Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. В. Абрамов, Экспоненциальное отображение Артина–Хассе, алгебраические группы в положительной характеристике и Ноттингемская группа, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:25:59

Экспоненциальное отображение Артина–Хассе, алгебраические группы в положительной характеристике и Ноттингемская группа

Я. В. Абрамов

Исследуются связанные коммутативные подгруппы в про-унипотентном радикале группы формальных степенных рядов одной переменной над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики относительно операции подстановки.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9275

1. Введение

Обозначим множество формальных степенных рядов без свободного члена с коэффициентами в коммутативном ассоциативном кольце R через $xR[[x]]$. Рассмотрим на множестве $xR[[x]]$ бинарную операцию композиции, сопоставляющую рядам $f(x) = \sum_{i>0} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i>0} b_i x^i$ ряд

$$f(g(x)) = \sum_{i>0} c_i(a, b) x^i,$$

в котором

$$\begin{aligned} c_i(a, b) &= a_1 b_i + a_i b_1^i + H_i(a_1, \dots, a_{i-1}, b_1, \dots, b_{i-1}), \\ c_i(a, b) &\in \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_i]. \end{aligned}$$

Эта операция задает структуру ассоциативного моноида на $xR[[x]]$.

Обозначим множество формальных степенных рядов с коэффициентами в R без свободного члена, в которых коэффициент при x обратим как элемент кольца R , через $J(R)$. На $J(R)$ операция композиции задает структуру группы. Эту группу мы будем называть *группой струй*.

Проалгебраической группой со счетной базой [1] называется групповая схема, являющаяся проективным пределом проективной системы, состоящей из счетного числа алгебраических групп. На проалгебраической группе имеется естественная топология, получаемая как проективный предел топологий Зарисского на каждой из групп, входящих в проективную систему, по которой строится сама группа.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгебраической геометрии НИУ-ВШЭ (грант РФ 11.G34.31.0023) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 10-01-00836, 12-01-33101, 12-01-31233).

В дальнейшем все алгебраические и проалгебраические группы будут рассматриваться с такой топологией. *Регулярным гомоморфизмом* проалгебраических групп называется морфизм их как групповых схем. В случае, когда $R = \mathbb{k}$ – поле, группа струй является группой $\mathbb{k}$ -точек проалгебраической групповой схемы J , которая является проективным пределом последовательности групп

$$J_1 \leftarrow J_2 \leftarrow J_3 \leftarrow \dots,$$

где

$$J_n(\mathbb{k}) = \text{Aut}(\mathbb{k}[x]/(x^{n+1}) : \mathbb{k})$$

и

$$J_{n+l} \rightarrow J_n$$

– естественные гомоморфизмы факторизации. Группа $J(\mathbb{k})$ может быть получена таким образом:

$$J(\mathbb{k}) = \text{Aut}_{\text{cont}}(\mathbb{k}[[x]] : \mathbb{k}) = \text{Aut}_{\text{cont}}(\mathbb{k}((x)) : \mathbb{k}),$$

где под Aut_{cont} понимается группа автоморфизмов, непрерывных в x -адической топологии на $\mathbb{k}[[x]]$ и $\mathbb{k}((x))$.

В группе струй имеется нормальная подгруппа

$$N(\mathbb{k}) = \left\{ x + \sum_{i>1} a_i x^i \right\},$$

называемая *Ноттингемской группой* (по названию Ноттингемского университета, в котором она интенсивно изучалась).

Всюду далее поле $\mathbb{k}$ считается алгебраически замкнутым и $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$. В $N(\mathbb{k})$ замкнутым образом вкладывается группа $N(\mathbb{F}_p)$ с проконечной топологией на ней. Известно, что в $N(\mathbb{F}_p)$ замкнутым образом вкладывается любая про- p -группа со счетной базой [2]. Задача о том, какие коммутативные подгруппы могут в ней содержаться, интенсивно изучалась в последние годы [3]–[9].

Основным результатом этой статьи является следующая теорема:

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbb{k}$ – алгебраически замкнутое поле положительной характеристики p . Тогда в Ноттингемской группе $N(\mathbb{k})$ любая замкнутая конечномерная коммутативная связная подгруппа может быть изоморфна только $(\mathbb{k}, +)^m$.

Перед тем, как перейти к доказательству теоремы, напомним необходимые нам сведения о коммутативных связных алгебраических группах в характеристике p .

