Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Бер, Непрерывность дифференцирований на собственно бесконечных $*$ -алгебрах τ -измеримых операторов, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 776–780

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 05:33:23

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Непрерывность дифференцирований на собственно бесконечных $*$ -алгебрах τ -измеримых операторов

А. Ф. Бер

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра над полем K . Линейное отображение $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ называется *дифференцированием*, если $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ отображение $\delta_a(x) = [a, x] = ax - xa$ является дифференцированием на $\mathcal{A}$. Такие дифференцирования называются *внутренними*. Одной из важных задач в теории дифференцирований на алгебрах является нахождение тех классов алгебр, в которых любое дифференцирование является внутренним. Ясно, что в топологических алгебрах любое внутреннее дифференцирование непрерывно. В связи с этим возникает естественный вопрос о выделении тех классов топологических алгебр, в которых каждое дифференцирование является непрерывным. Хорошо известен положительный ответ на этот вопрос, например, для произвольных C^* -алгебр [1]. При этом, вообще говоря, не любое дифференцирование на произвольной C^* -алгебре является внутренним [1]. В то же время, на W^* -алгебрах все дифференцирования – внутренние [1]. Аналогичная задача рассматривалась и для различных алгебр измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана. В работе [2] показано, что любое дифференцирование на алгебре $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, является нулевым тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{M}$ атомическая. В случае алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ типа I все поставленные выше вопросы для алгебр $S(\mathcal{M})$ всех измеримых, $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых и $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых операторов были решены в работе [3], а также в ситуации, когда алгебра $\mathcal{M}$ действует в сепарабельном гильбертовом пространстве, в работе [4]. В частности, было установлено, что для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ типа I_∞ любое дифференцирование на алгебрах $S(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M}, \tau)$, $LS(\mathcal{M})$ является внутренним.

Поскольку $*$ -алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ есть топологическая $*$ -алгебра относительно топологии t_τ сходимости по мере, порожденной точным нормальным полуконечным следом τ , то любое дифференцирование на $S(\mathcal{M}, \tau)$ непрерывно в топологии t_τ для алгебры $\mathcal{M}$ типа I_∞ . В настоящей заметке доказывается, что аналогичный результат сохраняется и в случае произвольной собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Используется терминология и обозначения теории алгебр фон Неймана из [5], [1] и теории измеримых операторов из [6].

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ , $P(\mathcal{M})$ – решетка всех проекторов в $\mathcal{M}$. Плотнo определенный замкнутый линейный оператор a , присоединенный к $\mathcal{M}$, называется τ -измеримым, если $\tau(e^{|a|}(\lambda, +\infty)) < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$, где $e^{|a|}(\lambda, +\infty)$ – спектральный проектор для $|a| = (a^*a)^{1/2}$, отвечающий промежутку $(\lambda, +\infty)$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно сильно определенных операций сложения и умножения. В алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$

рассматривается отделимая метризуемая векторная топология t_τ сходимости по мере, базисом окрестностей нуля которой являются множества

$$U(\varepsilon, \delta) = \{a \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists p \in P(\mathcal{M}), \tau(1 - p) \leq \delta, ap \in \mathcal{M}, \|ap\| \leq \varepsilon\},$$

где $\|\cdot\|$ – C^* -норма на $\mathcal{M}$. Известно (см., например, [6]), что $(S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau)$ – топологическая $*$ -алгебра и F -пространство.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\mathcal{M}$ – собственно бесконечная алгебра фон Неймана, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, то любое дифференцирование $\delta: S(\mathcal{M}, \tau) \rightarrow S(\mathcal{M}, \tau)$ является непрерывным в топологии t_τ сходимости по мере.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $\delta^* = \delta$. Так как $(S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau)$ – F -пространство, достаточно доказать замкнутость графика оператора δ . Предположим, что график δ не замкнут. Тогда найдется такая последовательность $\{a_n\} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$, что

$$t_\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad t_\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(a_n) = a \neq 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $a_n^* = a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $a^* = a$. Кроме того, можно считать, что $a_+ \neq 0$ (иначе можно взять последовательность $\{-a_n\}$). Следовательно, найдется такой ненулевой проектор $p \in P(\mathcal{M})$, что $pap \in \mathcal{M}$, $pap \geq \lambda p$ для некоторого $\lambda > 0$. Заменяя все a_n на a_n/λ , можно считать, что $pap \geq p$.

