Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Лог пары на гиперповерхностях степени N
в $\mathbb{P}^N$, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 131–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm927>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:17:35

УДК 512.6

ЛОГ ПАРЫ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ СТЕПЕНИ N В $\mathbb{P}^N$

И. А. Чельцов

Цель этой работы состоит в исследовании бирациональной структуры гладких гиперповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$ посредством изучения свойств подвижных лог пар на них.

Библиография: 7 названий.

Все рассматриваемые многообразия, если не оговорено иначе, проективны и определены над полем $\mathbb{C}$. Основные определения, понятия и обозначения содержатся в работе [1].

1. Введение. Под *подвижной лог парой*

$$(X, M_X) = \left(X, \sum_{i=1}^n b_i \mathcal{M}_i \right)$$

мы будем подразумевать многообразие X в совокупности с формальной конечной линейной комбинацией линейных систем $\mathcal{M}_i$ без неподвижных компонент такой, что все $b_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Дискрепантность, терминальность, каноничность, отображение Иитаки $I(X, M_X)$ и размерность Кодaira $\kappa(X, M_X)$ для подвижной лог пары (X, M_X) определяются аналогично соответствующим понятиям для обычных лог пар (см. [1] и [2]).

Мы будем называть неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ *центром канонических особенностей подвижной лог пары* (X, M_X) , если существуют бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и f -исключительный дивизор $E \subset W$ такие, что $a(X, M_X, E) \leq 0$ и $f(E) = Y$. Множество всех центров канонических особенностей подвижной лог пары (X, M_X) будет обозначаться $CS(X, M_X)$.

В дальнейшем подвижные лог пары мы будем для краткости называть просто лог парами.

С этого момента X будет обозначать достаточно общую гладкую гиперповерхность степени N в $\mathbb{P}^N$ для $N \geq 5$. Заметим, что тогда

$$\mathrm{Pic}(X) = -\mathbb{Z}K_X, \quad -K_X \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_X.$$

Рассмотрим $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$ такое, что выполнено соотношение $K_X + \lambda M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$, причем $\lambda = +\infty$ для $M_X = \emptyset$.

Основной результат данной работы состоит в следующей теореме.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке NSF, грант DMS-9800807.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\lambda = 1$. Тогда лог пара (X, M_X) канонична, $\kappa(X, M_X) = 0$ и

$$CS(X, M_X) = \begin{cases} \emptyset, \\ X \cap H \end{cases} \text{ для линейного пространства } H \text{ размерности } N - 2.$$

Мы докажем теорему 1 в ш. 3, 4, а в п. 5 выведем из нее следующий важный результат, который уточняет теорему 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda = 1$ и $CS(X, M_X) \neq \emptyset$. Тогда граница M_X поднимается с $\mathbb{P}^1$ посредством рационального отображения $\varphi_{\mathcal{P}}$ для некоторого пучка $\mathcal{P}$ в $|-K_X|$ такого, что $CS(X, M_X) = \{Bs(\mathcal{P})\}$.

С помощью теорем 1 и 2 мы докажем в п. 6 следующие две теоремы, в которых рассматриваются лог пары с $\lambda \neq 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\lambda < 1$ и $\kappa(X, M_X) \neq N - 1$. Тогда лог пара (X, M_X) не канонична, $\kappa(X, M_X) = 1$ и существует пучок $\mathcal{P}$ в линейной системе $|-K_X|$ такой, что граница M_X поднимается с $\mathbb{P}^1$ посредством рационального отображения $\varphi_{\mathcal{P}}$, которое совпадает с $I(X, M_X)$.

ТЕОРЕМА 4. Если $\lambda > 1$, то $\kappa(X, M_X) = -\infty$ и лог пара (X, M_X) терминальна.

Основные применения теорем 1–4 будут даны в п. 2.

2. Бирациональная геометрия гиперповерхности X . В этом пункте мы опишем основные применения теорем 2–4.

Пусть X является достаточно общей гладкой гиперповерхностью степени N в $\mathbb{P}^N$ для $N \geq 5$.

