Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Рубинштейн, О равенстве Парсеваля для перестановок тригонометрической системы, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:29:49

О равенстве Парсеваля для перестановок тригонометрической системы

А. И. Рубинштейн

Из факта базисности тригонометрической системы в $L_p(T)$, $T \in [-\pi; \pi]$ при $p \in (1; +\infty)$, установленного в 1927 г. Риссом (см. [1; с. 593, 564]), следует справедливость равенства Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_T f \cdot g \, dx = \frac{1}{2} a_0(f) a_0(g) + \sum_{k \in N} a_k(f) a_k(g) + b_k(f) b_k(g), \quad (1)$$

где a_k, b_k – косинус- и синус-коэффициенты Фурье соответственно по тригонометрической системе, если

$$f \in L_p(T), \quad g \in L_q(T), \quad 1 < p < +\infty, \quad 1 < q = \frac{p}{p-1} < +\infty. \quad (2)$$

Так как по неравенству Гёльдера (2) влечет конечность интеграла в левой части (1), из очевидного соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_T (f(x) - S_n(f; x)) g(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_T f(x) (g(x) - S_n(g; x)) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_T f \cdot g \, dx - \left(\frac{1}{2} a_0(f) a_0(g) + \sum_{k=1}^n a_k(f) a_k(g) + b_k(f) b_k(g) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $S_n(h, x)$ – частичные суммы номера n ряда Фурье функции $h(x)$ по тригонометрической системе, из результата Рисса следует сходимость ряда в правой части (1) к нужному значению. Известно, что этот ряд суммируется к интегралу из (1) любым методом Чезаро ($C; \alpha > 0$).

В первом издании монографии Зигмунда [2] предлагалась задача построить пример пары функций $f_0 \in L_1(T)$, $g_0 \in C(T)$ (непрерывной функции), для которой ряд в (1) расходился бы и равенство Парсеваля не имело бы места. В 1956 г. (см. [1; с. 221]) Идзуми и Сато показали, что (1) справедливо при всякой ограниченной функции $g(x)$, если суммируемая $f(x)$ равномерно по x удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\delta} \int_0^\delta (f(x+t) - f(x-t)) \, dx = o\left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right), \quad \delta \rightarrow +0.$$

В [3] автор доказал следующее:

- 1) если 2π -периодические функции f, g таковы, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_1(f; \delta) \cdot \omega_\infty(g; \delta) \log \frac{1}{\delta} = 0, \quad (4)$$

где $\omega_r(h; \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \|h(x+t) - h(x)\|_{L_r(T)}$, $1 \leq r \leq +\infty$ (при $r = \infty$ используется чебышевская метрика), то (1) выполняется;

- 2) если выпуклые вверх модули непрерывности $\omega_1(\delta), \omega_\infty(\delta)$ таковы, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_1(\delta) \omega_\infty(\delta) \log \frac{1}{\delta} > 0, \quad (5)$$

а

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\omega_1(2\delta)}{\omega_1(\delta)} = 1, \quad (6)$$

то найдутся функции $f_0 \in L_1(T)$, $g_0 \in C(T)$, для которых при некотором $C > 0$

$$\omega_1(f_0; \delta) \leq C\omega_1(\delta), \quad \omega_\infty(g_0; \delta) \leq C\omega_\infty(\delta)$$

и ряд в (1) расходится (можно показать, что предел в (5) возможно заменить на верхний предел, а условие (6) отбросить); в [4] автор доказал аналогичный результат для рядов по системам характеров нуль-мерных компактных абелевых групп – мультипликативным системам.

В связи с работами [3], [4] в беседе с автором П. Л. Ульянов спросил: не будут ли справедливы аналогичные результаты для всякой ограниченной в совокупности ПОНС? Требование ограниченности системы очевидно – для системы Хаара равенство Парсеваля выполнено для любой пары функций из L_1 и L_∞ соответственно. О некоторых простых наблюдениях в связи с вопросом П. Л. Ульянова и пойдет речь ниже.

Если в (3) вместо тригонометрической системы рассматривать произвольную ограниченную ПОНС, то выполнение равенства Парсеваля для любой пары функций $f \in L_p$, $1 < p < +\infty$, $g \in L_q$, $1 < q = p/(p-1) < +\infty$, означает слабую сходимость в L_p последовательности $\{S_n(f; x)\}$ (и $\{S_n(g; x)\}$ в L_q) частичных сумм ряда Фурье по выбранной ПОНС. По критерию слабой сходимости (следствию теоремы Банаха – Штейнгауза) тогда

$$\sup_n \|S_n(f; x)\|_{L_p} < \infty.$$

Но Гапошкин в [5] показал, что в L_p , $p \in (1; 2) \cup (2; +\infty)$, нет ограниченных безусловных базисов. В частности, для любой ограниченной ПОНС в таком L_p существует перестановка $\sigma: n \rightarrow n_k$ и функция f_p , что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|S_m(f_p; x)\|_{L_p} = \infty,$$

где $S_m(f_p; x)$ – частичная сумма номера m функции f_p по переставленной ПОНС.

Следовательно, для $p \in (1; 2)$ найдется такая пара функций $f_p \in L_p$, $g_q \in L_q$, $q = p/(p-1)$ и перестановка σ тригонометрической системы, что равенство Парсеваля для произведения $f_p \cdot g_q$ не выполняется по переставленной системе. (При $p \in (1; 6/5)$ для перестановки тригонометрической системы частный случай результата Гапошкина был в 1936 г. установлен Марцинкевичем (см. обзорную статью Р. С. Гутера и П. Л. Ульянова в книге [6; с. 358–364]).

