Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Быковская, Критерий целочисленной эквивалентности двух обобщенных выпуклых целочисленных многогранников, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 648–660

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:11:25

Критерий целочисленной эквивалентности двух обобщенных выпуклых целочисленных многогранников

А. В. Быковская

В работе вводится понятие и формулируется критерий целочисленной эквивалентности двух многогранников, обладающих рядом специальных свойств. К категории рассматриваемых многогранников относятся также полиэдры Клейна, представляющие собой выпуклые оболочки ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^3$, содержащихся внутри некоторого 3-мерного симплицального конуса с вершиной в начале координат, поэтому критерий позволяет улучшить некоторые связанные с ними результаты. В частности, в данной работе предлагается упрощение формулировки геометрического аналога теоремы Лагранжа для цепных дробей в трехмерном случае.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm9274

1. Введение. В данной работе исследуется задача о целочисленной эквивалентности двух комбинаторно эквивалентных обобщенных целочисленных выпуклых многогранников. *Выпуклым многогранником* называется любое ограниченное пересечение полупространств в $\mathbb{R}^3$; *обобщенным выпуклым многогранником* называется множество, пересечение которого с любым выпуклым многогранником является выпуклым многогранником, а под *целочисленным многогранником* будем понимать многогранник с вершинами в целых точках. Два целочисленных обобщенных многогранника будем называть *целочисленно эквивалентными*, если существует оператор из $SL_3(\mathbb{Z})$, который переводит один из этих многогранников в другой.

В качестве примера обобщенного целочисленного выпуклого многогранника можно рассмотреть так называемый полиэдр Клейна. Определим n -мерный симплицальный конус как множество точек

$$\left\{ a + \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i : \lambda_i \geq 0, u_i \in U \right\},$$

где $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ – набор из n линейно независимых векторов пространства $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ – вершина конуса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $C \subset \mathbb{R}^3$ – 3-мерный симплицальный конус с вершиной в начале координат O . Выпуклая оболочка K ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^3$,

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-1226.2010.1.

содержащихся в C , называется *полиэдром Клейна*, соответствующим решетке $\mathbb{Z}^3$ и конусу C .

В [1] формулируется критерий, когда полиэдр Клейна является обобщенным многогранником. В частности, он представляет собой обобщенный многогранник, когда конус C иррационален, т.е. когда в плоскостях граней конуса нет точек решетки кроме 0. Доказав утверждение для обобщенных многогранников, мы получим также важное следствие для полиэдров Клейна.

В случае, если в качестве конуса C берется собственный конус гиперболического оператора A (т.е. оператора из $SL_3(\mathbb{Z})$, характеристический многочлен которого неприводим над $\mathbb{Q}$ и все корни которого суть положительные вещественные числа), как показано в работе [2], в силу теоремы Дирихле о единицах группа операторов, коммутирующих с A (C также является для них собственным), изоморфна $\mathbb{Z}^2$. Фактормножество границы полиэдра Клейна по действию этой группы представляет собой тор. Таким образом, целочисленная структура границы полиэдра Клейна в этом случае периодична и полностью описывается индуцированной структурой соответствующих торов.

В двумерном случае выполняется критерий (геометрический аналог теоремы Лагранжа, сформулированный в [3]) об эквивалентности утверждений:

- (1) угол K инвариантен относительно действия некоторого оператора из $SL_2(\mathbb{Z})$ с различными действительными положительными собственными значениями (а значит, соответствующий оператор переводит полигон Клейна в себя);
- (2) комбинаторная структура границы полигона Клейна, соответствующего углу K , оснащенная целочисленными длинами сторон и целочисленными углами между соседними сторонами, периодична.

При этом под *целочисленной длиной* отрезка, концы которого – целочисленные точки, понимается число, на единицу большее количества целочисленных точек, содержащихся во внутренности этого отрезка. *Целочисленным углом* между двумя такими отрезками с общей вершиной называется число, равное отношению площади параллелограмма, натянутого на отрезки, к произведению их целочисленных длин.

