Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Егоров, QR-подмногообразия и римановы метрики с группой голономии G_2 , *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 781–784

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9269>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:52:11

1. Введение

Изучению многообразий с группой голономии G_2 препятствует недостаток явных примеров. Первые примеры полных римановых метрик с группой голономии G_2 были построены Брайантом и Саламоном в [1], а первые компактные примеры – Джойсом [2]. Позже Ковалев построил еще несколько семейств компактных примеров [3], [4]. Заметим, что метрики, построенные в работах [2]–[4] не задаются явными формулами.

Нехватка примеров является следствием того, что G_2 -многообразия, вообще говоря, не являются алгебраическими в широком смысле данного термина.

В данной работе мы делаем попытку частично объяснить этот факт, выдвигая гипотезу, что в общем случае G_2 -многообразия являются QR-подмногообразиями гиперкэлеровых многообразий. Примерами QR-подмногообразий являются вещественные гиперповерхности гиперкэлеровых многообразий.

1.1. G_2 -структура. Определим 3-форму Ω_0 на $\mathbb{R}^7$ по следующей формуле:

$$\Omega_0 = x^{127} + x^{136} + x^{145} + x^{235} - x^{246} + x^{347} + x^{567}, \quad (1)$$

где $x^{ijk} = x^i \wedge x^j \wedge x^k$. Подгруппа $GL(7, \mathbb{R})$, сохраняющая ориентацию и форму Ω_0 , называется группой G_2 .

Пусть M – ориентируемое замкнутое многообразие размерности 7. На многообразии M задана G_2 -структура, если существует глобальная 3-форма Ω такая, что всюду на M она поточечно совпадает с Ω_0 при подходящем выборе координат.

G_2 -структура задает ориентацию и риманову метрику g_Ω по следующей формуле:

$$(i_\xi \Omega) \wedge (i_\eta \Omega) \wedge \Omega = -6g_\Omega(\xi, \eta) \text{Vol}_\Omega.$$

1.2. Векторные произведения. В данном разделе мы основываемся на работе [5]. Пусть M является многообразием с G_2 -структурой. Векторное произведение на M – это по определению кососимметрическое полилинейное гладкое отображение $P: TM \times TM \rightarrow TM$, следующим образом согласованное с метрикой g :

$$g(P(e_1, e_2), e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\|P(e_1, e_2)\|^2 = \|e_1\|^2 \|e_2\|^2 - g(e_1, e_2)^2, \quad \|e\|^2 = g(e, e). \quad (3)$$

Будем также обозначать $P(e_1, e_2)$ через $e_1 \times e_2$.

Векторное произведение однозначно задается 3-формой Ω :

$$\Omega(e_1, e_2, e_3) = g(P(e_1, e_2), e_3). \quad (4)$$

Обратно, по векторному произведению мы можем задать метрику g , используя следующее тождество:

$$P(e_1, P(e_1, e_2)) = -\|e_1\|^2 e_2 + g(e_1, e_2) e_1. \quad (5)$$

Используя (4), по векторному произведению и метрике можно восстановить 3-форму Ω . Таким образом, задание векторного произведения эквивалентно заданию G_2 -структуры.

Известно, что если $\nabla P = 0$ относительно метрической связности, то группа голономии M является подгруппой G_2 и совпадает с ней при условии, что $\pi_1(M)$ является конечной группой [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00598-а) и программ Президента РФ “Ведущие научные школы” (грант № НШ-7256.2010.1) и “Молодые кандидаты” (грант № МК-842.2011.1).

1.3. QR-подмногообразия. Гиперкэлерово многообразие – это по определению ориентируемое $4n$ -мерное риманово многообразие, группа голономии которого содержится в $Sp(n)$.

Подмногообразие M гиперкэлерова многообразия $\overline{M}$ называется QR-подмногообразием [6], если нормальное расслоение раскладывается в прямую сумму, $NM = \nu \oplus \nu^\perp$ со следующими свойствами:

$$J_i \nu \subset \nu, \quad J_i \nu^\perp \subset TM, \quad (6)$$

где J_i являются комплексными структурами многообразия $\overline{M}$.

