Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Н. Шитов, О матрицах с различными тропическим рангом и рангом Капранова, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:37:12

О матрицах с различными тропическим рангом и рангом Капранова

Я. Н. Шитов

Основным объектом тропической математики является *тропическое полукольцо*, т.е. множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел с операциями тропического сложения, $\oplus$, и тропического умножения, $\otimes$, определяемыми как $a \oplus b = \min\{a, b\}$, $a \otimes b = a + b$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$. Заметим, что элемент $0 \in \mathbb{R}$ нейтрален относительно тропического умножения. Тропическая математика получается из традиционной как результат деквантования Маслова (см. [1]–[3]). Методы тропической математики оказываются полезными для многочисленных приложений (см. [4]–[6]), применяются в алгебраической геометрии (см. [7], [8]). Большой интерес вызывает понятие ранга тропических матриц (см. [4], [9], [10]). В отличие от случая матриц над полем имеется множество различных ранговых функций для тропических матриц, многие из них описаны в работах [4], [9], [10]. Данная заметка посвящена понятиям тропического ранга и ранга Капранова.

Мы будем использовать символ $\mathbb{F}$ как обозначение поля, $\mathbb{F}^*$ – обозначение множества ненулевых элементов $\mathbb{F}$. Через a_{ij} мы обозначаем элементы матрицы A , через $A^{(j)}$ – ее j -й столбец, через $A_{(i)}$ – i -ю строку, через A^T – матрицу, транспонированную к A . Подматрица матрицы A , образованная ее строками с номерами $r_1, \dots, r_k$, обозначается через $A[r_1, \dots, r_k]$, подматрица матрицы $A[r_1, \dots, r_k]$, образованная ее столбцами с номерами $c_1, \dots, c_l$, – через $A[r_1, \dots, r_k | c_1, \dots, c_l]$.

Через $\mathbf{H}_{\mathbb{F}}$ мы обозначаем поле (см. [11]), состоящее из формальных сумм вида $a(t) = \sum_{e \in \mathbb{R}} a_e t^e$, где t – переменная, коэффициенты $\{a_e\}$ принадлежат полю $\mathbb{F}$, а носитель $E(a) = \{e \in \mathbb{R} : a_e \neq 0\}$ является вполне упорядоченным подмножеством множества $\mathbb{R}$, т.е. любое непустое подмножество множества $E(a)$ содержит наименьший элемент. Степенью элемента $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^*$ называется показатель степени его *главного члена*, т.е. $\deg a = \min E(a)$. Элемент $a_0 \in \mathbb{F}$ называется *свободным членом* a . Степень нулевого элемента поля $\mathbf{H}_{\mathbb{F}}$ полагается равной $+\infty$. Матрица, полученная из матрицы $A \in (\mathbf{H}_{\mathbb{F}}^*)^{m \times n}$ поэлементным применением отображения $\deg$, также обозначается через $\deg A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Теперь мы можем определить понятие ранга Капранова (см. [9; следствие 3.4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ранг Капранова матрицы $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ относительно базового поля $\mathbb{F}$, $K_{\mathbb{F}}(B)$, есть $\min\{\text{rank}(A) \mid A \in (\mathbf{H}_{\mathbb{F}}^*)^{m \times n}, \deg A = B\}$, где $\text{rank}(A)$ – классический ранг матрицы A с элементами из поля $\mathbf{H}_{\mathbb{F}}$.

Тропический перманент матрицы $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ определяется как

$$\text{perm}(B) = \min_{\sigma \in S_n} \{b_{1, \sigma(1)} + \dots + b_{n, \sigma(n)}\}, \quad (1)$$

где через S_n обозначена симметрическая группа множества $\{1, \dots, n\}$. Матрица B называется *тропически вырожденной*, если минимум в выражении (1) достигается, по крайней мере, дважды. В противном случае матрица B называется *тропически невырожденной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тропический ранг матрицы $M \in \mathbb{R}^{d \times n}$, $\text{trop}(M)$, есть размер ее наибольшей тропически невырожденной квадратной подматрицы.

Следующее утверждение следует непосредственно из определений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Значения $\text{trop}(A)$ и $K_{\mathbb{F}}(A)$ инвариантны относительно прибавления фиксированного числа к каждому элементу некоторой строки или столбца тропической матрицы A , что соответствует тропическому умножению строки или столбца этой матрицы на константу.