Согласно [1; предложение 2.2.4] существуют такие попарно ортогональные проекторы $\{p_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty \subset P(\mathcal{M})$, что $\sum_{n=1}^\infty p_n^{(1)} = 1$ и $p_n^{(1)} \sim 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, в частности, $p \preceq p_n^{(1)}$. Поэтому существуют такие попарно ортогональные проекторы $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subset P(\mathcal{M})$, для которых $p_n \sim p$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Ясно, что $p_0 = \sum_{n=1}^\infty p_n$ – бесконечный проектор. Пусть $v_n \in \mathcal{M}$ – такие частичные изометрии, что $v_n^* v_n = p$, $v_n v_n^* = p_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$v_n a v_n^* = v_n p a v_n^* \geq v_n p v_n^* = p_n, \quad \|v_n a v_n^*\| = \|v_n p a v_n^*\| \leq \|pap\|.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^\infty v_n a v_n^*$ сходится в so -топологии к некоторому элементу $c \in \mathcal{M}$ и $\|c\| = \sup(\|v_n a v_n^*\|) \leq \|pap\|$. Кроме того, $c \geq p_0$.

Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ выберем такое число $n(m, k)$ и такой проектор $q_m \in P(\mathcal{M})$, что

- 1) $\tau(1 - q_m) < (2^k 2^m)^{-1}$;
- 2) $\|v_m a_{n(m, k)} v_m^* q_m\| < 2^{-m} (k + 1)^{-1}$;
- 3) $\|\delta(v_m) a_{n(m, k)} v_m^* q_m\| < (3(k + 1) 2^m)^{-1}$;
- 4) $\|q_m (v_m \delta(a_{n(m, k)}) v_m^* - v_m a v_m^*)\| < (3(k + 1) 2^m)^{-1}$.

Пусть $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 < m_2$. Положим $q_{m_1 m_2} = \bigwedge_{m=m_1+1}^{m_2} q_m$. Имеем, что

$$\tau(1 - q_{m_1 m_2}) = \tau\left(\bigvee_{m=m_1+1}^{m_2} (1 - q_m)\right) \leq \sum_{m=m_1+1}^{m_2} \tau(1 - q_m) < (2^k 2^{m_1})^{-1}.$$

Кроме того,

$$\left\| \left(\sum_{m=m_1+1}^{m_2} v_m a_{n(m, k)} v_m^* \right) q_{m_1 m_2} \right\| \leq \sum_{m=m_1+1}^{m_2} \|v_m a_{n(m, k)} v_m^* q_m\| < ((k + 1) 2^{m_1})^{-1}.$$

Поэтому ряд $\sum_{m=1}^\infty v_m a_{n(m, k)} v_m^*$ сходится в топологии t_τ к некоторому самосопряженному элементу $b_k \in S(\mathcal{M}, \tau)$.

Если $r_m = p_m \wedge q_m$, то

$$\tau(p_m - r_m) = \tau(p_m - p_m \wedge q_m) = \tau(p_m \vee q_m - q_m) \leq \tau(\mathbf{1} - q_m) < (2^k 2^m)^{-1}.$$

Положим $q_0^{(k)} = \bigvee_{m=1}^{\infty} r_m$. Ясно, что $p_0 - q_0^{(k)} = \bigvee_{m=1}^{\infty} (p_m - r_m)$ и поэтому

$$\tau(p_0 - q_0^{(k)}) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \tau(p_m - r_m) < (2^k)^{-1}.$$

Кроме того, $q_0^{(k)} p_m = r_m = r_m q_m$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $v_m a_{n(m,k)} v_m^* q_0^{(k)} = v_m a_{n(m,k)} v_m^* r_m$ и

$$\|b_k q_0^{(k)}\| = \sup_m (\|v_m a_{n(m,k)} v_m^* r_m\|) \leq \sup_m (\|v_m a_{n(m,k)} v_m^* q_m\|) \leq (k+1)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь элемент

$$\begin{aligned} q_0^{(k)} \delta(v_m a_{n(m,k)} v_m^*) q_0^{(k)} &= q_0^{(k)} ((\delta(v_m a_{n(m,k)} v_m^*) - v_m \delta(a_{n(m,k)}) v_m^*) \\ &\quad + (v_m \delta(a_{n(m,k)}) v_m^* - v_m a v_m^*) + v_m a v_m^*) q_0^{(k)} \\ &= (q_0^{(k)} \delta(v_m) a_{n(m,k)} v_m^* q_0^{(k)} + q_0^{(k)} v_m a_{n(m,k)} \delta(v_m^*) q_0^{(k)}) \\ &\quad + q_0^{(k)} (v_m \delta(a_{n(m,k)}) v_m^* - v_m a v_m^*) q_0^{(k)} + q_0^{(k)} (v_m a v_m^*) q_0^{(k)} \\ &= q_0^{(k)} \delta(v_m) a_{n(m,k)} v_m^* q_m r_m + r_m q_m v_m a_{n(m,k)} \delta(v_m^*) q_0^{(k)} \\ &\quad + r_m q_m (v_m \delta(a_{n(m,k)}) v_m^* - v_m a v_m^*) q_m r_m + q_0^{(k)} (v_m a v_m^*) q_0^{(k)}. \end{aligned}$$

