Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Копежанова, Е. Д. Нурсултанов, Л.-Е. Перссон,
О неравенствах для преобразования Фурье функций из
пространств Лоренца, *Матем. заметки*, 2011, том 90,
выпуск 5, 785–788

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 04:08:45

О неравенствах для преобразования Фурье функций из пространств Лоренца

А. Н. Копежанова, Е. Д. Нурсултанов, Л.-Е. Перссон

1. Пусть

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx, \quad x \in \mathbb{R},$$

– преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$. Хорошо известны неравенства, связывающие интегральные свойства функций и ее преобразования Фурье.

Пусть $1 < p < 2$, $p' = p/(p-1)$ и $0 < q \leq \infty$. Тогда имеют место неравенства

$$\|\widehat{f}\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leq c_1 \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad (1)$$

$$\|\widehat{f}\|_{L_{p',q}(\mathbb{R})} \leq c_2 \|f\|_{L_{p,q}(\mathbb{R})}, \quad (2)$$

где $L_{p,q}(\mathbb{R})$ – классическое пространство Лоренца. Эти неравенства называют неравенствами Хаусдорфа–Юнга и Харди–Литтлвуда–Стейна, соответственно [1]. Имеются аналогичные неравенства для преобразования Фурье на торе $[0, 1]$, т.е. для $\widehat{f} = \{\widehat{f}_n\}$, где $\widehat{f}_n$ – коэффициенты Фурье по некоторой ортонормированной системе.

Пусть ω – неотрицательная функция на $[0, \infty)$. Обобщенное пространство Лоренца $\Lambda_q(\omega, \mathbb{R})$ – это множество всех измеримых функций f на $\mathbb{R}$ таких, что:

- если $0 < q < \infty$, то

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega, \mathbb{R})} = \left(\int_0^\infty (f^*(t)\omega(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty,$$

- если $q = \infty$, то

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega, \mathbb{R})} = \sup_{t>0} f^*(t)\omega(t),$$

где f^* – невозрастающая перестановка функции f .

В данной работе изучаются верхние и нижние оценки нормы преобразования Фурье в обобщенных пространствах Лоренца. Получены в некотором смысле обратные к (1) и (2) неравенства для преобразования Фурье на $\mathbb{R}$ и на торе $[0, 1]$.

Пусть $\delta > 0$ и $\omega(t)$ – неотрицательная функция на $[0, \infty)$. Классы функции A_δ и B_δ определим следующим образом:

$$A_\delta = \{\omega(t) : \omega(t)t^{-1/2-\delta} \text{ – возрастающая функция, } \omega(t)t^{-(1-\delta)} \text{ – убывающая функция}\},$$

$$B_\delta = \{\omega(t) : \omega(t)t^{-\delta} \text{ – возрастающая функция, } \omega(t)t^{-1+\delta} \text{ – убывающая функция}\}.$$

Тогда классы A и B определяются следующим образом:

$$A = \bigcup_{\delta>0} A_\delta, \quad B = \bigcup_{\delta>0} B_\delta.$$

Отметим, что класс B содержит в себе класс A .

Верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < q \leq \infty$ и $\omega(t)$ принадлежит классу A . Тогда имеют место следующие неравенства:

$$c_1 \|\bar{f}\|_{\Lambda_q(\omega, \mathbb{R})} \leq \|\widehat{f}\|_{\Lambda_q(\mu, \mathbb{R})} \leq c_2 \|f\|_{\Lambda_q(\omega, \mathbb{R})}, \quad (3)$$

где $\bar{f}(t) = (1/t) |\int_0^t f(s) ds|$, $\mu(t) = t\omega(1/t)$.

Неравенства в (3) и далее понимаются в том смысле, что если правая часть неравенства конечна, то и левая часть так же конечна, и выполняется соответствующее неравенство.

В частности, когда $w(t) = t^{1/p}$, $1 < p < 2$, то

$$c_1 \|\bar{f}\|_{L_{p,q}} \leq \|\hat{f}\|_{L_{p',q}} \leq c_2 \|f\|_{L_{p,q}}. \quad (4)$$

Отметим, что левое неравенство в (4) также следует из результатов работ [2], [3], где используются сетевые пространства.

Будем говорить, что функция f , определенная на $\mathbb{R}$, обобщенно-монотонная, если найдется некоторая константа $M > 0$, что верно следующее неравенство:

$$|f(x)| \leq M \frac{1}{2x} \left| \int_{-x}^x f(t) dt \right|, \quad x > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть f – обобщенно-монотонная функция, $0 < q \leq \infty$ и $\omega(t)$ принадлежит классу A . Тогда для того, чтобы $\hat{f} \in \Lambda_q(\mu, \mathbb{R})$ необходимо и достаточно, чтобы $f \in \Lambda_q(\omega, \mathbb{R})$, и выполнялось соотношение

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega, \mathbb{R})} \approx \|\hat{f}\|_{\Lambda_q(\mu, \mathbb{R})}.$$

2. Пусть f периодическая функция с периодом 1 и интегрируемая на $[0, 1]$ и $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ – ортонормированная система,

$$a_k = a_k(f) = \int_0^1 f(x) \overline{\varphi_k(x)} d\mu, \quad k \in \mathbb{N},$$

коэффициентами Фурье функции f по системе $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$.