ТЕОРЕМА 5. X бирационально не изоморфно расслоению на многообразия с размерностью Кодайры $-\infty$.

Мы будем считать, что все расслоения имеют связные слои, не бирациональны и база расслоения не является точкой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует бирациональная перестройка ρ гиперповерхности X в расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$ такое, что размерность Кодайры его общего слоя равна $-\infty$. Положим $\mathcal{H} = |\tau^*(H)|$ для “достаточно большого” очень обильного дивизора H на многообразии Z . Возьмем $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ такое, что для лог пары $(X, M_X) = (X, \mu\rho^{-1}(\mathcal{H}))$ выполнено соотношение

$$K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Построенная лог пара (X, M_X) не терминальна, поскольку в противном случае для больших $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ выполнено равенство

$$N - 1 = \kappa(X, (1 + \alpha)M_X) = -\infty.$$

Необходимое утверждение следует теперь из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 6. X бирационально не изоморфно никакому многообразию Фано с каноническими особенностями отличному от себя самого и $\text{Bir}(X) = \text{Aut}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow Y$ такое, что Y является многообразием Фано с каноническими особенностями. Покажем, что тогда ρ есть изоморфизм.

Для $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ рассмотрим лог пару

$$(Y, M_Y) = \left(Y, \frac{1}{n} | - nK_Y |\right).$$

Пусть $M_X = \rho^{-1}(M_Y)$. Тогда $\kappa(X, M_X) = 0$. Рассмотрим $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ такое, что выполнено соотношение

$$K_X + \lambda M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Из теоремы 2 сразу следует терминальность лог пары $(X, \lambda M_X)$.

Предположим, что $\lambda < 1$. Рассмотрим $\delta \in \mathbb{Q} \cap (\lambda, 1)$ такое, что лог пара $(X, \delta M_X)$ терминальна. Тогда

$$N - 1 = \kappa(X, \delta M_X) \leq \kappa(X, M_X) = 0.$$

Таким образом, $\lambda = 1$.

Разрешим неопределенности рационального отображения ρ посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \dashrightarrow \rho \dashrightarrow & Y \end{array}$$

такой, что многообразие W гладко. Тогда

$$\sum_{j=1}^k a(X, M_X, F_j) F_j \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_Y + M_Y) + \sum_{i=1}^l a(Y, M_Y, G_i) G_i,$$

где дивизоры G_i и F_j исключительны для морфизмов g и f соответственно. Из леммы 2.19 работы [3] следует, что для всех дивизоров E на многообразии W

$$a(X, M_X, E) = a(Y, M_Y, E).$$

В частности, лог пара (Y, M_Y) терминальна и существует $\zeta \in \mathbb{Q}_{>1}$ такое, что обе лог пары $(X, \zeta M_X)$ и $(Y, \zeta M_Y)$ будут каноническими моделями. В виду того что каноническая модель единственна, мы получаем, что отображение ρ является изоморфизмом.

ТЕОРЕМА 7. *Все бирационально изоморфные X расслоения на многообразия с размерностью Кодайры 0 бирационально эквивалентны расслоению на гиперповерхности степени N в $\mathbb{P}^{N-1}$, заданному пучком гиперплоских сечений X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует бирациональная перестройка ρ гиперповерхности X в расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$ такое, что размерность Кодайры его общего слоя равна 0. Нам нужно показать, что $\tau \circ \rho = \varphi_{\mathcal{P}}$ для некоторого пучка $\mathcal{P}$ в $| -K_X |$.

Для “достаточно большого” очень обильного дивизора H на многообразии Z рассмотрим полную линейную систему $\mathcal{H} = |\tau^*(H)|$. Тогда для лог пары $(X, M_X) = (X, \rho^{-1}(\mathcal{H}))$ выполнено равенство

$$\kappa(X, M_X) = \dim(Z).$$

Осталось только применить результаты теорем 2–4.

3. Доказательство теоремы 1, часть I. Воспользуемся обозначениями п. 1 и будем считать, что $\lambda = 1$. Основной результат этого пункта состоит в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 8. $CS(X, M_X)$ не содержит точек.