2. Векторы Витта

2.1. Определение и основные свойства векторов Витта. Пусть $\mathbb{Z}_{(p)}$ кольцо целых p -адических чисел. Положим

$$w_n(X) = w_n(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^n X_i^{p^{n-i}} p^i. \quad (1)$$

Очевидно, что существуют многочлены $\Psi_n(X_0, \dots, X_n)$ с рациональными коэффициентами такие, что

$$X_n = \Psi_n(w_0(X), \dots, w_n(X)).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} s_n(X, Y) &= s_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n) = \Psi_n(w_0(X) + w_0(Y), \dots, w_n(X) + w_n(Y)), \\ m_n(X, Y) &= m_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n) = \Psi_n(w_0(X)w_0(Y), \dots, w_n(X)w_n(Y)). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.1 (Витт, [10]). *Имеем*

$$\begin{aligned} s_i(X_0, \dots, X_i, Y_0, \dots, Y_i) &\in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_i, Y_0, \dots, Y_i], \\ m_i(X_0, \dots, X_i, Y_0, \dots, Y_i) &\in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_i, Y_0, \dots, Y_i]. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbb{K}$ – произвольное поле характеристики $p > 0$. Введем бинарные операции $+_W$ и $\cdot_W$ на пространстве последовательностей $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (X_0, \dots, X_n, \dots) +_W (Y_0, \dots, Y_n, \dots) &= (s_0(X, Y), \dots, s_n(X, Y), \dots), \\ (X_0, \dots, X_n, \dots) \cdot_W (Y_0, \dots, Y_n, \dots) &= (m_0(X, Y), \dots, m_n(X, Y), \dots). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.2 (Витт, [10]). *Операции $\cdot_W$ и $+_W$ задают на $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ структуру коммутативного ассоциативного локального кольца с единицей, без делителей нуля и характеристики 0.*

Следуя [10], кольцо, определенное на множестве $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, мы будем называть *кольцом p -векторов Витта* и обозначать $W_{p^\infty}(\mathbb{K})$.

ПРИМЕР 2.1. Имеем $W_{p^\infty}(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_{(p)}$.

Также определим на $\mathbb{K}^{n+1}$ бинарные операции $+_W$ и $\cdot_W$ как

$$\begin{aligned} (X_0, \dots, X_n) +_W (Y_0, \dots, Y_n) &= (s_0(X, Y), \dots, s_n(X, Y)), \\ (X_0, \dots, X_n) \cdot_W (Y_0, \dots, Y_n) &= (m_0(X, Y), \dots, m_n(X, Y)). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.3 (Витт, [10]). *Операции $\cdot_W$ и $+_W$ задают на $\mathbb{K}^{n+1}$ структуру коммутативного ассоциативного локального кольца с единицей.*

Кольцо, определенное на множестве $\mathbb{K}^{n+1}$, мы будем называть *кольцом усеченных p -векторов Витта* и обозначать $W_{p^{n+1}}(\mathbb{K})$, следуя [10].

ПРИМЕР 2.2. Имеем $W_{p^n}(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Группы усеченных векторов Витта по сложению являются коммутативными унитарными алгебраическими группами и примечательны следующим фактом.

ТЕОРЕМА 2.4 (Серр, [11]). *Всякая связная коммутативная унитарная группа над $\mathbb{K}$ изоморфна*

$$\left(\prod_{i=1}^N (W_{p^{n_i}}(\mathbb{K}), +_W) \right) / G,$$

где $(W_{p^{n_i}}(\mathbb{K}), +_W)$ группа усеченных векторов Витта по сложению, а G конечная подгруппа в указанном произведении.

2.2. Классификация аддитивных гомоморфизмов векторов Витта в векторы Витта. В дальнейшем нам понадобится полная классификация регулярных гомоморфизмов из группы $W_{p^N}(\mathbb{k})$ в группу $W_{p^M}(\mathbb{k})$ для $N \geq M$. Приведем несколько примеров эндоморфизмов группы $W_{p^{N+1}}(\mathbb{k})$.

ПРИМЕР 2.3. Имеем $a \in \mathbb{k}$, $\hat{a}: (X_0, X_1, \dots, X_N) \mapsto (aX_0, a^p X_1, \dots, a^{p^N} X_N)$.

ПРИМЕР 2.4. Имеем $V: (X_0, X_1, \dots, X_N) \mapsto (0, X_0, \dots, X_{N-1})$.

ПРИМЕР 2.5. Имеем $F: (X_0, X_1, \dots, X_N) \mapsto (X_0^p, X_1^p, \dots, X_N^p)$.