Множество всех $i \in \{1, \dots, m\}$, на которых достигается $\min_{i=1}^m \{a_i + b_i\}$, обозначается через $\Theta(a, b)$, где $a, b \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^m$. Система строк матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется *тропически линейно зависимой*, если найдется вектор $\lambda \in \mathbb{R}^m$, для которого $|\Theta(\lambda, A^{(j)})| \geq 2$ при каждом $j \in \{1, \dots, n\}$. В этом случае мы говорим, что вектор λ *реализует тропическую зависимость* строк матрицы A . Важную роль играет следующая теорема (см. [12; теорема 5.11]).

ТЕОРЕМА 4. *Тропический ранг матрицы равен размеру самой большой тропически линейно независимой подсистемы системы ее строк.*

Девелин, Сантос и Штурмфельс сформулировали следующий вопрос.

ВОПРОС 5 [9; раздел 8, вопрос (6)]. Существует ли матрица размера 5×5 с тропическим рангом 3 и рангом Капранова 4?

Чан, Йенсен и Рубей показали (см. [13; следствие 1.5]), что $\text{trop}(A) = K_{\mathbb{C}}(A)$ для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{5 \times n}$; их результат дает ответ на вопрос 5 в случае, когда ранг Капранова понимается в смысле базового поля $\mathbb{C}$. Тем не менее, в работе [9] ранг Капранова рассматривается в случае произвольного базового поля $\mathbb{F}$, см. [9; определение 3.9]. В нашей заметке мы рассматриваем этот случай и даем общий ответ на вопрос 5. Мы показываем, что если $|\mathbb{F}| \geq 4$, а матрица $B \in \mathbb{R}^{5 \times n}$ такова, что $\text{trop}(B) \leq 3$, то $K_{\mathbb{F}}(B) \leq 3$. Кроме того, мы приводим примеры матриц размера 5×5 с тропическим рангом 3 и рангом Капранова 4 в случае базовых полей $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$. Докажем следующие леммы, полезные для доказательства основного результата.

ЛЕММА 6. Пусть $|\mathbb{F}| \geq 4$, $S \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^{2 \times 2}$. Тогда найдется $\xi \in \mathbb{F}^*$, для которого

$$\deg(\xi s_{i1} + s_{i2}) = \min\{\deg s_{i1}, \deg s_{i2}\} \quad \text{при } i \in \{1, 2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $s_{ij} \neq 0$, то через s_{ij} мы обозначим коэффициент главного члена элемента s_{ij} . Если же $s_{ij} = 0$, определим $\sigma_{ij} \in \mathbb{F}^*$ произвольно. Теперь достаточно выбрать $\xi \in \mathbb{F} \setminus \{0, -\sigma_{12}/\sigma_{11}, -\sigma_{22}/\sigma_{21}\}$.

ЛЕММА 7. Пусть $|\mathbb{F}| \geq 4$. Пусть матрица $A \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^{5 \times 2}$ такова, что $\text{rank}(A) = 2$ и

$$\deg(a_{p1}a_{q2} - a_{q1}a_{p2}) = \min\{\deg a_{p1} + \deg a_{q2}, \deg a_{q1} + \deg a_{p2}\}$$

для любых различных $p, q \in \{1, \dots, 5\}$. Пусть $B \in \mathbb{R}^{5 \times n}$, положим

$$\Theta_{1j} = \Theta(\deg A^{(1)}, B^{(j)}), \quad \Theta_{2j} = \Theta(\deg A^{(2)}, B^{(j)}) \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Пусть $|\Theta_{1j}| \geq 2$, $|\Theta_{2j}| \geq 2$, $|\Theta_{1j} \cup \Theta_{2j}| \geq 3$ при любом j . Тогда $K_{\mathbb{F}}(B) \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное $j \in \{1, \dots, n\}$, обозначим

$$\theta_1 = \min_{i=1}^5 \{\deg a_{i1} + b_{ij}\}, \quad \theta_2 = \min_{i=1}^5 \{\deg a_{i2} + b_{ij}\}.$$

Условия леммы позволяют считать, не ограничивая общности, что $1 \in \Theta_{1j}$, $2 \in \Theta_{2j}$, а также, что Θ_{1j} и Θ_{2j} имеют непустые пересечения с множеством $\{3, 4, 5\}$. В этом случае

$$\min_{\iota=3}^5 \{\deg \det A[1, \iota] + b_{1j} + b_{\iota j}\} = \min_{\iota=3}^5 \{\deg \det A[2, \iota] + b_{2j} + b_{\iota j}\} = \theta_1 + \theta_2.$$