Предположим, что $CS(X, M_X)$ содержит гладкую точку O .

Мы отступим от нашего соглашения на предполагаемую подвижность рассматриваемых лог пар. Мы надеемся, что это не внесет много путаницы, поскольку будет и так понятно подвижна лог пара или нет.

Нам понадобится один вариант теоремы 3.1 работы [4].

ЛЕММА 1. Пусть подвижная лог пара (H, M_H) не лог канонична в гладкой точке O на поверхности. Тогда $\text{mult}_O(M_H^2) > 4$.

Следующий результат принято называть неравенством Исковских–Пухликова.

ЛЕММА 2. Выполнено неравенство $\text{mult}_O(M_X^2) > 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим достаточно общий очень обильный дивизор H на многообразии X , содержащий точку O . Тогда

$$\text{mult}_O(M_X^2) = \text{mult}_O((M_X|_H)^2)$$

и $O \in LCS(X, H + M_X)$, где LCS обозначает множество центров лог канонических особенностей (см. [4]). Из теоремы Шокурова о связности (см. [4]) следует, что $O \in LCS(H, M_X|_H)$.

Повторяя описанную конструкцию, мы можем считать, что X двумерно и лог пара (X, M_X) не лог канонична в точке O . Теперь утверждение следует из леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8 следует из работы [5] и леммы 2.

4. Доказательство теоремы 1, часть II. В этом пункте мы завершим доказательство теоремы 1. Воспользуемся обозначениями п. 1 и предположим, что $\lambda = 1$.

В силу предыдущего пункта, мы можем считать, что $CS(X, M_X)$ содержит многообразие S ненулевой размерности. Из работы [6] следует, что $\text{mult}_S(M_X) = 1$ и, в частности, лог пара (X, M_X) канонична.

ЛЕММА 3. Выполнено равенство $\dim(S) = N - 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: W \rightarrow X$ – раздутие общей точки многообразия S . Мы можем считать многообразие W квазипроективным. Тогда

$$a(X, M_X, E) = N - 2 - \dim(S) - \text{mult}_S(M_X) = N - 3 - \dim(S).$$

Если утверждение леммы не выполнено, то существует многообразие $T \subset E$ такое, что морфизм $f|_T: T \rightarrow S$ сюръективен,

$$T \in CS(W, f^{-1}(M_X) - a(X, M_X, E)E)$$

и, в частности,

$$\text{mult}_S(M_X) \geq \text{mult}_T(f^{-1}(M_X)) > 1.$$

Таким образом, мы можем считать, что $\dim(S) = N - 3$.

ЛЕММА 4. *Справедливо неравенство $\deg(S) \leq N$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $N = (-K_X)^{N-3} \cdot M_X^2 \geq \text{mult}_S(M_X^2) \deg(S)$.

Можно считать, что $\deg(S) \neq 1$. Следующая лемма составляет основную техническую трудность данного пункта.

ЛЕММА 5. *S содержится в линейном пространстве размерности $N - 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая пересечения с достаточно общими гиперплоскими сечениями, можно считать, что X есть гиперповерхность степени N в $\mathbb{P}^4$, содержащая кривую S такую, что

$$\text{mult}_S(M_X) = 1, \quad M_X \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_X.$$

Нам нужно показать, что кривая S содержится в плоскости. Предположим обратное и получим противоречие, воспользовавшись приемом работы [6].

Рассмотрим достаточно общий конус R_S над кривой S . Тогда

$$R_S \cdot X = S \cup \tilde{S}, \quad \deg(\tilde{S}) = (N - 1) \deg(S).$$

Из общности конуса R_S следует, что

$$\tilde{S} \not\subset \bigcup_{i=1}^n Bs(\mathcal{M}_i)$$

и кривые S и $\tilde{S}$ пересекаются в $(N - 1) \deg(S)$ различных точках (см. [6]).