Критерий, доказываемый в данной работе, предлагает аналогичные целочисленные характеристики в трехмерном случае и позволяет упростить формулировку теоремы Лагранжа, предложенную в [4]. Этот результат будет сформулирован ниже.

2. Формулировка основного результата. Пусть заданы 2 обобщенных целочисленных выпуклых многогранника M_1 и M_2 , и между ними существует комбинаторный изоморфизм, сохраняющий ориентацию. Требуется выяснить, найдется ли оператор, переводящий один из этих многогранников в другой.

Рассмотрим многогранник K и граф $\mathcal{G}_1(K)$ – одномерный остов K . По индукции будем обозначать $\mathcal{G}_{k+1}(K)$ реберный граф графа $\mathcal{G}_k(K)$. Заметим, что вершина графа $\mathcal{G}_k(K)$ представляет собой цепочку длины k вершин многогранника K , последовательно соединенных ребрами. Если две вершины графа $\mathcal{G}_k(K)$ соединены ребром, то объединение вершин многогранника, образующих эти две вершины, образует вершину графа $\mathcal{G}_{k+1}(K)$. Рассмотрим вершину графа $\mathcal{G}_3(K)$. Она состоит из *центральной* и двух *боковых* вершин многогранника, причем каждая из боковых вершин соединяется ребром с центральной (каждое из этих ребер также будем называть *боковым*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Реберной звездой вершины* назовем объединение всех ребер, инцидентных ей.

Будем рассматривать центральную и боковые вершины вместе с их реберными звездами (рис. 1). Центральную и боковые вершины будем также называть *главными*, а вершины, находящиеся на концах ребер реберных звезд главных вершин (не совпадающие с главными), назовем *дополнительными*. Назовем полученную конструкцию *тройкой вершин*. Таким образом, тройка вершин представляет собой объединение реберных звезд вершин многогранника, образующих некоторую вершину графа $\mathcal{G}_3(K)$.

Рис. 1. Пример тройки вершин $\{P_1, P_2, P_3\}$

Каждой тройке вершин M_1 в силу комбинаторного изоморфизма многогранников соответствует тройка вершин M_2 , назовем их *парными*. Аналогично, каждой вершине M_1 соответствует парная вершина M_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что оператор A переводит тройку вершин V многогранника M_1 в парную тройку вершин V' многогранника M_2 , если он отображает все вершины и ребра V во все вершины и ребра V' , причем главные вершины отображаются в главные.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для каждой тройки вершин M_1 существует оператор из $SL_3(\mathbb{Z})$, переводящий ее в парную тройку вершин M_2 . Тогда существует единый оператор из $SL_3(\mathbb{Z})$, переводящий M_1 в M_2 .

На самом деле, достаточно рассмотреть не все тройки, а лишь их часть.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Расстоянием* между двумя ребрами a и b реберной звезды некоторой вершины назовем количество ребер (этой реберной звезды), которые нужно пройти при последовательном обходе ребер этой реберной звезды от ребра a до ребра b . Сами ребра a и b при подсчете не учитываются.

Пример: на рис. 1 расстояние между боковыми ребрами равно 1 или 2 в зависимости от направления обхода. *Минимальным* расстоянием назовем наименьшую из двух полученных величин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем тройку вершин *тройкой типа I*, если минимальное расстояние между ее боковыми ребрами равно 0. Назовем тройку вершин *тройкой типа II*, если минимальное расстояние между ее боковыми ребрами равно 1.

Таким образом, сформулируем более сильное утверждение, которое и будем доказывать.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для каждой тройки вершин типов I и II M_1 существует оператор из $SL_3(\mathbb{Z})$, переводящий ее в парную тройку вершин M_2 . Тогда существует единый оператор из $SL_3(\mathbb{Z})$, переводящий M_1 в M_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенные выше определения и утверждения формулируются для “целочисленного” случая, хотя доказательство остается верным и для обобщенных выпуклых многогранников, не являющихся целочисленными, и, соответственно, операторов из $SL_3(\mathbb{R})$. Предпочтение “целочисленной” формулировке объясняется значимостью результата в контексте решения задачи о нахождении трехмерного геометрического аналога теоремы Лагранжа.