Из условия 3) следует, что ряды из первых слагаемых и из вторых слагаемых сходятся по норме $\mathcal{M}$ к элементам с нормами $\leq (3(k+1))^{-1}$. Из условия 4) следует, что ряд из третьих слагаемых также сходится по норме $\mathcal{M}$ к элементу с нормой $\leq (3(k+1))^{-1}$. Все элементы вида $q_0^{(k)} (v_m a v_m^*) q_0^{(k)}$ попарно дизъюнкты, так как $p_n q_0^{(k)} p_m = r_n r_m = 0$ при $n \neq m$, поэтому ряд из четвертых слагаемых сходится в so -топологии к элементу $q_0^{(k)} c q_0^{(k)}$. Следовательно, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} q_0^{(k)} \delta(v_m a_{n(m,k)} v_m^*) q_0^{(k)}$ сходится в so -топологии к некоторому элементу $d_k \in \mathcal{M}$ и

$$\|d_k - q_0^{(k)} c q_0^{(k)}\| \leq (k+1)^{-1}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} p_{m_1} q_0^{(k)} \delta(b_k) q_0^{(k)} p_{m_2} &= \delta(p_{m_1} q_0^{(k)} b_k) q_0^{(k)} p_{m_2} - \delta(p_{m_1} q_0^{(k)}) b_k q_0^{(k)} p_{m_2} \\ &= \delta(r_{m_1} v_{m_1} a_{n(m_1,k)} v_{m_1}^*) r_{m_2} - \delta(r_{m_1}) v_{m_2} a_{n(m_2,k)} v_{m_2}^* r_{m_2}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} p_{m_1} d_k p_{m_2} &= \sum_{m=1}^{\infty} r_{m_1} \delta(v_m a_{n(m,k)} v_m^*) r_{m_2} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\delta(r_{m_1} v_m a_{n(m,k)} v_m^*) r_{m_2} - \delta(r_{m_1}) v_m a_{n(m,k)} v_m^* r_{m_2}) \\ &= \delta(r_{m_1} v_{m_1} a_{n(m_1,k)} v_{m_1}^*) r_{m_2} - \delta(r_{m_1}) v_{m_2} a_{n(m_2,k)} v_{m_2}^* r_{m_2} = p_{m_1} q_0^{(k)} \delta(b_k) q_0^{(k)} p_{m_2} \end{aligned}$$

для любых $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Это означает, что $q_0^{(k)} \delta(b_k) q_0^{(k)} = d_k$.

Таким образом, имеем

- а) $\|b_k q_0^{(k)}\| \leq (k+1)^{-1}$;
- б) $\|q_0^{(k)} (\delta(b_k) - c) q_0^{(k)}\| \leq (k+1)^{-1}$;

- с) $c \geq p_0 \geq q_0^{(k)}$;
 д) $\tau(p_0 - q_0^{(k)}) < (2^k)^{-1}$.

В частности,

$$\|(k+1)b_k q_0^{(k)}\| \leq 1, \quad \|q_0^{(k)} \delta((k+1)b_k) q_0^{(k)} - (k+1)q_0^{(k)} c q_0^{(k)}\| \leq 1,$$

и поэтому

$$q_0^{(k)} \geq (k+1)q_0^{(k)} c q_0^{(k)} - q_0^{(k)} \delta((k+1)b_k) q_0^{(k)} \geq (k+1)q_0^{(k)} - q_0^{(k)} \delta((k+1)b_k) q_0^{(k)}.$$

Следовательно, $q_0^{(k)} \delta((k+1)b_k) q_0^{(k)} \geq k q_0^{(k)}$.

