Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Снурницын, О базисных свойствах τ -функции
Рамануджана, *Матем. заметки*, 2011, том 90, вы-
пуск 5, 736–743

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 07:06:37

О базисных свойствах τ -функции Рамануджана

П. В. Снурницын

Доказано, что значения функции Рамануджана образуют аддитивный базис множества целых чисел порядка 8012.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В 1916 г. Рамануджан рассматривал функцию τ [1]. Она может быть определена следующим разложением:

$$q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n.$$

Функция Рамануджана обладает многими арифметическими свойствами. Отметим, что функция

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n z}$$

является параболической формой веса 12 относительно полной модулярной группы, т.е. является голоморфной в верхней полуплоскости и удовлетворяет соотношению

$$\Delta\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^{12} \Delta(z),$$

см., например, [2].

Представляет интерес исследование свойств множества значений функции Рамануджана. В 2005 г. Шпарлинский доказал, что если

$$\mathcal{T}(x) = \{\tau(n) : n \leq x\}, \quad \mathcal{T}(x, l) = \{\tau(n) \pmod{l} : n \leq x\},$$

то

$$|\mathcal{T}(x)| \geq x^{1/3+\varepsilon}, \quad |\mathcal{T}(x, l)| \geq \min(l^{1/2+\varepsilon} x^{1/4+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ [3].

В той же работе было доказано, что множество значений функции Рамануджана образует конечный аддитивный базис по модулю простого числа l , а именно, существует целое число s такое, что для любого целого a сравнение

$$\sum_{i=1}^s \tau(n_i) \equiv a \pmod{l}$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \dots, n_s \leq l^4$.

В 2008 г. Гараев, Гарсия, Конягин [4] доказали, что множество значений функции Рамануджана образует конечный аддитивный базис множества целых чисел порядка 74000, т.е. для любого целого числа N уравнение

$$\sum_{i=1}^{74000} \tau(n_i) = N$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \dots, n_{74000}$, причем

$$\max_{1 \leq i \leq 74000} n_i \ll |N|^{2/11}.$$

Также в этой работе были получены результаты для кольца вычетов по модулю простого числа l , а именно, для любого целого a сравнение

$$\sum_{i=1}^{96} \tau(n_i) \equiv a \pmod{l}$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \dots, n_{96}$, $\max_{1 \leq i \leq 96} n_i \ll l^2(\log l)^4$; для любого целого a и любого $\varepsilon > 0$ сравнение

$$\sum_{i=1}^{16} \tau(n_i) \equiv a \pmod{l}$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \dots, n_{16}$, $\max_{1 \leq i \leq 16} n_i \ll l^{3+\varepsilon}$.

Далее было доказано, что для любого целого числа N уравнение

$$\sum_{i=1}^{148000} \tau(n_i) = N$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \dots, n_{148000}$, причем

$$\max_{1 \leq i \leq 148000} n_i \ll |N|^{2/11} e^{-c \log |N| / \log \log |N|},$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная [5].

Настоящая работа посвящена получению следующего результата.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого целого числа N уравнение*

$$\sum_{i=1}^{8012} \tau(n_i) = N$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \dots, n_{8012}$, причем

$$\max_{1 \leq i \leq 8012} n_i \ll |N|^{2/11}.$$

Таким образом, множество значений функции Рамануджана образует аддитивный базис множества целых чисел порядка 8012, что улучшает результат 74000 работы [4].

2. Вспомогательные утверждения. Пусть M – достаточно большое четное число. Следуя [4], положим

$$\mathcal{P} = \{p : p - \text{простое}, 23 < p \leq M^{1/11}\},$$

$\mathcal{P}'$ – подмножество $\mathcal{P}$ наибольшей мощности такое, что

$$\sum_{i=1}^6 \tau(p'_i) \neq \sum_{i=7}^{12} \tau(p'_i)$$

при любых $p'_1, \dots, p'_{12} \in \mathcal{P}'$, $p'_1 < \dots < p'_6$, $p'_7 < \dots < p'_{12}$, $(p'_1, \dots, p'_6) \neq (p'_7, \dots, p'_{12})$.

В [4] показано, что подмножество $\mathcal{P}'$ существует и

$$|\mathcal{P}'| \ll M^{1/11-1/132}. \quad (2.1)$$

Приведем следующие результаты.