Из леммы 6 теперь следует, что при некоторых $\xi_3, \xi_4, \xi_5 \in \mathbb{F}^*$ верно, что

$$\deg \left(\sum_{\iota=3}^5 \det A[1, \iota] t^{b_{1j} + b_{\iota j}} \xi_{\iota} \right) = \deg \left(\sum_{\iota=3}^5 \det A[2, \iota] t^{b_{2j} + b_{\iota j}} \xi_{\iota} \right) = \theta_1 + \theta_2. \quad (2)$$

Из формул Крамера следует, что решение (x_1, x_2) системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}t^{b_{1j}}x_1 + a_{21}t^{b_{2j}}x_2 = \sum_{\iota=3}^5 \xi_{\iota}a_{\iota 1}t^{b_{\iota j}}, \\ a_{12}t^{b_{1j}}x_1 + a_{22}t^{b_{2j}}x_2 = \sum_{\iota=3}^5 \xi_{\iota}a_{\iota 2}t^{b_{\iota j}} \end{cases} \quad (3)$$

таково, что выполнено $\deg x_1 = \deg x_2 = 0$. Положим $c_{1j} = x_1 t^{b_{1j}}$, $c_{2j} = x_2 t^{b_{2j}}$, $c_{\iota j} = -\xi_{\iota} t^{b_{\iota j}}$ при $\iota \in \{3, 4, 5\}$. Равенства (3) показывают, что $\sum_{i=1}^5 a_{i1}c_{ij} = \sum_{i=1}^5 a_{i2}c_{ij} = 0$. Пользуясь произвольностью выбора $j \in \{1, \dots, n\}$, строим матрицу C такую, что $B = \deg C$, а строки $\sum_{i=1}^5 a_{i1}C_{(i)}$ и $\sum_{i=1}^5 a_{i2}C_{(i)}$ нулевые. Из определения 1 теперь следует, что $K_{\mathbb{F}}(B) \leq 3$.

ЛЕММА 8. Если $|\mathbb{F}| \geq 4$, элементы матрицы $B \in \mathbb{R}^{5 \times n}$ неотрицательны, а каждый ее столбец содержит не менее трех нулей, то $K_{\mathbb{F}}(B) \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем различные $\eta, \zeta \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$ и положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \eta & \zeta & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^{5 \times 2}.$$

Теперь результат следует из леммы 7.

ЛЕММА 9. Пусть элементы матрицы $B \in \mathbb{R}^{5 \times n}$ неотрицательны и

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{matrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline B' & \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ \alpha_1 \dots \alpha_p \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ \beta_1 \dots \beta_q \\ 0 \dots 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \gamma_1 \dots \gamma_r \\ 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{matrix} \end{array} \right), \quad (4)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_v \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_s$

где $v > 0$, $p > 0$, $q + r + s > 0$, какая-то из матриц B' и $(B_1 | \dots | B_4)$ состоит из положительных элементов, числа $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \gamma_1, \dots, \gamma_r$ положительны. Пусть $|\mathbb{F}| \geq 4$, $\text{trop}(B) \leq 3$. Тогда $K_{\mathbb{F}}(B) \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного.

1. Предположим, что матрица B удовлетворяет условию леммы и такова, что $K_{\mathbb{F}}(B) > 3$. Можно считать, не ограничивая общности, что значение $p + q + r + s$ минимально среди всех матриц с таким свойством.

2. Обозначим минимальный элемент матрицы $(B_1 | \dots | B_4)$ через m . Прибавим $-m$ к каждому элементу первых двух строк матрицы B , m — к каждому элементу первых v столбцов. Таким образом, согласно утверждению 3 можно считать, не ограничивая общности, что матрица B' состоит из положительных элементов и $m = 0$.

3. Пусть каждая из матриц B_2 и B_3 содержит столбец без нулей (номера этих столбцов обозначим через j_1 и j_2). Пункты 1 и 2 показывают, что для некоторого $j_3 \in \{1, \dots, n\}$ верно, что или $b_{1j_3} = 0$, $b_{2j_3} > 0$, или $b_{1j_3} > 0$, $b_{2j_3} = 0$. Заметим, что в этом случае матрица $B[1, 2, 3, 4 | 1, j_1, j_2, j_3]$ тропически невырождена. Из определения 2 следует, что $\text{trop}(B) \geq 4$, что противоречит условию леммы. Таким образом, можно считать, не ограничивая общности, что любой столбец матрицы B_3 содержит нулевой элемент.