С другой стороны,

$$(N - 1) \deg(S) = \deg(\tilde{S}) = \deg(M_X|_{\tilde{S}}) \geq (N - 1) \deg(S) \text{mult}_S(M_X) = (N - 1) \deg(S).$$

Следовательно, кривая $\tilde{S}$ пересекается с границей M_X только в точках $S \cap \tilde{S}$.

Заметим, что для доказательства последнего неравенства нам не понадобилась подвижность границы M_X . В частности, не существует гиперплоскостей, касающихся гиперповерхности X вдоль кривой S . Отсюда следует, что общая секущая кривой S пересекает X ровно в N точках, поскольку в противном случае она содержится в X и должна совпадать с кривой S .

Рассмотрим дивизор

$$D = \sum_{i=1}^n b_i M_i,$$

где M_i — это достаточно общий дивизор из линейной системы $\mathcal{M}_i$. По предположению

$$\text{mult}_S(D) = 1.$$

Возьмем две достаточно общие точки P_S и P_D на кривой S и дивизоре D соответственно. Рассмотрим прямую L , проходящую через точки P_S и P_D , и достаточно общую точку P на ней. Пусть $R_{S,P}$ — конус над кривой S с вершиной в точке P и

$$R_{S,P} \cdot X = S \cup \tilde{S}_P.$$

Как мы показали ранее, кривая $\tilde{S}_P$ либо содержится в дивизоре D , либо пересекается с ним только в точках $S \cap \tilde{S}_P$. По построению $P_D \in \tilde{S}_P \cap D$ и $P_D \notin S$. Следовательно, $\tilde{S}_P \subset D$ и, в частности, $L \cap X \subset D$. Поскольку последнее условие замкнутое, мы можем считать, что точка P_D принадлежит кривой S , но не совпадает с точкой P_S . Отсюда следует, что общая секущая кривой S пересекает

$$\bigcup_{i=1}^n Bs(\mathcal{M}_i)$$

в N различных точках. С другой стороны, точки пересечения последнего множества с общей гиперплоскостью должны находиться в общем положении, поскольку оно содержит кривую S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Ввиду теоремы 8 и лемм 3 и 5 мы можем считать, что $CS(X, M_X)$ содержит многообразие S размерности $N-3$, содержащееся в линейном пространстве T размерности $N-2$. В силу леммы 4 и общности гиперповерхности X мы можем считать, что $\deg(S) \in (1, N)$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{H}_T$ на гиперповерхности X , состоящий из многообразий, высекаемых гиперплоскостями, которые содержат линейное пространство T . Тогда

$$X \cdot T = S \cup \sum_{i=1}^r S_i,$$

где S_i — это неприводимые и приведенные многообразия на гиперповерхности X (приведенность всех многообразий S_i была неявно получена в доказательстве леммы 5). Нам достаточно показать, что все S_i содержатся в $CS(X, M_X)$.

Как и в доказательстве леммы 5, рассматривая пересечения с достаточно общими гиперплоскими сечениями, можно считать, что

$$\dim(X) = 3, \quad \deg(X) = N, \quad \dim(T) = 2, \quad \dim(S) = \dim(S_i) = 1 \quad \text{для } i = 1, \dots, r.$$

В этих предположениях нам достаточно показать, что для всех S_i

$$\text{mult}_{S_i}(M_X) \geq 1.$$

Рассмотрим гладкую поверхность D из пучка $\mathcal{H}_T$. Докажем, что на ней форма пересечения кривых S_i отрицательно определена. Во-первых, на поверхности D

$$\left(\sum_{i=1}^r S_i \right) \cdot S_j = (D|_D - S) \cdot S_j = \deg(S_j) - S \cdot S_j.$$

Во-вторых, на плоскости T

$$\deg(S_j) - S \cdot S_j = \deg(S_j) - \deg(S) \deg(S_j) < 0.$$

В-третьих, $(S \cdot S_j)_D = (S \cdot S_j)_T$, поскольку все кривые S_j отличны от кривой S и поверхность D гладкая. Из работы [7] следует отрицательность формы пересечения кривых S_i на поверхности D .

