Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Салимов, О липшицевости одного класса отображений, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 591–599

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:50:01

О липшицевости одного класса отображений

Р. Р. Салимов

В работе рассматриваются открытые дискретные кольцевые Q -отображения относительно p -модуля в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Установлено, что такие отображения являются конечно липшицевыми при $n - 1 < p < n$, если интегральное среднее значение функции $Q(x)$ по всем инфинитезимальным шарам $B(x_0, \varepsilon)$ конечно всюду.

Библиография: 19 названий.

DOI: 10.4213/mzm9264

1. Введение. Напомним некоторые определения. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Борелевская функция $\varrho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$ (пишут $\varrho \in \text{adm } \Gamma$), если

$$\int_{\gamma} \varrho(x) ds \geq 1 \quad (1.1)$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geq 1$. Тогда p -модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) dm(x). \quad (1.2)$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем полагаем $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$.

Основными свойствами p -модуля являются следующие:

1) p -модуль пустого семейства кривых равен нулю:

$$M_p(\emptyset) = 0;$$

2) p -модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых:

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \implies M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2);$$

3) p -модуль обладает свойством полуаддитивности:

$$M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M_p(\Gamma_i),$$

см. теорему 6.2 в [1].

Работа выполнена при поддержке INTAS (гранта № 4297F) и гранта CGERI IPN, Мексика.

Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 (пишут $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2 . Известно, что если $\Gamma_1 > \Gamma_2$, то $M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2)$, см. теорему 6.4 в [1].

В основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено условие

$$M(f\Gamma) \leq KM(\Gamma) \quad (1.3)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D при некотором $K \in [1, \infty)$, см. 13.1 в [1]. Другими словами, геометрическое определение квазиконформности сводится к тому, что n -модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. Предположим, что $n - 1 < p < n$ и

$$M_p(f\Gamma) \leq KM_p(\Gamma) \quad (1.4)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D . При дополнительном предположении, что f в (1.4) является гомеоморфизмом, Герингом установлено, что тогда отображение f является *локально липшицевым*, а точнее, для всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq K^{1/(n-p)},$$

см., например, теорему 2 в [2].

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ будем называть *Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля*, если

$$M_p(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \cdot \varrho^p(x) dm(x) \quad (1.5)$$

для любого семейства Γ путей в D и любой допустимой функции ϱ для Γ .

При $p = n$ проблема локального поведения Q -гомеоморфизмов изучалась в случае $Q \in \text{ВМО}$ (ограниченного среднего колебания), в случае $Q \in \text{ФМО}$ (конечного среднего колебания) и в других случаях, см. монографию [3]. В работе [4] было показано, что Q -гомеоморфизмы в случае $Q \in L^1_{\text{loc}}(D)$ принадлежат классу Соболева $W^{1,1}_{\text{loc}}$ и дифференцируемы почти всюду. Определение Q -гомеоморфизма относительно p -модуля при $p \neq n$ впервые встречается в работе [5]. В работе [6] неравенство вида (1.5) установлено для отображений квазиконформных в среднем при $p \neq n$. В этом контексте необходимо также упомянуть работы Гутлянского, Бишопы, Мартио и Вуоринена [7], Миклюкова [8], Стругова [9] и многих других.

Запись $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f задано в области D и непрерывно. Отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Напомним следующие термины. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и P_1, P_2 – произвольные множества в D . Обозначим через $\Delta(P_1, P_2; D)$ семейство всех кривых $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые соединяют P_1 и P_2 в D , т.е.

$$\gamma(a) \in P_1, \quad \gamma(b) \in P_2, \quad \gamma(t) \in D \quad \text{при} \quad a < t < b.$$

Пусть $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, и пусть $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Всюду далее

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, \quad S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\},$$

$\mathbb{B}^n = B(0, 1)$, ω_{n-1} – площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Для любого числа $r > 0$ обозначим

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} Q(x) dm(x) &= \frac{1}{m(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} Q(x) dm(x), \\ q_{x_0}(r) &= \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} Q(x) dA, \end{aligned}$$

где dA – элемент площади поверхности. Положим

$$A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}, \quad (1.6)$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2. \quad (1.7)$$

Будем говорить, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q -отображением относительно p -модуля в точке $x_0 \in D$, $1 < p \leq n$* , если соотношение

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) dm(x) \quad (1.8)$$

выполнено для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (1.9)$$

Говорят, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q -отображением относительно p -модуля в области D* , если условие (1.8) выполнено для всех точек $x_0 \in D$. Свойства кольцевых Q -отображений при $p = n$ изучались в работе [10].