4. Согласно теореме 4 найдутся $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5), (\mu_1, \mu_3, \mu_4, \mu_5) \in \mathbb{R}^4$, реализующие тропическую зависимость строк матриц $B[1, 2, 4, 5]$ и $B[1, 3, 4, 5]$ соответственно. Положим $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, +\infty, \lambda_4, \lambda_5)$, $M = (\mu_1, +\infty, \mu_3, \mu_4, \mu_5)$, имеем $\Theta(\Lambda, B^{(j)}) \geq 2$, $\Theta(M, B^{(j)}) \geq 2$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$. Из равенства (4) тогда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 \leq \min\{\lambda_4, \lambda_5\}$,

$\mu_3 = \mu_4 \leq \mu_5$, $\mu_4 < \mu_1$. Теперь легко видеть, что $|\Theta(\Lambda, B^{(j)}) \cup \Theta(M, B^{(j)})| \geq 3$ для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$. Наконец, положим

$$A = \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & t^{\lambda_2} & 0 & t^{\lambda_4} & t^{\lambda_5} \\ t^{\mu_1} & 0 & t^{\mu_3} & t^{\mu_4} & \eta t^{\mu_5} \end{pmatrix}^T \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^{5 \times 2},$$

где $\eta \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$. Доказательство завершается применением леммы 7.

Теперь мы можем доказать один из основных результатов нашей заметки.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $C \in \mathbb{R}^{5 \times n}$, $\text{trop}(C) \leq 3$, $|\mathbb{F}| \geq 4$. Тогда $K_{\mathbb{F}}(C) \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из теоремы 4 следует, что строки матрицы C тропически линейно зависимы. Применяя утверждение 3, считаем, не ограничивая общности, что матрица C состоит из неотрицательных чисел и каждый ее столбец содержит, по крайней мере, два нуля.

2. Пусть минимальный элемент i -й строки матрицы C равен h_i . При каждом $i \in \{1, \dots, 5\}$ прибавим $(-h)$ к каждому элементу i -й строки матрицы C , полученную матрицу обозначим через B . Теперь каждая строка матрицы B содержит, по крайней мере, один нуль. В силу пункта 1, элементы матрицы B неотрицательны и каждый ее столбец содержит, по крайней мере, два нуля.

3. В силу утверждения 3 $K_{\mathbb{F}}(B) = K_{\mathbb{F}}(C)$, $\text{trop}(B) \leq 3$.

4. Если в каждом столбце матрицы B содержится по крайней мере три нуля, то согласно лемме 8 $\text{trop}(B) \leq 3$. Считаем далее, что $b_{11} = b_{21} = 0$, а элементы b_{31} , b_{41} , b_{51} положительны. Возможны три случая.

Случай 1. Пусть некоторый столбец матрицы $B[3, 4, 5]$ содержит ровно один нулевой элемент. Считаем для определенности, что $b_{32} = 0$, $b_{42} > 0$, $b_{52} > 0$. Предположим, что $b_{i'j'} = 0$, $b_{i''j''} > 0$ для некоторых $i', i'' \in \{4, 5\}$, $j' \in \{1, \dots, n\}$. Согласно пункту 2 существует $j'' \in \{1, \dots, n\}$, для которого $b_{i''j''} = 0$. Заметим, что матрица $B[2, 3, 4, 5 | 1, 2, j', j'']$ тропически невырождена, т.е. $\text{trop}(B) \geq 4$, что противоречит пункту 3.

Противоречие показывает, что для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ верно или $b_{4j} = b_{5j} = 0$, или $b_{4j}, b_{5j} > 0$. В этом случае матрица B удовлетворяет условиям леммы 9 с точностью до перестановки строк и столбцов.

Случай 2. Если некоторый столбец матрицы $B[3, 4, 5]$ содержит ровно два нуля, и нет столбца, содержащего ровно один нуль, то матрица B удовлетворяет условиям леммы 9 с точностью до перестановки столбцов.

Случай 3. Наконец, предположим, что для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ верно или $b_{3j} = b_{4j} = b_{5j} = 0$, или $b_{3j}, b_{4j}, b_{5j} > 0$. Рассмотрим множество G , состоящее из всех j , для которых среди элементов b_{3j} , b_{4j} , b_{5j} есть различные. Если G пусто, то строки матрицы $B[3, 4, 5]$ совпадают, и тогда $K_{\mathbb{F}}(B) \leq 3$.