Положим $q_0 = \bigwedge_{k=1}^{\infty} q_0^{(k)}$. В силу равенства $p_0 - q_0 = \bigvee_{k=1}^{\infty} (p_0 - q_0^{(k)})$, имеем

$$\tau(p_0 - q_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(p_0 - q_0^{(k)}) < 1.$$

Кроме того, $\|(k+1)b_k q_0\| \leq 1$ и $q_0 \delta((k+1)b_k) q_0 \geq k q_0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Поскольку p_0 – бесконечный проектор и $\tau(p_0 - q_0) < 1$, то q_0 – также бесконечный проектор. Из [5; предложение 6.3.7] следует, что q_0 мажорирует собственно бесконечный проектор, который согласно [1; предложение 2.2.4] является супремумом семейства попарно ортогональных бесконечных проекторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\tau(e_n) = \infty$. Далее, для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой проектор $f_n \in P(\mathcal{M})$, что $f_n e_n \delta(e_n) \in \mathcal{M}$ и $\tau(1 - f_n) < 2^{-n}$. Для $f_0 = \bigwedge_{n=1}^{\infty} f_n$ имеем, что $\tau(1 - f_0) < 1$. Положим теперь $g_n = e_n \wedge f_0$. Поскольку

$$\tau(e_n - g_n) = \tau(e_n \vee f_0 - f_0) \leq \tau(1 - f_0) < 1,$$

то $\tau(g_n) = \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $f_0 e_n \delta(e_n) \in \mathcal{M}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, найдется такая возрастающая последовательность $\{l_n\} \subset \mathbb{N}$, что $l_n > n + 2\|f_0 e_n \delta(e_n)\|$. Тогда

$$\begin{aligned} \|g_n(l_n + 1)b_{l_n} \delta(e_n) e_n g_n\| &\leq \|g_n(l_n + 1)b_{l_n}\| \|\delta(e_n) e_n g_n\| \\ &\leq \|q_0(l_n + 1)b_{l_n}\| \|\delta(e_n) e_n f_0\| \leq \frac{(l_n - n)}{2}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\|g_n e_n \delta(e_n)(l_n + 1)b_{l_n} g_n + g_n(l_n + 1)b_{l_n} \delta(e_n) e_n g_n\| \leq l_n - n,$$

в частности,

$$g_n e_n \delta(e_n)(l_n + 1)b_{l_n} g_n + g_n(l_n + 1)b_{l_n} \delta(e_n) e_n g_n \geq (n - l_n)g_n.$$

Положим $b = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(l_n + 1)b_{l_n} e_n$ (ряд сходится в so -топологии). Ясно, что $b \in \mathcal{M}$ и

$$\|b\| = \sup_n (\|e_n(l_n + 1)b_{l_n} e_n\|) \leq \sup_n (\|q_0(n + 1)b_n q_0\|) \leq 1.$$

Далее,

$$\begin{aligned} g_n \delta(b) g_n &= \delta(g_n b) g_n - \delta(g_n) b g_n = \delta(g_n e_n(l_n + 1)b_{l_n} e_n) g_n - \delta(g_n) e_n(l_n + 1)b_{l_n} e_n g_n \\ &= g_n \delta(e_n(l_n + 1)b_{l_n} e_n) g_n \\ &= g_n (e_n(l_n + 1)\delta(b_{l_n})e_n + \delta(e_n)(l_n + 1)b_{l_n} e_n + e_n(l_n + 1)b_{l_n} \delta(e_n)) g_n \\ &= g_n(l_n + 1)\delta(b_{l_n})g_n + g_n e_n \delta(e_n)(l_n + 1)b_{l_n} g_n + g_n(l_n + 1)b_{l_n} \delta(e_n) e_n g_n \\ &\geq l_n g_n + (n - l_n)g_n = n g_n, \end{aligned}$$

т.е. $g_n \delta(b) g_n \geq n g_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому из [7; лемма 4.2] следует, что $g_n \preceq e^{\delta(b)}(n - 1, +\infty)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, в частности, $\tau(e^{\delta(b)}(n - 1, +\infty)) \geq \tau(g_n) = \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, что противоречит принадлежности $\delta(b) \in S_h(\mathcal{M}, \tau)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **60**, Springer-Verlag, New York, 1971. [2] A. F. Ber, V. I. Chilin, F. A. Sukochev, *Extracta Math.*, **21**:2 (2006), 107–147. [3] S. Albeverio, Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, *J. Funct. Anal.*, **256**:9 (2009), 2917–2943. [4] A. F. Ber, B. de Pagter, F. A. Sukochev, “Derivations in Algebras of Operator-Valued Functions”, *J. Operator Theory* (to appear), arXiv: 0811.0902. [5] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, v. II: *Advanced theory*, Pure Appl. Math., **100**, Academic Press, Orlando, FL, 1986. [6] М. А. Муратов, В. И. Чилин, *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов*, Праці Ін-ту матем. НАН України, **69**, Ін-т матем. НАН України, Київ, 2007. [7] А. Ф. Бер, Б. де Пагтер, Ф. А. Сукочев, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 502–513.

А. Ф. Бер

DCF Technologies Ltd., г. Ташкент, Узбекистан

E-mail: ber@ucd.uz

Поступило

24.04.2011