ЛЕММА 1. Для любого $p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ существуют $p'_1, \dots, p'_{11} \in \mathcal{P}'$ такие, что

$$p^{11} = \sum_{i=1}^6 \tau(p'_i p) - \sum_{i=7}^{11} \tau(p'_i p) - \tau(p^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4].

ЛЕММА 2. Любое целое число r , $0 \leq r < 370944$, представимо в виде

$$r = \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i),$$

где $a_i \leq 105$, $1 \leq i \leq 198$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4].

Введем следующие обозначения: $P_0 = M^{1/11}$, $P = [P_0]$, $L = \log P$, $\vartheta = ML^{-2}$. Для дроби a/q с $q \leq L^2$, $a < q$, $(a, q) = 1$ положим

$$\Omega(a, q) = \left\{ \alpha : -\frac{1}{\vartheta} \leq \alpha \leq 1 - \frac{1}{\vartheta}, \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q\vartheta} \right\}.$$

Множества $\Omega(a, q)$ не пересекаются. Рассмотрим следующее разбиение интервала $[-1/\vartheta; 1 - 1/\vartheta]$:

$$\Omega = \bigcup_{\substack{q \leq L^2, a < q \\ (a, q) = 1}} \Omega(a, q), \quad \omega = \left[-\frac{1}{\vartheta}; 1 - \frac{1}{\vartheta} \right] \setminus \Omega.$$

Пусть

$$S(\alpha) = \sum_{p \in \mathcal{P}} e(\alpha p^{11}), \quad J(M) = \int_{\Omega} S(\alpha)^r e(-\alpha M) d\alpha,$$

где $e(x) = e^{2\pi i x}$.

ЛЕММА 3. При $r > 23$

$$J(M) = \mathfrak{S}(M) \frac{\Gamma(1/11)^r}{\Gamma((1/11)r)} \frac{M^{(1/11)r-1}}{(\log M)^r} + O\left(\frac{M^{(1/11)r-1}}{(\log M)^r} \frac{\log \log M}{\log M}\right),$$

где $\mathfrak{S}(M)$ – особый ряд проблемы Варинга–Гольдбаха.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [6], [7].

ЛЕММА 4. Пусть $r \geq 34$. Существует постоянная C_0 такая, что

$$\mathfrak{S}(M) \geq C_0 > 0,$$

где C_0 не зависит от M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7].

ЛЕММА 5. При $\alpha \in \omega$ для $S(\alpha)$ справедлива оценка

$$S(\alpha) \ll \frac{M^{1/11(1-\rho)}}{\log M},$$

где $\rho = 1/17630$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [6].

3. Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы 1 потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 6. Для достаточно большого четного M уравнение

$$\sum_{i=1}^{217} p_i^{11} = M$$

разрешимо в числах $p_1, \dots, p_{217} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение

$$p_1^{11} + \dots + p_r^{11} + u_1^{11} + \dots + u_s^{11} + u_{s+1}^{11} + \dots + u_{2s}^{11} = M, \quad (3.1)$$

где $p_1, \dots, p_r \in \mathcal{P}$, $u_1, u_{s+1} \in \mathcal{U}_1, \dots, u_s, u_{2s} \in \mathcal{U}_s$, $r \geq 34$, s – натуральное число, значение которого будет выбрано ниже,

$$\mathcal{U}_i = \{u : u \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}', P_i < u < 2P_i\}, \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$P_1 = \frac{1}{4} P_0, \quad P_2 = \frac{1}{2} P_1^{1-1/11}, \quad \dots, \quad P_s = \frac{1}{2} P_{s-1}^{1-1/11}.$$

Заметим, что

$$|\mathcal{U}_i| \asymp \frac{P_i}{\log P_i}.$$

Покажем, что уравнение

$$u_1^{11} + \dots + u_s^{11} = u_{s+1}^{11} + \dots + u_{2s}^{11} \quad (3.2)$$

имеет только решения вида $u_1 = u_{s+1}, \dots, u_s = u_{2s}$. Действительно, пусть $u_1 \neq u_{s+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} |u_1^{11} - u_{s+1}^{11}| &= |u_1 - u_{s+1}| |u_1^{10} + u_1^9 u_{s+1} + \dots + u_{s+1}^{10}| \geq 11 |u_1 - u_{s+1}| P_1^{10}, \\ |u_2^{11} + \dots + u_s^{11} - u_{s+2}^{11} - \dots - u_{2s}^{11}| &\leq (2P_2)^{11} = P_1^{10}, \end{aligned}$$