3. Теорема Лагранжа. Теорема Лагранжа о цепных дробях заключается в следующем: число a является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда его разложение в цепную дробь периодически, начиная с некоторого момента. Существует естественный двумерный геометрический аналог этого утверждения, описанный в разделе 1.

В работе [4] рассматривается трехмерный геометрический аналог теоремы Лагранжа: если целочисленные раскраски образов в $\mathcal{G}_3(K)$ и $\mathcal{G}_4(K)$ некоторой бесконечной цепочки вершин полиэдра Клейна K , соответствующего иррациональному конусу $C \subset \mathbb{R}^3$, периодичны, то существует неединичный оператор из $SL_3(\mathbb{Z})$, переводящий полиэдр Клейна в себя. Цепочкой мы называем упорядоченный набор (конечный или бесконечный) вершин K такой, что любые две подряд идущие вершины соединены ребром. Под целочисленной раскраской понимается следующее: мы раскрашиваем две вершины графа $\mathcal{G}_k(K)$ в один цвет, если существует оператор $B \in SL_3(\mathbb{Z})$, переводящий объединение реберных звезд вершин многогранника, образующих одну из этих двух вершин графа, в объединение реберных звезд вершин многогранника, образующих другую вершину. При этом на операторы, с помощью которых осуществляется раскраска, накладываются некоторые дополнительные требования (точную формулировку можно посмотреть в работе [4]).

С помощью теоремы 2 мы можем дать более естественную геометрическую формулировку теоремы Лагранжа, отказавшись также от требований к операторам, осуществляющим раскраску.

ТЕОРЕМА 3. Если граф $\mathcal{G}_3(K)$ всего полиэдра Клейна K , соответствующего иррациональному конусу $C \subset \mathbb{R}^3$, имеет периодическую целочисленную раскраску, то существует неединичный оператор из $SL_3(\mathbb{Z})$, переводящий полиэдр Клейна в себя.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существование оператора $A \in SL_3(\mathbb{Z})$ такого, что $A(K) = K$, показывается непосредственным применением теоремы 2, когда $M_1 = M_2 = K$. Неединичность оператора следует из доказательства теоремы 2 (оператор, являющийся результатом теоремы 2, есть любой из операторов, регулярно действующих на сложных тройках; заявленная в теореме 3 периодичность подразумевает, что можно найти две сложные парные тройки, являющиеся двумя различными тройками K , а значит, построенный в доказательстве теоремы 2 оператор, осуществляющий регулярное отображение между ними, неединичен).

4. Доказательство теоремы 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть оператор переводит тройку вершин одного многогранника в парную тройку вершин второго многогранника. Если при этом каждая

вершина, входящая в тройку, переводится в парную, назовем такое отображение *регулярным* относительно данных троек вершин. В противном случае назовем его *нерегулярным*. Аналогичным образом оператор *регулярно* действует на ребре, если переводит обе вершины, соответствующие ребру, в парные им вершины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Назовем тройку вершин *сложной*, если ее боковые ребра принадлежат одной грани (рис. 2). В противном случае назовем ее *простой*.

Рис. 2. Примеры сложных троек

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятия тройки типа I и сложной тройки совпадают.

ЛЕММА 1. Пусть оператор A действует на сложной тройке, боковые вершины которой не соединяются между собой ребром. Тогда A действует регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно из комбинаторно-геометрических соображений. Действительно, определение парных вершин является следствием заявленного комбинаторного изоморфизма между многогранниками. Обозначим вершины тройки, соответствующей первому многограннику, как P_1, P_2, P_3 (P_2 центральная), и пусть P'_1, P'_2, P'_3 – соответственно парные к ним вершины тройки, соответствующей второму многограннику. По определению оператора, действующего на тройке, он должен переводить главные вершины в главные. Тогда регулярность нарушается, если центральная вершина переводится в боковую или центральная переводится в центральную, но боковые вершины переводятся друг в друга. В первом случае приходим к противоречию: боковые ребра соединяют главные вершины, а значит, и их образы соединяют главные вершины. Но тогда образом одного из боковых ребер окажется “ребро” $(P'_1P'_3)$, которого не существует по условию (и в силу комбинаторного изоморфизма). Во втором случае оператор меняет ориентацию, что противоречит его определению как оператора из $SL_3(\mathbb{Z})$.