Везде далее мы будем рассматривать QR-подмногообразия с $\dim \nu^\perp = 1$. Мы будем называть их QR-подмногообразиями гиперповерхностного типа.

2. Основной результат

ТЕОРЕМА 1. *Ориентируемое многообразие M вещественной размерности 7, являющееся QR-подмногообразием гиперповерхностного типа гиперкэлерова многообразия $\overline{M}$, обладает G_2 -структурой, совместной с индуцированной метрикой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим векторное произведение, совместное с индуцированной метрикой.

Обозначим через n единичное нормальное векторное поле, лежащее в $\nu^\perp \subset NM$. Из определения QR-подмногообразия (6) следует, что $\xi_i = J_i n \in TM$ являются невырожденными векторными полями на M . Это согласуется с работой [7], из которой следует, что на многообразии с G_2 -структурой существует 3 невырожденных векторных поля.

Пусть ξ_i являются единичными взаимно ортогональными относительно индуцированной метрики векторами всюду на M . Дополним локально ξ_i до ортонормированного базиса и недостающие вектора обозначим через ξ_α , т.е. греческими индексами.

Зададим векторное произведение P следующими формулами:

$$P(\xi_i, \xi_j) = \xi_k, \quad (ijk) \in (123), \quad (7)$$

$$P(\xi_i, \xi_\alpha) = J_i(\xi_\alpha), \quad (8)$$

$$P(\xi_\alpha, J_i(\xi_\alpha)) = \xi_i. \quad (9)$$

Из определения QR-подмногообразия гиперповерхностного типа следует, что для любых ξ_α, ξ_β существует комплексная структура J_i такая, что $J_i \xi_\alpha = \xi_\beta$. Таким образом, уравнения (7)–(9) задают векторное произведение на всех базисных векторах.

Очевидно P удовлетворяет тождеству (5) для всех базисных векторов и, следовательно, P совместимо с индуцированной метрикой.

Поставим себе задачу найти условия, при которых введенное векторное произведение является параллельным.

Обозначим через $\overline{\nabla}$ и ∇ связность, согласованную с метрикой $\overline{M}$ и M соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Имеем*

$$\nabla \xi_i = J_i(\overline{\nabla} n) - b(\xi_i), \quad (10)$$

$$(\nabla J_i)(\xi_\alpha) = J_i \circ b(\xi_\alpha) - b \circ J_i(\xi_\alpha). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Гаусса

$$\overline{\nabla} \xi_i = \nabla \xi_i + b(\xi_i), \quad (12)$$

где $b(\xi_i) = b(\xi_i, \cdot)$, и b – это вторая фундаментальная форма.

С другой стороны, из определения гиперкэлерова многообразия следует, что

$$\overline{\nabla} \xi_i = \overline{\nabla} J_i(n) = (\overline{\nabla} J_i)(n) + J_i(\overline{\nabla} n). \quad (13)$$

Из (12) и (13) получаем искомую формулу (10).

Аналогично по формуле Гаусса

$$\overline{\nabla}(J_i \xi_\alpha) = \nabla(J_i(\xi_\alpha)) + b(J_i(\xi_\alpha)) = (\nabla J_i)(\xi_\alpha) + J_i(\nabla \xi_\alpha) + b(J_i(\xi_\alpha)). \quad (14)$$

С другой стороны,

$$\overline{\nabla}(J_i \xi_\alpha) = (\overline{\nabla} J_i)(\xi_\alpha) + J_i(\overline{\nabla} \xi_\alpha). \quad (15)$$

Из (14) и (15) получаем формулу (11).