что невозможно. Таким образом, число решений уравнения (3.2) не превосходит

$$|\mathcal{U}_1| |\mathcal{U}_2| \dots |\mathcal{U}_s|.$$

Пусть $I(M)$ – число решений уравнения (3.1). Тогда

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_0^1 S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha \\ &= \int_{-1/\vartheta}^{1-1/\vartheta} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha, \end{aligned}$$

где

$$T_i(\alpha) = \sum_{u \in \mathcal{U}_i} e(\alpha u^{11}).$$

Разобьем промежутки интегрирования; получим

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M),$$

где

$$\begin{aligned} I_1(M) &= \int_{\Omega} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha, \\ I_2(M) &= \int_{\omega} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha. \end{aligned}$$

Для $I_2(M)$ имеем оценку

$$|I_2(M)| \ll \max_{\alpha \in \omega} |S(\alpha)|^r \int_0^1 T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 d\alpha.$$

Интеграл в правой части равен числу решений уравнения (3.2), т.е. не превосходит $|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|$. Из леммы 5 получаем

$$|I_2(M)| \ll |\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s| \frac{M^{1/11(1-\rho)r}}{(\log M)^r}.$$

Рассмотрим $I_1(M)$

$$\begin{aligned} I_1(M) &= \sum_{u_1, u_{s+1} \in \mathcal{U}_1} \dots \sum_{u_s, u_{2s} \in \mathcal{U}_s} \int_{\Omega} S(\alpha)^r e(-\alpha(M - u_1^{11} - \dots - u_{2s}^{11})) d\alpha \\ &= \sum_{u_1, u_{s+1} \in \mathcal{U}_1} \dots \sum_{u_s, u_{2s} \in \mathcal{U}_s} J(M - u_1^{11} - \dots - u_{2s}^{11}). \end{aligned}$$

Из лемм 3 и 4 получаем, что при $r \geq 34$

$$I_1(M) \geq C_1(|\mathcal{U}_1| \cdots |\mathcal{U}_s|)^2 \frac{M^{1/11r-1}}{(\log M)^r} - C_2(|\mathcal{U}_1| \cdots |\mathcal{U}_s|)^2 \frac{M^{1/11r-1}}{(\log M)^r} \frac{\log \log M}{\log M},$$

где C_1, C_2 – постоянные.

Учитывая, что

$$C_3 \frac{M^{1-(10/11)^s}}{(\log M)^s} \leq |\mathcal{U}_1| \cdots |\mathcal{U}_s| \leq C_4 \frac{M^{1-(10/11)^s}}{(\log M)^s},$$

получим

$$\begin{aligned} I(M) &\geq C_5 \frac{M^{2-2(10/11)^s}}{(\log M)^{2s}} \frac{M^{1/11r-1}}{(\log M)^r} - C_6 \frac{M^{2-2(10/11)^s}}{(\log M)^{2s}} \frac{M^{(1/11)r-1}}{(\log M)^r} \frac{\log \log M}{\log M} \\ &\quad - C_7 \frac{M^{1-(10/11)^s}}{(\log M)^s} \frac{M^{(1/11)(1-\rho)r}}{(\log M)^{24}}. \end{aligned}$$

При $s = 91$ имеем

$$C_8 \frac{M^{1/11r+1-\eta}}{(\log M)^{r+182}} \leq I(M) \leq C_9 \frac{M^{1/11r+1-\eta}}{(\log M)^{r+182}}, \quad (3.3)$$

где $\eta = 2(10/11)^{91}$.

Рассмотрим уравнение (3.1) при $r = 35$. Пусть $I'(M)$ – число решений этого уравнения, а $I''(M)$ – число таких решений, что, по крайней, мере одно $p_{j_0} \in \mathcal{P}'$. Для $I'(M)$ из (3.3) при $r = 35$ получаем оценку снизу

$$I'(M) \geq C_8 \frac{M^{46/11-\eta}}{(\log M)^{217}}.$$

А для $I''(M)$ из (3.3) при $r = 34$ и получаем оценку сверху

$$I''(M) \leq 35C_9 |\mathcal{P}'| \frac{M^{45/11-\eta}}{(\log M)^{216}} \ll \frac{M^{46/11-\eta-1/132}}{(\log M)^{216}}.$$