Для доказательства нашего утверждения достаточно доказать, что для каждой сложной тройки существует регулярное отображение. Действительно, рассмотрим ребро P_1P_2 и любые две сложные тройки вершин, в которых оно является боковым: V_1 с центральной вершиной P_1 и V_2 с центральной вершиной P_2 (рис. 3). Пусть на них регулярно действуют некоторые операторы A и B , соответственно. Тогда они регулярно действуют на всех ребрах реберной звезды вершины P_1 , среди которых есть 3, не лежащие в одной плоскости; значит, $A = B$. Продолжая рассуждение на весь многогранник, получаем, что существует единый оператор.

Итак, мы доказали, что достаточно ограничиться рассмотрением сложных троек. Теперь воспользуемся геометрическими соображениями: очевидно, что не существует нерегулярного отображения сложных троек вершин, изображенных на рис. 4,

Рис. 3

а именно, троек, в которых боковые вершины не соединяются ребром (лемма 1) или есть две комбинаторно неэквивалентные звезды главных вершин. Тогда достаточно рассмотреть сложные тройки, структура которых позволяет нерегулярное отображение. А именно, это тройки, в которых боковые вершины соединены ребром, и все реберные звезды главных вершин комбинаторно эквивалентны между собой (рис. 5).

Рис. 4. Тройки, которые можно исключить из рассмотрения

Рис. 5. Тройки, которые будем рассматривать

Введем обозначения, которые будем использовать также в дальнейших рассуждениях. Боковые вершины назовем P_1 и P_3 , центральную – P_2 . Разделим возможные случаи на 3 группы по типу реберной звезды центральной вершины и рассмотрим каждый из них в отдельности. Различаться случаи будут структурой реберной звезды вершины P_2 .

1 группа. Центральная вершина имеет реберную звезду из 3 ребер. Тогда, очевидно, будут 2 случая.

1.1) Дополнительные вершин 3.
Рассмотрим вершину P_4 , входящую в состав реберной звезды вершины P_2 и отличную от вершин P_1 и P_3 . На рис. 6 схематически изображены действия некоторых операторов на тройках вершин $\{P_1, P_2, P_4\}$ и $\{P_3, P_2, P_4\}$. По лемме 1 оба

Рис. 6

оператора осуществляют регулярное отображение. Но в таком случае они одинаково отображают реберную звезду вершины P_2 , значит, они равны.

Случая, когда дополнительных вершин 2, не может быть из геометрических соображений.

Рис. 7. Невозможный случай

Действительно, пусть некоторая вершина P_4 является дополнительной сразу для двух главных, например, P_1 и P_2 (рис. 7). Рассмотрим пересечение плоскостей (P_1, P_3, P_4) и (P_2, P_3, P_4) . Это – отрезок P_3P_4 , и в силу выпуклости многогранника (а следовательно, и его граней) получаем, что других вершин у многогранника нет, и, соответственно, противоречие с утверждением, что дополнительных вершин 2.

1.2) В тройке ровно 1 дополнительная вершина.

Рис. 8

В этом случае многогранник представляет собой тетраэдр (см. рис. 8). Оператор, действующий на тройке вершин $\{P_1, P_2, P_3\}$, отображает и весь тетраэдр, так как он переводит все вершины M_1 в вершины M_2 . Значит, это и есть единый оператор.