Известно (см., например, [1; с. 83]), что ряд Фурье функции

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \int_T f(x+y)g(y) dy$$

имеет вид

$$\frac{1}{2} a_0(f)a_0(g) + \sum_{k \in N} (a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)) \cos kx + (b_k(f)a_k(g) - a_k(f)b_k(g)) \sin kx.$$

Легко видеть (это было сделано и в [3]), что

$$|G(x+2h) - 2G(x+h) + G(x)| \frac{1}{\pi} \int_T |f(x+2h+y) - f(x+h+y)| \cdot |g(y+h) - g(y)| dy,$$

откуда для $0 \leq |h| \leq \delta$ по неравенству Гёльдера и инвариантности относительно сдвига

$$\begin{aligned} |G(x+2h) - 2G(x+h) + G(x)| &\leq \|f(x+h) - f(x)\|_{L_p(T)} \cdot \|g(x+h) - g(x)\|_{L_q(T)} \\ &\leq \omega(f; \delta)_{L_p(T)} \cdot \omega(g; \delta)_{L_q(T)}. \end{aligned}$$

По теореме Саса (см. [1; с. 612]) из последней оценки следует, что условие

$$\sum_{n \in N} \omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_p(T)} \omega\left(g; \frac{1}{n}\right)_{L_q(T)} \cdot n^{-1/2} < \infty \quad (7)$$

гарантирует абсолютную сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $G(x)$, так что

$$\sum_{k \in N} |a_{n_k}(f)a_{n_k}(g) + b_{n_k}(f)b_{n_k}(g)| = \sum_{k \in N} |a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)| < \infty, \quad (8)$$

откуда получаем выполнение равенства Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_T f \cdot g \, dx = \sum_{k \in N} a_{n_k}(f)a_{n_k}(g) + b_{n_k}(f)b_{n_k}(g) \quad (9)$$

для любой перестановки σ тригонометрической системы.

С другой стороны, выполнение (9) для любой перестановки σ влечет (8) – абсолютную сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $G(x)$.

Условие (7) в некотором смысле точное для выполнения равенства Парсеваля для всех перестановок тригонометрической системы. Об этом говорит следующий пример.

Пусть

$$f_0(x) = \sum_{n \in N} n^{-\beta} (\cos nx - \sin nx), \quad 0 < \beta < 1.$$

В 1917 г. Вейль (см. [7; с. 118–119, 298]) показал, что

$$f_0(x) \simeq |x|^{\beta-1} \Gamma(1-\beta) \left(\sin \frac{\pi\beta}{2} - (\operatorname{sgn} x) \cos \frac{\pi\beta}{2} \right), \quad x \rightarrow 0.$$

Для $p \in (1; 2)$ выберем $\beta \in (0; 1/2)$, так что $p(1-\beta) < 1$ равносильно $1 - 1/p < \beta < 1/2$. Тогда $f_0(x) \in L_p(T)$. 2π -периодическая функция

$$g_0(x) = \sum_{n \in N} n^{-1+\beta} (\cos(nc \ln n) \cos nx - \sin(nc \ln n) \sin nx)$$

(C – постоянная), как установили в 1916 г. Харди и Литтлвуд (см. [7; с. 317]), принадлежит классу $\operatorname{Lip}(1/2 - \beta)$ и заведомо суммируема в степени $q = p/(p-1)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_T f_0(x+y) g_0(x) \, dx \\ &= \sum_{n \in N} n^{-1} ((\cos(nc \ln n) + \sin(nc \ln n)) \cos nx + (\sin(nc \ln n) - \cos(nc \ln n)) \sin nx) \end{aligned} \quad (10)$$

и ряд в правой части абсолютно расходится ([7; с. 387]). Это иной пример к теореме С. Н. Бернштейна 1914 г. о существовании функции из $\operatorname{Lip} 1/2$ с абсолютно расходящимся тригонометрическим рядом Фурье (см. [7; с. 618–624]). Для произвольных ПОНС подобный факт в 1964 г. установил Б. С. Митягин.

Очевидно, что

$$\sum_{n \in N} \omega\left(f_0; \frac{1}{n}\right)_{L_p(T)} \cdot \omega\left(g_0; \frac{1}{n}\right)_{L_q(T)} \cdot n^{-1/2} = \infty.$$

В противном случае по (7), (8) ряд Фурье (10) функции $G(x)$ сходил бы абсолютно. Это указывает на окончательность, в некотором смысле, условия (7) для выполнения равенства Парсеваля для произведения функции $f \in L_p(T)$ на функцию $g \in l_q(T)$, $q = p/(p-1)$, при всех перестановках тригонометрической системы.

Условие, аналогичное (7), гарантирует выполнение равенства Парсеваля для всех перестановок мультипликативных систем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961. [2] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Гостехиздат, М., 1939. [3] А. И. Рубинштейн, *Изв. вузов. Матем.*, 1978, № 6, 102–108. [4] А. И. Рубинштейн, *УМН*, **35**:4 (1980), 207–208. [5] В. Ф. Гапошкин, *УМН*, **13**:4 (1958), 179–184. [6] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958. [7] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.

А. И. Рубинштейн

E-mail: caf_math@ngul.ac.ru

Поступило

26.04.2011