Таким образом, $I'(M) > I''(M)$, и уравнение

$$p_1^{11} + \cdots + p_{35}^{11} + u_1^{11} + \cdots + u_{182}^{11} = M$$

разрешимо в числах $p_1, \dots, p_{35}, u_1, \dots, u_{182} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Будем следовать схеме доказательства работы [4]. Из лемм 6 и 1 получаем, что для достаточно большого четного M

$$M = \sum_{i=1}^{217} p_i^{11} = \sum_{i=1}^{217} \left(\sum_{j=1}^6 \tau(p'_{ij} p_i) - \sum_{j=7}^{11} \tau(p'_{ij} p_i) - \tau(p_i^2) \right),$$

где $p_i \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$, $1 \leq i \leq 217$, $p'_{ij} \in \mathcal{P}'$, $1 \leq i \leq 217$, $1 \leq j \leq 11$, или

$$M = \sum_{i=1}^{1302} \tau(n_i) - \sum_{j=1}^{1302} \tau(m_j), \quad (3.4)$$

причем из условий на p_i, p'_{ij} имеем $n_i, m_j \leq M^{2/11}$, $(n_i m_j, 23!) = 1$. Здесь $1302 = 217 \times 6$.

Умножая уравнение (3.4) на -1 , получим аналогичное представление для $-M$. Заменяя M на $M - \tau(1)$ или $M - \tau(29)$, получим, что любое целое число M с достаточно большим $|M|$ может быть представлено в виде

$$M = \sum_{i=1}^{1302} \tau(n_i) - \sum_{i=1}^{1303} \tau(m_i), \quad (3.5)$$

где $n_i, m_j \leq |M|^{2/11} + 1$, $(n_i m_j, 23!) = 1$. Известно, что

$$-\tau(12) = 370944 = \tau(27) + \tau(55) + \tau(69) + \tau(90) + \tau(105),$$

см. [4]. Умножив (3.5) на $-\tau(12)$, из мультипликативности и условий на n_i, m_j получим

$$370944M = \sum_{i=1}^{7813} \tau(n_i), \quad (3.6)$$

где $n_i \leq 106|M|^{2/11} + 1$. Здесь $7813 = 1302 \times 5 + 1303$.

Пусть K – произвольное целое число с достаточно большим модулем. По лемме 2 найдутся числа $a_1, \dots, a_{198} \leq 105$ такие, что

$$K \equiv \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i) \pmod{370944}.$$

Следовательно, из (3.6) имеем

$$K = \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i) + 370944M = \sum_{i=1}^{8011} \tau(n_i),$$

причем

$$\max_{1 \leq i \leq 8011} n_i \ll |K|^{2/11}.$$

Таким образом, существует целое положительное число K_0 такое, что для любого целого K , $|K| \geq K_0$ уравнение

$$K = \sum_{i=1}^{8011} \tau(n_i)$$

имеет решение.

Пусть N – произвольное целое число. Если $|N| > K_0$, то $|N - \tau(1)| \geq K_0$ и число $N - \tau(1)$ представимо суммой 8011 значений $\tau(n)$ при $n \ll |N|^{2/11}$. В этом случае теорема доказана.

Пусть $|N| \leq K_0$. Существует n_0 такое, что $|\tau(n_0)| > 2K_0$. Тогда $|N - \tau(n_0)| > K_0$, и $K - \tau(n_0)$ представимо суммой 8011 значений $\tau(n)$ при $n \ll 1$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность научному руководителю проф. Г. И. Архипову за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Ramanujan, “On certain arithmetical functions”, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **22**:9 (1916), 159–184.
- [2] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Grad. Stud. Math., **17**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [3] I. E. Shparlinski, “On the value set of the Ramanujan function”, *Arch. Math. (Basel)*, **85**:6 (2005), 508–513.
- [4] М. З. Гараев, В. С. Гарсиа, С. В. Конягин, “Проблема Варинга с τ -функцией Рамануджана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 39–50.
- [5] M. Z. Garaev, V. C. Garcia, S. V. Konyagin, “The Waring problem with the Ramanujan τ -function. II”, *Canad. Math. Bull.*, **52**:2 (2009), 195–199.
- [6] И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, М., 1971.
- [7] Хуа Ло-Кен, “Аддитивная теория простых чисел”, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **22**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947, 3–179.

П. В. Снурницын

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: snurnitsyn@gmail.com

Поступило

24.03.2011