2 группа. Центральная вершина имеет реберную звезду из 4 ребер. Тогда первый случай: для одной из главных вершин есть 2 неглавные вершины, каждая из которых имеет с ней общее ребро и не имеет общих ребер с двумя другими главными вершинами тройки – без ограничения общности, это вершина P_2 и вершины P_4 и P_5 , дополнительные для P_2 , не совпадающие с P_1 и P_3 . Это случай 2.1). Для другого случая это не выполняется. Значит, для каждой главной вершины есть неглавная вершина, которая имеет общее ребро с этой вершиной, а также с какой-то другой главной вершиной нашей тройки. Это значит, что существуют 2 неглавные вершины, каждая из которых имеет общие ребра с двумя главными вершинами – без ограничения общности, это вершина P_4 для P_1 и P_2 и вершина P_5 для P_2 и P_3 . Тогда получаем случаи 2,2)–2,5).

2.1) (см. рис. 9).

Рис. 9

В этом случае рассмотрим операторы, действующие на тройках $\{P_1, P_2, P_4\}$ и $\{P_5, P_2, P_3\}$. По лемме 1 они осуществляют регулярные отображения. Кроме того, они одинаково действуют на всех ребрах реберной звезды вершины P_2 , среди которых есть 3, не лежащие в одной плоскости; значит, они равны. Полученный единый оператор отображает всю тройку вершин $\{P_1, P_2, P_3\}$.

2.2) Вершины P_4 и P_5 не соединены ребром (см. рис. 10).

Рис. 10

Рассмотрим операторы A, B, C , действующие на тройках $\{P_4, P_2, P_5\}$, $\{P_4, P_2, P_3\}$, $\{P_1, P_2, P_5\}$. Оператор A действует регулярно по лемме 1. Пусть хотя бы один из операторов B, C действует регулярно – например, C . Тогда $A = C$, так как они одинаково действуют на всех ребрах реберной звезды вершины P_2 , среди которых есть 3, не лежащие в одной плоскости. Оператор C действует на всех ребрах, входящих в состав тройки граней $\{P_1, P_2, P_3\}$, кроме одного ребра; обозначим его (P_3P_6) .

Обозначим Γ_1 грань, смежную с $(P_2P_3P_5)$ относительно ребра (P_3P_5) , и Γ_2 грань, смежную с $(P_1P_2P_3)$ относительно ребра (P_1P_3) . Оператор C регулярно отображает как минимум по 2 ребра каждой из граней Γ_1 и Γ_2 , значит, переводит плоскости этих граней в плоскости парных граней. Значит, переводится в парную прямая, содержащая ребро (P_3P_6) , так как она является пересечением плоскостей, содержащих грани Γ_1 и Γ_2 . Осталось доказать, что и само ребро (P_3P_6) перейдет в парное. Вновь рассмотрим грани Γ_1 и Γ_2 . Если хоть одна из них не имеет треугольную форму – например, Γ_2 (для Γ_1 рассуждение совершенно аналогичное) – рассмотрим оператор D , действующий на тройке $\{P_5, P_3, P_6\}$. Он действует регулярно по лемме 1, и операторы C и D действуют одинаково на ребрах (P_3P_5) , (P_3P_2) , (P_3P_1) звезды вершины P_3 . Значит, они равны, и C регулярно отображает ребро (P_3P_6) . Если же обе грани имеют треугольную форму, заметим, что тройка $\{P_1, P_2, P_3\}$, если в ней рассматривать вершину P_3 как центральную, в точности подходит под случаи 2.3–2.5, рассматриваемые ниже, а значит, существует оператор, который регулярно ее отображает.

Пусть теперь оба оператора B, C осуществляют нерегулярное отображение. Заметим, что не существует ребер между P_3 и P_4 , а также между P_1 и P_5 . Без ограничения общности это достаточно показать для P_3 и P_4 . Действительно, нам известны три из четырех ребер, инцидентных вершине P_3 : (P_1P_3) , (P_2P_3) , (P_3P_5) . Тогда в предположении, что существует ребро (P_3P_4) , оно является четвертым и последним из ребер, инцидентных P_3 , а $(P_1P_3P_4)$ является гранью. Но тогда мы знаем все три грани, инцидентные вершине P_1 , тогда как по условию их должно быть четыре. Противоречие. Значит, B и C одинаково действуют на реберной звезде вершины P_2 (действительно, они отображают соответствующие им главные вершины в главные и соответствующие им боковые ребра в ребра, соединяющие главные вершины – а значит, оба оператора переводят P_2 в парную вершину, а соответствующие каждому из операторов боковые ребра в боковые, но не парные), значит, они равны, $B = C$. Тогда $C(P_3) = P'_4$, где P'_4 – парная к P_4 , а $C(P_1) = B(P_1) = P'_5$, где P'_5 – парная к P_5 , и, так как оператор C переводит ребро (P_1P_3) в некоторое ребро многогранника M_2 , $(P'_4P'_5)$ представляет собой ребро, так же, как и парное к нему ребро P_4P_5 . Значит, рисунок должен выглядеть по-другому (рис. 11).