Дивизор

$$M_X|_D - S - \sum_{i=1}^r \text{mult}_{S_i}(M_X)S_i$$

численно эффективен на поверхности D . С другой стороны,

$$M_X|_D - S - \sum_{i=1}^r \text{mult}_{S_i}(M_X)S_i \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^r (1 - \text{mult}_{S_i}(M_X))S_i$$

и на поверхности D

$$\sum_{i=1}^r (1 - \text{mult}_{S_i}(M_X))S_i \cdot S_j \geq 0 \quad \text{для } j = 1, \dots, r.$$

Из отрицательности формы пересечения кривых S_i на поверхности D следует, что все $\text{mult}_{S_i}(M_X) \geq 1$.

5. Лог пары с размерностью Кодаиры 0. В этом пункте мы покажем, как теорема 2 выводится из теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть многообразие S есть объединение всех элементов $CS(X, M_X)$. Из теоремы 1 следует, что размерность S равна $N - 3$ и S содержится в линейном пространстве T размерности $N - 2$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{H}_T$ на гиперповерхности X , состоящий из гиперплоских сечений X , которые содержат многообразие S . Разрешим неопределенности рационального отображения $\varphi_{\mathcal{H}_T}$ посредством морфизма $f: W \rightarrow X$ такого, что многообразие W гладкое; над общей точкой каждой неприводимой компоненты многообразия S лежит ровно один дивизор и f — изоморфизм вне S . Положим

$$g = \varphi_{\mathcal{H}_T} \circ f, \quad E = f^{-1}(S).$$

Рассмотрим общий слой D морфизма g . Тогда

$$D \sim f^*(-K_X) - E - \sum_{i=1}^k a_i F_i,$$

где все $a_i \in \mathbb{N}$ и для всех дивизоров F_i $\dim(f(F_i)) \leq N - 4$.

Выполнено соотношение

$$f^{-1}(M_X)|_D \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^k c_i F_i|_D,$$

где все $c_i \in \mathbb{Q}$, откуда следует, что $f^{-1}(M_X)$ лежит в слоях морфизма g .

6. Лог пары с ненулевой размерностью Кодаиры. В этом пункте мы выведем теоремы 3 и 4 из теорем 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Будем считать, что $\kappa(X, M_X) \neq N - 1$. Из теоремы 1 вытекает, что лог пара $(X, \lambda M_X)$ канонична и $\kappa(X, \lambda M_X) = 0$. Следовательно,

$$\kappa(X, M_X) \geq \kappa(X, \lambda M_X) \geq 0.$$

Предположим, что лог пара $(X, \lambda M_X)$ терминальна. Возьмем $\delta \in \mathbb{Q} \cap (\lambda, 1)$ такое, что лог пара $(X, \delta M_X)$ также терминальна. Тогда

$$N - 1 = \kappa(X, \delta M_X) \leq \kappa(X, M_X) < N - 1.$$

Следовательно, $CS(X, \lambda M_X) \neq \emptyset$ и необходимый результат несложно следует из теорем 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. По теореме 1 лог пара $(X, \lambda M_X)$ канонична. Следовательно, лог пара (X, M_X) терминальна и $\kappa(X, M_X) = -\infty$.

Автор благодарен В. А. Исковских, А. В. Пухликову и В. В. Шокурову за интересные и плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
- [2] Чельцов И. А. Лог модели бирационально жестких многообразий // Препринт, 1998.
- [3] Kollár J. Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Astérisque. V. 211. Soc. Math. France: Montrouge, 1992.
- [4] Corti A. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // Preprint, 1998.
- [5] Пухликов А. В. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Препринт, 1997.
- [6] Пухликов А. В. Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной кватернике // Тр. МИАН. 1995. Т. 208. С. 278–289.
- [7] Artin M. On isolated rational singularities of surfaces // Amer. Math. J. 1966. V. 88. P. 129–136.

Университет им. Дж. Хопкинса, Балтимор (США)
E-mail: cheltsov@chow.mat.jhu.edu

Поступило
19.01.1999