В дальнейшем мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$, см., например, [11; с. 6]. Ниже приведен критерий принадлежности классу кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p -модуля, который ранее был установлен в работе [12], см. теорему 1, а также теорему 1 в [13].

ТЕОРЕМА 1. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – локально интегрируемая функция. Гомеоморфизм $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для любых $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$*

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \quad (1.10)$$

где $S_j = S(x_0, r_j)$, $j = 1, 2$,

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(r)}.$$

Отметим также, что инфимум в выражении справа в (1.8) достигается для функции

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r^{(n-1)/(p-1)} q_{x_0}^{1/(p-1)}(r)}. \quad (1.11)$$

2. Предварительные замечания. Следующие важные определения можно найти в [14], см. раздел 3 гл. II. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – некоторая кривая, и пусть $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha: [a, c) \rightarrow D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x , если

- (i) $\alpha(a) = x$;
- (ii) $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c)}$;
- (iii) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha': [a, c') \rightarrow D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a, c)}$ и $f \circ \alpha' = \beta|_{[a, c')}$.

Пусть f – открытое дискретное отображение, и пусть $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая $\beta: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x , см. следствие 3.3 главы II в [14].

В дальнейшем нам понадобятся понятия конденсатора и емкости конденсатора, см., например, § 5 в [15] или раздел 10 главы 2 в [14]. Пару $E = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A , называем *конденсатором*. Конденсатор E называется *кольцевым конденсатором*, если $B = A \setminus C$ – кольцо, т.е. если B – область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор E называется *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят также, что конденсатор $E = (A, C)$ лежит в области D , если $A \subset D$. Очевидно, что если $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное, открытое отображение и $E = (A, C)$ – конденсатор в D , то (fA, fC) – также конденсатор в fD . Далее $fE = (fA, fC)$.

Пусть $E = (A, C)$ – конденсатор. Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u: A \rightarrow \mathbb{R}^1$ с компактным носителем; $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u: A \rightarrow \mathbb{R}^1$ таких, что

- 1) $u \in C_0(A)$;
- 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$;
- 3) u принадлежит классу ACL,

и пусть

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

При $p \geq 1$ величину

$$\text{cap}_p E = \text{cap}_p(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^p dm \quad (2.2)$$

называют *p-емкостью* конденсатора E . Емкости в контексте теории отображений хорошо отражены в монографии [16].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $E = (A, C)$ – произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$, и пусть Γ_E – семейство всех кривых вида $\gamma: [a, b) \rightarrow A$ с $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда $\text{cap}_p E = M_p(\Gamma_E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. предложение 10.2 главы II в [14].

Известно, что при $1 < p < n$

$$\text{cap}_p E \geq n \Omega_n^{p/n} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-1} [m(C)]^{(n-p)/n}, \quad (2.3)$$

где Ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$; см., например, п. 1.4 в [17].

При $n - 1 < p \leq n$ имеет место оценка

$$(\text{cap}_p E)^{n-1} \geq \gamma \frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}, \quad (2.4)$$

где $d(C)$ – диаметр компакта C , $m(A)$ – мера Лебега множества A , γ – положительная константа, зависящая только от размерности n и p , см. предложение в [18].

3. Липшицевость кольцевых Q -отображений относительно p -модуля. В дальнейшем рассматриваются открытые множества Ω в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и непрерывные отображения $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ положим

$$L(x, f) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}. \quad (3.1)$$

Будем говорить, что отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ является *конечно липшицевым*, если

$$L(x, f) < \infty \quad (3.2)$$

для всех $x \in \Omega$. Очевидно, что каждое липшицево отображение является конечно липшицевым.