Рис. 11

Добавим к рассматриваемым вершинам вершину P_6 , дополнительную к P_1 и не совпадающую с P_4 , P_2 и P_3 . Тогда получаем три случая.

2.3) Вершина P_6 не имеет общих ребер с P_3 и P_4 (см. рис. 12).

Рассмотрим операторы, действующие на тройках вершин $\{P_4, P_1, P_6\}$, $\{P_3, P_1, P_6\}$. Они осуществляют регулярные отображения по лемме 1 и одинаково отображают

реберную звезду вершины P_1 . Значит, они равны. Но тогда полученный оператор регулярно отображает все вершины тройки $\{P_1, P_2, P_3\}$, а значит, и всю тройку.

Рис. 12

2.4) Вершина P_6 имеет общее ребро либо с P_3 , либо с P_4 – предположим, с P_3 (см. рис. 13). Кроме того, предполагаем, что P_6 не соединяется ребром с P_5 (иначе, рассматривая вместо вершин P_1 и P_4 вершины P_3 и P_5 , переходим к случаю 2,5)).

Рис. 13

Рассмотрим операторы A и B , действующие, соответственно, на тройках $\{P_6, P_1, P_4\}$ и $\{P_6, P_3, P_5\}$. Они осуществляют регулярные отображения по лемме 1 и одинаково отображают ребра (P_3P_2) (оператор A регулярно отображает вершины P_2 и P_3), (P_3P_1) , (P_3P_6) (оператор A регулярно отображает вершины P_3 и P_6). Значит, они равны. Тогда единый оператор регулярно отображает все вершины тройки $\{P_1, P_2, P_3\}$, а значит, и всю тройку. Если P_6 имеет общее ребро с P_4 , рассуждения абсолютно аналогичны.

2.5) Вершина P_6 имеет общие ребра с P_3 и P_4 (см. рис. 15). В таком случае, по построению M_1 – многогранник, двойственный к кубоиду (рис. 14).

Рассмотрим оператор, действующий на тройке $\{P_6, P_1, P_2\}$. Он действует на всех вершинах кубоида, значит, это и есть оператор, переводящий M_1 в M_2 .

3 группа. Центральная вершина имеет реберную звезду из более, чем 4 ребер.

ЛЕММА 2. Пусть центральная вершина тройки вершин типа II многогранника M_1 имеет реберную звезду из более, чем 4 ребер. Тогда оператор A , переводящий ее в парную тройку вершин многогранника M_2 , осуществляет регулярное отображение.

Рис. 14

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тройку вершин типа II $\{P_1, P_2, P_3\}$, где звезда центральной вершины P_2 (а значит, и комбинаторно эквивалентные ей звезды других главных вершин) содержит более, чем 4 ребра.

Случай 1. P_1 и P_3 не соединены ребром. Тогда боковые ребра при отображении переходят в боковые ребра. Расстояние между боковыми ребрами составляет либо 1 ребро, либо не менее 2, в зависимости от выбора направления обхода. Значит, из комбинаторно-геометрических соображений оператор, действующий на тройке $\{P_1, P_2, P_3\}$, осуществляет регулярное отображение.