Ортонормированную систему $\Phi = \{\phi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ назовем *регулярной*, если существует константа B такая, что:

1) для любого отрезка e из $[0, 1]$ и $k \in \mathbb{N}$ верно

$$\left| \int_e \phi_k(x) dx \right| \leq B \min \left(|e|, \frac{1}{k} \right),$$

2) для любого отрезка w из $\mathbb{N}$ и $t \in [0, 1]$

$$\left(\sum_{k \in w} \phi_k(\cdot) \right)^*(t) \leq B \min \left(|w|, \frac{1}{t} \right),$$

где $(\sum_{k \in w} \phi_k(\cdot))^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $\sum_{k \in w} \phi_k(x)$.

Примерами регулярной системы являются: все тригонометрические системы, система Волша и система Прайса и др.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ – регулярная система и $f \stackrel{\text{п.б.}}{=} \sum_{n=1}^\infty a_n \phi_n$. Пусть $0 \leq q \leq \infty$ и $\omega(t)$ принадлежит классу B . Тогда

$$\left(\int_0^1 (\bar{f}(t) \omega(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \leq c_1 \left(\sum_{k=1}^\infty (a_k^* \mu(k))^q \frac{1}{k} \right)^{1/q},$$

где $\bar{f}(t) = (1/t) |\int_0^t f(s) ds|$, $\mu(k) = k\omega(1/k)$, a_k^* – невозрастающая перестановка коэффициентов $\{a_k\}$.

Отметим, что если в теоремах 1, 2 вместо $\bar{f}(t)$ поставить $(1/t) \int_0^t |f(s)| ds$ или $|f(t)|$, или $f^*(t)$, то соответствующие неравенства не сохраняются (построены примеры).

Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *обобщенно-монотонная*, если найдется такая константа $M > 0$, что

$$|a_n| \leq M \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В работе [4] для $\omega \in A$ получено неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^* \mu(k))^q \frac{1}{k} \right)^{1/q} \leq \|f\|_{\Lambda_q(\omega, [0,1])} := \left(\int_0^1 (f^*(t) \omega(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Используя это неравенство и теорему 2, доказывается следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 \leq q \leq \infty$, $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – регулярная система, $f \stackrel{\text{п.б.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$, $\omega(t) \in B \setminus A$. Если f – обобщенно-монотонная функция либо $\{a_k\}$ – обобщенно-монотонна, то верно соотношение

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega, [0,1])} \approx \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^* \mu(k))^q \frac{1}{k} \right)^{1/q},$$

где $\mu(k) = k\omega(1/k)$.

Условие принадлежности веса ω классу $B \setminus A$ в случае $\omega(t) = t^{1/p}$ индуцирует условие $2 < p < \infty$. Таким образом, из следствия 2 следует, что при $1 < p < 2$ и при условии обобщенно-монотонности $\{a_k\}$ для $f = \sum a_k \varphi_k$ имеет место соотношение

$$\|f\|_{L_p}^p \approx \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} |a_k|. \quad (5)$$

В случае $p < 2$ построен пример тригонометрического ряда с обобщенно-монотонными коэффициентами, для которого соотношение (5) не выполняется. Это говорит о существенности условия $\omega \in B \setminus A$ (идея построения примера принадлежит М. И. Дьяченко).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – регулярная система, $1 \leq q \leq \infty$ и $f \stackrel{\text{п.б.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$. Если $\omega(t)$ принадлежит классу B , то

$$c_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\bar{a}_k \mu(k))^q \frac{1}{k} \right)^{1/q} \leq c_2 \|f\|_{\Lambda_q(\omega, [0,1])} \leq c_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|k \Delta a_k| \mu(k))^q \frac{1}{k} \right)^{1/q},$$

где $\bar{a}_k = (1/k) |\sum_{m=1}^k a_m(f)|$ и $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$ и $\mu(k) = k\omega(1/k)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – регулярная система, $f \stackrel{\text{п.б.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$ и $\omega(t)$ принадлежит классу B . Если последовательность комплексных чисел $\{a_k\}$ удовлетворяет условию: найдутся такие $C > 0$, $d \geq 1$, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| \leq C \bar{a}_{dn}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

то верно соотношение

$$\|f\|_{\Lambda_1(\omega, [0,1])} \approx \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \omega\left(\frac{1}{k}\right).$$

Заметим, что класс последовательностей, удовлетворяющих условию (6), шире класса $GM(*\beta)$, введенного в работе [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] E. M. Stein, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 482–492. [2] Е. Д. Нурсултанов, *Докл. РАН*, **361**:5 (1998), 597–599. [3] E. Nursultanov, S. Tikhonov, “Net spaces and boundedness of integral operators”, *J. Geom. Anal.*, 2010, Online First. [4] L.-E. Persson, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **27**:3–4 (1976), 267–280. [5] M. Dyachenko, S. Tikhonov, *Topics in Classical Analysis and Applications in Honor of Daniel Waterman*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, 88–101.

Е. Д. Нурсултанов

E-mail: er-nurs@yandex.ru

Поступило

18.05.2011