Ниже приведена теорема о достаточном условии локальной липшицевости в точке для кольцевых Q -отображений относительно p -модуля при $n - 1 < p < n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f: D \rightarrow D'$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение относительно p -модуля и

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x) dm(x) < \infty.$$

Тогда при $n - 1 < p < n$ имеем

$$L(x_0, f) = \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \lambda_{n,p} Q_0^{1/(n-p)},$$

где $\lambda_{n,p}$ – положительная постоянная, зависящая только от n и p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Рассмотрим сферическое кольцо

$$A = A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x : \varepsilon_1 < |x_0 - x| < \varepsilon_2\}, \quad x_0 \in D,$$

с произвольными ε_1 и ε_2 такими, что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \delta_0$, $B(x_0, \delta_0) \subset D$. Тогда $E = (B(x_0, \varepsilon_2), \overline{B(x_0, \varepsilon_1)})$ – конденсатор в D , а $fE = (fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)})$ – конденсатор в D' . Пусть Γ_E и Γ_{fE} – семейства кривых в смысле обозначений предложения 1. По этому предложению

$$\text{cap}_p(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)}) = M_p(\Gamma_{fE}). \quad (3.3)$$

Пусть Γ^* – семейство максимальных поднятий Γ_{fE} с началом в $\overline{B(x_0, \varepsilon_1)}$. Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Предположим противное, т.е. что существует кривая $\beta: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ семейства Γ_{fE} , для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha: [a, c) \rightarrow$

$B(x_0, \varepsilon_2)$ лежит в некотором компакте $\mathcal{K}$ внутри $B(x_0, \varepsilon_2)$. Следовательно, его замыкание $\bar{\alpha}$ – компакт в $B(x_0, \varepsilon_2)$. Заметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\bar{\beta}$ – компакт в $fB(x_0, \varepsilon_2)$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{fE}$. Рассмотрим множество

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k) \right\}, \quad t_k \in [a, c), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = c.$$

Отметим, что, переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k . Для $x \in G$ в силу непрерывности f будем иметь $f(\alpha(t_k)) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$, где $t_k \in [a, c)$, $t_k \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. Однако, $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \rightarrow \beta(c)$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $B(x_0, \varepsilon_2)$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\bar{\alpha}$, см. 3.6 гл. I в [19],

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c)) \neq \emptyset$$

в силу монотонности относительно последовательности связных множеств $\alpha([t_k, c))$, и, таким образом, G является связным по I (9.12) в [19]. Таким образом, в силу дискретности f G не может состоять более чем из одной точки, и кривая $\alpha: [a, c) \rightarrow B(x_0, \varepsilon_2)$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha: [a, c] \rightarrow \mathcal{K} \subset B(x_0, \varepsilon_2)$, причем $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Снова по следствию 3.3 главы II в [14] можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c, b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α' , получаем новое поднятие α'' кривой β , которое определено на $[a, c')$, $c' \in (c, b)$, что противоречит максимальной поднятия α . Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma_{fE} > f\Gamma^*$ и, следовательно,

$$M_p(\Gamma_{fE}) \leq M_p(f\Gamma^*) \leq M_p(f\Gamma_E).$$

Рассмотрим произвольную последовательность чисел $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varepsilon_1 < r_i < \varepsilon_2$, такую, что $r_i \rightarrow \varepsilon_2 - 0$. Обозначим через Γ_i семейство кривых, соединяющих сферы $|x - x_0| = \varepsilon_1$ и $|x - x_0| = r_i$ в кольце $\varepsilon_1 < |x - x_0| < r_i$. В таком случае для любого $i \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\Gamma_E > \Gamma_i. \quad (3.4)$$

Рассмотрим параметрическое семейство вещественнозначных функций

$$\eta_{i, \varepsilon_1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{r_i - \varepsilon_1}, & t \in (\varepsilon_1, r_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon_1, r_i). \end{cases}$$

