G' = G''$, где C' – подматрица C , состоящая из двух ее первых строк, G' – подматрица G , состоящая из двух

ее первых столбцов, G'' – подматрица G , состоящая из g_{11} , g_{12} , g_{21} , g_{22} . Так как верхняя строка C' всегда имеет вид $(1\ 0\ 0\ 0\ \dots)$, равенство $C'G' = G''$ эквивалентно тому, что произведения второй строки матрицы C на первый и второй столбец матрицы G равны соответственно g_{21} и g_{22} . Используя стандартные тригонометрические формулы и применяя метод математической индукции, нетрудно доказать, что $c_{21} = \beta_1$, $c_{2,k} = \alpha_1 \lambda_{k-1}$, где $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_k = \gamma_{k-1} \alpha_k$ при $k \geq 2$. Положив $\mu_n = \cos \varphi_{1,n+1}$, $\nu_n = \sin \varphi_{1,n+1}$ и пользуясь тригонометрическими преобразованиями, несложно установить, что равенство $C'G' = G''$ эквивалентно двум равенствам: $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k = 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \nu_k = 1$.

Осталось доказать, что последние два равенства эквивалентны равенству $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$. Складывая тождества $\lambda_n \nu_n = \gamma_{n-1} \alpha_n \nu_n$ и $\gamma_n \mu_n = \gamma_{n-1} \beta_n \mu_n$, пользуясь тригонометрическими формулами и суммируя результаты, получим, что $\sum_{k=1}^n \lambda_k \nu_k = 1 - \gamma_n \mu_n$. Аналогично, $\sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_k = \gamma_n \nu_n$. Так как $\mu_n^2 + \nu_n^2 = 1$, эквивалентность имеет место.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю и рецензенту за ценные замечания и рекомендации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т.П. Лукашенко, *Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, №1, 6–10.
 [2] В.В. Галатенко, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 3–16. [3] Р. Кук, *Бесконечные матрицы и пространства последовательностей*, Физматлит, М., 1960.

А. В. Политов

Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: antonpolitov-2008@ya.ru

Поступило

12.09.2011

Исправленный вариант

21.12.2011