Если же G непусто, положим $m = \min_{j \in G} \{b_{3j}, b_{4j}, b_{5j}\}$. Прибавим $(-\min\{m, b_{3j}\})$ к каждому элементу j -го столбца матрицы B (при всех $j = 1, \dots, n$), прибавим m к каждому элементу первых двух строк матрицы B . Заметим, что полученная матрица удовлетворяет либо условиям леммы 8, либо случая 1, либо случая 2 с точностью до перестановки столбцов. Согласно утверждению 3 полученная матрица имеет такие же тропический ранг и ранг Капранова, как матрица B .

Итак, $K_{\mathbb{F}}(B) \leq 3$. В силу пункта 3 $K_{\mathbb{F}}(C) \leq 3$. Теорема доказана.

Покажем теперь существенность условия $|F| \geq 4$ в теореме 10.

ПРИМЕР 11. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\text{trop}(B) = \text{trop}(D) = 3$, $K_{\mathbb{F}_3}(B) = K_{\mathbb{F}_2}(D) = 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя определение 2, получаем $\text{trop}(B) = \text{trop}(D) = 3$. Заметим, что если матрица $C \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}_2}^{5 \times 5}$ такова, что $D = \deg C$, то $\deg \det C[1, 2, 3, 5 | 1, 2, 3, 5] = 0$. Таким образом, $K_{\mathbb{F}_2}(D) \geq 4$. С другой стороны, матрица D содержит повторяющиеся строки, поэтому, на самом деле, $K_{\mathbb{F}_2}(D) = 4$.

Пусть матрица $A' \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}_3}^{5 \times 5}$ такова, что $B = \deg A'$. Умножая строки и столбцы матрицы A' на элементы нулевой степени, будем считать, что если $i = 4$ или $j = 4$, то $a'_{ij} = t^{b_{ij}}$. Заметим, что если $\det A'[p, q, 4, 5 | p, q, 4, 5] = 0$ при любых различных $p, q \in \{1, 2, 3\}$, то элементы a_{pq} имеют свободные члены, равные -1 . В этом случае $\deg \det A'[1, 2, 3, 5 | 1, 2, 3, 5] = 0$. Таким образом, $K_{\mathbb{F}_3}(B) \geq 4$. С другой стороны, положив $a_{ij} = t^{b_{ij}}$ при $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^2 \setminus \{(4, 2), (4, 3)\}$ и $a_{42} = a_{43} = 2 + 2t$, заметим, что строка $A_{(2)} + A_{(3)} + A_{(4)}$ нулевая и $\deg A = B$. Согласно определению 1 $K_{\mathbb{F}_3}(B) = 4$.

Теперь мы можем дать полный ответ на вопрос 5.

ТЕОРЕМА 12. Матрица $B \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, для которой $\text{trop}(B) = 3$ и $K_{\mathbb{F}}(B) = 4$, существует в том и только том случае, если $|\mathbb{F}| \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 10 и примера 11.

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Л. Литвинов, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. XIII*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **326**, ПОМИ, СПб., 2005, 145–182.
 [2] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, *Idempotency*, Publ. Newton Inst., **11**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, 420–443. [3] В. П. Маслов, *УМН*, **42:3** (1987), 39–48. [4] M. Akian, S. Gaubert, A. Guterman, *Tropical and Idempotent Mathematics*, Contemp. Math., **495**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 1–38. [5] F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems*, Wiley Ser. Probab. Math. Statist. Probab. Math. Statist., John Wiley & Sons, Chichester, 1992. [6] B. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude, *Max Plus at Work. Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and its Applications*, Princeton Ser. Appl. Math., Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2006. [7] M. Einsiedler, M. Kapranov, D. Lind, *J. Reine Angew. Math.*, **601** (2006), 139–157. [8] G. Mikhalkin, “Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry”, *Different Faces of Geometry*, Int. Math. Ser. (N. Y.), **3**, Kluwer Acad. Publ., New York, 2004, 257–300. [9] M. Develin, F. Santos, B. Sturmfels, *Combinatorial and Computational Geometry*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **52**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 213–242. [10] L. B. Beasley, A. E. Guterman, *J. Korean Math. Soc.*, **42:2** (2005), 223–241. [11] B. Poonen, *Enseign. Math.* (2), **39:1-2** (1993), 87–106. [12] Z. Izhakian, *Tropical and Idempotent Mathematics*, Contemp. Math., **495**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 173–191. [13] M. Chan, A. N. Jensen, E. Rubei, *Linear Algebra Appl.*, **435:7** (2011), 1598–1611.

Я. Н. Шитов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: yaroslav-shitov@yandex.ru

Поступило

25.10.2011