По определению кольцевого Q -отображения относительно p -модуля и в силу (3.4)

$$\begin{aligned} M_p(f\Gamma_E) &\leq M_p(f\Gamma_i) \leq \frac{1}{(r_i - \varepsilon_1)^p} \int_{A(x_0, \varepsilon_1, r_i)} Q(x) dm(x) \\ &\leq \frac{1}{(r_i - \varepsilon_1)^p} \int_{B(x_0, \varepsilon_2)} Q(x) dm(x). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Переходим в (3.5) к пределу при $i \rightarrow \infty$. Получаем

$$M_p(f\Gamma_E) \leq \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int_{B(x_0, \varepsilon_2)} Q(x) dm(x). \quad (3.6)$$

Из (3.3) и (3.6)

$$\text{cap}_p(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)}) \leq \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int_{B(x_0, \varepsilon_2)} Q(x) dm(x). \quad (3.7)$$

Далее, выбирая в (3.7) $\varepsilon_1 = \varepsilon < \delta_0/4$ и $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, получаем оценку

$$\text{cap}_p(fB(x_0, 2\varepsilon), \overline{fB(x_0, \varepsilon)}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) dm(x). \quad (3.8)$$

С другой стороны, согласно неравенству (2.4) будем иметь

$$\text{cap}_p(fB(x_0, 2\varepsilon), \overline{fB(x_0, \varepsilon)}) \geq \left(C_{n,p} \frac{d^p(fB(x_0, \varepsilon))}{m^{1-n+p}(fB(x_0, 2\varepsilon))} \right)^{1/(n-1)}, \quad (3.9)$$

где $C_{n,p}$ – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Комбинируя (3.8) и (3.9), получаем, что

$$\frac{d(fB(x_0, \varepsilon))}{\varepsilon} \leq \gamma_{n,p} \left(\frac{m(fB(x_0, 2\varepsilon))}{m(B(x_0, 2\varepsilon))} \right)^{(1-n+p)/p} \left(\int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) dm(x) \right)^{(n-1)/p}, \quad (3.10)$$

где $\gamma_{n,p}$ – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Далее, выбирая в (3.7) $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$, получим

$$\text{cap}_p(fB(x_0, 4\varepsilon), \overline{fB(x_0, 2\varepsilon)}) \leq \frac{1}{(2\varepsilon)^p} \int_{B(x_0, 4\varepsilon)} Q(x) dm(x). \quad (3.11)$$

Используя соотношение (2.3), имеем

$$\text{cap}_p(fB(x_0, 4\varepsilon), \overline{fB(x_0, 2\varepsilon)}) \geq C'_{n,p} [m(fB(x_0, 2\varepsilon))]^{(n-p)/n}, \quad (3.12)$$

где $C'_{n,p}$ – константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Комбинируя (3.11) и (3.12), получаем, что

$$\frac{m(fB(x_0, 2\varepsilon))}{m(B(x_0, 2\varepsilon))} \leq c_{n,p} \left[\int_{B(x_0, 4\varepsilon)} Q(x) dm(x) \right]^{n/(n-p)}, \quad (3.13)$$

где $c_{n,p}$ – положительная постоянная, зависящая только от n и p .

Эта оценка вместе с (3.10) дает неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{d(fB(x_0, \varepsilon))}{\varepsilon} \\ & \leq \lambda_{n,p} \left(\int_{B(x_0, 4\varepsilon)} Q(x) dm(x) \right)^{n(1-n+p)/(p(n-p))} \left[\int_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x) dm(x) \right]^{(n-1)/p}. \end{aligned}$$

Переходя к верхнему пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем заключение теоремы:

$$L(x_0, f) = \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(fB(x_0, \varepsilon))}{\varepsilon} \leq \lambda_{n,p} Q_0^{1/(n-p)},$$

где $\lambda_{n,p}$ – положительная постоянная, зависящая только от n и p .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение относительно p -модуля при $n - 1 < p < n$ и

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x) dm(x) < \infty \quad \text{для всех } x_0 \in D.$$

Тогда отображение f является конечно липшицевым.

Построим пример кольцевого Q -гомеоморфизма относительно p -модуля в фиксированной точке, не являющегося конечно липшицевым.