Случай 2. P_1 и P_3 соединены ребром. Предположим, что оператор действует нерегулярно. Тогда из комбинаторно-геометрических соображений (аналогично случаю 1) возможен лишь случай, когда ни одна из главных вершин не переводится в парную: $A(P_1) = P'_2$, $A(P_2) = P'_3$, $A(P_3) = P'_1$ или $A(P_1) = P'_3$, $A(P_2) = P'_1$, $A(P_3) = P'_2$. Учитывая это замечание (и тот факт, что тройка вершин типа II), сделаем еще одно: из тех же соображений в одном из полупространств, отделяемом плоскостью, содержащей главные вершины, находится лишь по одному ребру из реберных звезд главных вершин.

Случай 2.1 (см. рис. 15). Есть хоть одна дополнительная вершина P^1 , удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) P^1 принадлежит грани, инцидентной одному из ребер между главными вершинами;
- 2) P^1 соединяется ребром лишь с одной из главных вершин (без ограничения общности, с P_1).

Но тогда существует и вторая дополнительная вершина P^2 , удовлетворяющая перечисленным свойствам, но соединяющаяся ребром с какой-то другой главной вершиной (без ограничения общности, с P_2), поскольку образ P^1 не есть парная P^1 вершина (если $A(P^1)$ – парная к P^1 вершина, то в силу комбинаторного изоморфизма между многогранниками получаем противоречие предположению, что P^1 соединяется ребром лишь с одной из главных вершин).

Рассмотрим две тройки вершин: $\{P^1, P_1, P_3\}$ и $\{P^2, P_2, P_1\}$. По лемме 1 существуют операторы, регулярно действующие на этих тройках. Кроме того, они регулярно действуют на реберной звезде вершины P_1 , а значит, равны. Остается заметить, что полученный в объединении оператор отображает всю исходную тройку.

Рис. 15

Случай 2.2 (см. рис. 16). Вспомним замечание о том, что в одном из полупространств, отделяемом плоскостью, содержащей главные вершины, находится лишь по одному ребру из реберных звезд главных вершин. В предположениях случая 2.2 каждая из дополнительных вершин, соответствующих этим ребрам, соединяется ребрами как минимум с двумя главными, а значит, эти дополнительные вершины совпадают – пусть это вершина P .

Рис. 16

Для троек $\{P_1, P_2, P\}$ и $\{P_1, P_3, P\}$ существуют операторы, осуществляющие регулярное отображение (поскольку реберные звезды главных вершин для каждой из этих троек не являются комбинаторно эквивалентными). Они регулярно действуют на реберной звезде вершины P , а значит, равны. Остается заметить, что полученный в объединении оператор отображает всю исходную тройку.

Рассмотрим вершину P_4 , соединяющуюся ребром с P_2 и лежащую в одной грани с P_2 и P_3 . Тогда получаем два случая.

3.1) P_3 не соединяется ребром с P_4 (см. рис. 17).

Рис. 17

Рис. 18

Операторы A и B , действующие, соответственно, на тройках $\{P_1, P_2, P_4\}$ и $\{P_1, P_3, P_5\}$, осуществляют регулярные отображения по лемме 2. Они одинаково отображают реберную звезду вершины P_1 , а значит, они равны. Остается заметить, что полученный в объединении оператор отображает всю тройку $\{P_1, P_2, P_3\}$.

3.2) P_3 соединяется ребром с P_4 (см. рис. 18).

Рассуждение совершенно аналогичное, но теперь $P_4 = P_5$. Утверждение доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J.-О. Moussafir, “Convex hulls of integral points”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. V*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **266**, ПОМИ, СПб., 2000, 188–217.
- [2] Н. Tsuchihashi, “Higher-dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities”, *Tohoku Math. J. (2)*, **35**:4 (1983), 607–639.
- [3] Е. И. Коркина, “Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры”, *Особенности гладких отображений с дополнительными структурами*, Сборник статей, Тр. МИАН, **209**, Наука, М., 1995, 143–166.
- [4] О. Н. Герман, Е. Л. Лапштанов, “О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 51–66.

А. В. Быковская

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: anna.bykovskaya@gmail.com

Поступило

25.10.2011

Исправленный вариант

23.11.2012