Далее мы выпишем компоненты тензора ∇P . Введем обозначения для следующих тензоров:

$$X_i(\xi) = J_i(\overline{\nabla} \xi n) - b(J_i n, \xi), \quad Y_i(\xi, \eta) = J_i b(\xi, \eta) - b(\xi, J_i \eta).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Имеем*

$$(\nabla P)(\xi_i, \xi_j) = X_k - X_i \times \xi_j - \xi_i \times X_j, \quad (16)$$

$$(\nabla P)(\xi_i, \xi_\alpha) = Y_i(\xi_\alpha) - X_i \times \xi_\alpha, \quad (17)$$

$$(\nabla P)(\xi_i, \xi_\alpha) = Y_i(\xi_\alpha) - X_i \times \xi_\alpha. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу (16). Продифференцируем (7):

$$(\nabla P)(\xi_i, \xi_j) = \nabla \xi_k - P(\nabla \xi_i, \xi_j) - P(\xi_i, \nabla \xi_j). \quad (19)$$

Подставив (10) в (19) и используя (7), получим формулу (16).

Аналогично дифференцируя формулы (8) и (9) с использованием определения векторного произведения, получим формулы (17) и (18).

Приравнивая к нулю (16)–(18), мы сформулируем следующую теорему. При этом заметим, что выражения (17) и (18) эквивалентны.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть M – ориентируемое многообразие вещественной размерности 7, являющееся QR-подмногообразием гиперповерхностного типа гиперкэллериова многообразия $\overline{M}$. Тогда M обладает группой голономии, содержащейся в G_2 , при выполнении следующих уравнений:*

$$X_k(\xi) - X_i(\xi) \times \xi_j - \xi_i \times X_j(\xi) = 0, \quad (20)$$

$$Y_i(\xi, \eta) - X_i(\xi) \times \eta = 0 \quad (21)$$

для любых $\xi, \eta, J_i \eta \in \Gamma(TM)$, $i = 1, 2, 3$.

ПРИМЕР. Простейшими примерами компактных QR-подмногообразий с группой голономии, содержащейся в G_2 , служат вполне геодезические QR-подмногообразия – гиперповерхности. Например, вложение плоских торов: $T^7 \hookrightarrow T^8$ и $T^3 \times K3 \hookrightarrow T^4 \times K3$.

3. Гипотеза

Как мы уже отмечали, из работы [7] следует, что G_2 -многообразие M обладает тремя невырожденными единичными векторными полями ξ_i . На $\xi_i^\perp$ можно ввести почти комплексную структуру по формуле (5).

В работе [8] показано, что если M обладает метрикой с группой голономии, являющейся подгруппой G_2 , то данные почти комплексные структуры интегрируемы.

Вследствие интегрируемости, мы выдвигаем следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. *Любое многообразие с группой голономии G_2 реализуется в виде удовлетворяющего условиям теоремы 2 QR-подмногообразия некоторого гиперкэллериова многообразия.*

Автор благодарит И. А. Тайманова и Я. В. Базайкина за ценные замечания и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. L. Bryant, S. M. Salamon, *Duke Math. J.*, **58**:3 (1989), 829–850. [2] D. D. Joyce, *J. Differential Geom.*, **43**:2 (1996), 291–328; D. D. Joyce, 329–375. [3] A. Kovalev, *J. Reine Angew. Math.*, **565** (2003), 125–160. [4] A. Kovalev, J. Nordström, *Ann. Global Anal. Geom.*, **38**:3 (2010), 221–257. [5] A. Gray, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141** (1969), 465–504; *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148**:2 (1970), 625. [6] A. Bejancu, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **69**:1 (1978), 135–142; *Trans. Amer. Math. Soc.*, **250** (1979), 333–345. [7] E. Thomas, *Ann. of Math.* (2), **85**:2 (1967), 184–217. [8] M. Verbitsky, *A CR twistor space of a G_2 -manifold*, arXiv: 1003.3170.

Д. В. Егоров

Северо-Восточный федеральный университет

им. М. К. Аммосова, г. Якутск

E-mail: egorov.dima@gmail.com

Поступило

28.04.2011