ПРИМЕР. Предположим, что $n - 1 < p < n$. Пусть $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, где

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int_{|x|}^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)} \ln^{1/(p-1)}(e/t)} \right)^{-(p-1)/(n-p)}$$

при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Покажем, что отображение, определенное таким образом, является кольцевым Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля с $Q(x) = \ln(e/|x|)$ в точке $x_0 = 0$. Очевидно, что $q_{x_0}(t) = \ln(e/t)$. Рассмотрим кольцо $A = A(0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$. Заметим, что отображение f преобразует кольцо $A(0, r_1, r_2)$ в кольцо $\tilde{A} = \tilde{A}(0, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, где

$$\tilde{r}_i = \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int_{r_i}^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)} \ln^{1/(p-1)}(e/t)} \right)^{-(p-1)/(n-p)}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через Γ семейство всех кривых, соединяющих сферы $S(0, r_1)$ и $S(0, r_2)$ в кольце A . Тогда p -модуль семейства кривых $f\Gamma$ вычисляется в явном виде, см., например, соотношение (2) в [2] на с. 177:

$$M_p(f\Gamma) = \omega_{n-1} \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{1/(p-1)} \left((\tilde{r}_1)^{(p-n)/(p-1)} - (\tilde{r}_2)^{(p-n)/(p-1)} \right)^{1-p}. \quad (3.14)$$

Подставляя в (3.14) значения $\tilde{r}_1$ и $\tilde{r}_2$, определенные выше, получаем, что

$$M_p(f\Gamma) = \omega_{n-1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)} \ln^{1/(p-1)}(e/t)} \right)^{-(p-1)}.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 гомеоморфизм f является кольцевым Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля в точке $x_0 = 0$ с $Q(x) = \ln(e/|x|)$. Заметим, что

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x) dm(x) = \infty.$$

Тем не менее, как легко проверить по правилу Лопиталья, $|f(x)|/|x| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, т.е. гомеоморфизм f не является липшицевым в нуле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Väisälä, *Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

- [2] F. W. Gehring, “Lipschitz mappings and the p -capacity of ring in n -space”, *Advances in the Theory of Riemann Surfaces*, Ann. of Math. Stud., **66**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971, 175–193.
- [3] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monogr. Math., Springer, New York, 2009.
- [4] Р. Р. Салимов, “Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 141–148.
- [5] A. Golberg, “Differential properties of (α, Q) -homeomorphisms”, *Further Progress in Analysis*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009, 218–228.
- [6] A. Golberg, “Integrally quasiconformal mappings in space”, *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України*, **7**:2 (2010), 53–64.
- [7] Ch. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, “On conformal dilatation in space”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **2003**:22 (2003), 1397–1420.
- [8] В. М. Миклюков, *Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения*, Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2005.
- [9] Ю. Ф. Стругов, “Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем”, *ДАН СССР*, **243**:4 (1978), 859–861.
- [10] Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, “Теория кольцевых Q -отображений в геометрической теории функций”, *Матем. сб.*, **201**:6 (2010), 131–158.
- [11] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949.
- [12] R. R. Salimov, “On finitely Lipschitz space mappings”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **8** (2011), 284–295.
- [13] Р. Р. Салимов, “Локальное поведение обобщенных квазиизометрий”, *Доп. НАН України*, 2011, № 6, 23–28.
- [14] S. Rickman, *Quasiregular Mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [15] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, “Definitions for quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **448** (1969), 40 с.
- [16] В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.
- [17] В. Г. Мазья, “Классы областей, мер и емкостей в теории пространств дифференцируемых функций”, *Анализ – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **26**, ВИНТИ, М., 1988, 159–228.
- [18] В. И. Кругликов, “Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем”, *Матем. сб.*, **130(172)**:2(6) (1986), 185–206.
- [19] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **28**, Amer. Math. Soc., New York, 1942.

Р. Р. Салимов

Институт прикладной математики и механики НАН
Украины, г. Донецк
E-mail: ruslan623@yandex.ru

Поступило

17.10.2011

Исправленный вариант

22.01.2013