ЛЕММА 2.1. $FV = VF$ и эта композиция является умножением на p в кольце $W_{p^N}(\mathbb{k})$.

ЛЕММА 2.2 [10]. Максимальный порядок элемента группы $(W_{p^N}(\mathbb{k}), +_W)$ равен p^N .

ПРИМЕР 2.6. Пример гомоморфизма $W_{p^N}(\mathbb{k}) \rightarrow W_{p^M}(\mathbb{k})$: факторизация Q_{NM} по подгруппе $V^{N-M}(W_{p^N}(\mathbb{k}))$.

ТЕОРЕМА 2.5. Всякий регулярный гомоморфизм из $W_{p^N}(\mathbb{k})$ в $W_{p^M}(\mathbb{k})$ для $N \geq M$ имеет вид

$$\sum_{n,m} \hat{a}_{n,m} F^n V^m Q_{NM},$$

где $\hat{a}_{n,m}$ как в примере 2.3, F как в примере 2.4, V как в примере 2.5, Q_{NM} как в примере 2.6.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Всякий регулярный эндоморфизм группы $W_{p^N}(\mathbb{k})$ имеет вид

$$\sum_{i,j} \hat{a}_{ij} F^i V^j.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Всякий гомоморфизм $W_{p^N}(\mathbb{k}) \rightarrow W_{p^M}(\mathbb{k})$, $N \geq M$, поднимается до гомоморфизма $W_{p^N}(\mathbb{k}) \rightarrow W_{p^K}(\mathbb{k})$, где $N \geq K \geq M$ и задается как

$$\sum_{nm} \hat{a}_{n,m} F^n V^m Q_{NK}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. Пусть

$$H: X = (X_0, \dots, X_{N-1}) \mapsto (H_0(X), \dots, H_{M-1}(X))$$

– регулярный гомоморфизм из группы $W_{p^N}(\mathbb{k})$ в группу $W_{p^M}(\mathbb{k})$. Напомним, что максимальный порядок элемента группы $W_{p^N}(\mathbb{k})$ равен p^N . Кроме того, при гомоморфизме порядок образа элемента не может быть больше порядка самого элемента. Композиция гомоморфизма

$$H: W_{p^N}(\mathbb{k}) \rightarrow W_{p^M}(\mathbb{k})$$

и проекции

$$Q_{Mi}: W_{p^M}(\mathbb{k}) \rightarrow W_{p^i}(\mathbb{k})$$

переводит элементы подгруппы $V^{i+1}(W_{p^N}(\mathbb{k}))$ в 0 (ибо они являются p^{i+1} -ми степенями элементов группы $(W_{p^N}(\mathbb{k}), +_W)$). Поэтому $H_i(X)$ зависит только от $X_0, \dots, X_i$.

Докажем утверждение теоремы индукцией по M .

При $M = 0$ отображение $X_0 \mapsto H_0(X_0)$ – регулярный эндоморфизм аддитивной группы поля и, следовательно, имеет вид $H_0(X_0) = \sum_{j=0} b_j X_0^{p^j}$. Осуществим теперь переход от $M - 1$ к M . Положим

$$H' = H - \sum \widehat{b}_j F^j Q_{NM}.$$

Пусть

$$H': X = (X_0, \dots, X_{N-1}) \mapsto (H'_0(X), \dots, H'_{M-1}(X)).$$

Понятно, что $H'_0(X) = 0$. Таким образом, $\text{Im } H'$ лежит в $V(W_{p^M}(\mathbb{k})) \cong W_{p^{M-1}}(\mathbb{k})$. Это завершает индукцию.

2.3. Экспоненциальное отображение Артина–Хассе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [12]. Экспонентой Артина–Хассе называется выражение

$$E_p(T) = \exp\left(\sum_{i \geq 0} \frac{T^{p^i}}{p^i}\right) \in \mathbb{Q}[[T]].$$

Следующие результаты можно найти, например, в [12].

ТЕОРЕМА 2.6. $E_p(T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$, т.е. знаменатели всех коэффициентов этого ряда не делятся на p .

ТЕОРЕМА 2.7. Имеем $(E_p(T))^p \equiv E_p(T^p) \pmod{p}$.

ТЕОРЕМА 2.8. Существует логарифм Артина–Хассе

$$L_p(1 + T) \in T\mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$$

такой, что $L_p(E_p(T)) = T$, $E_p(L_p(1 + T)) = 1 + T$.

Верхней нильтреугольной матрицей назовем верхнетреугольную матрицу с нулями на главной диагонали. Верхней унитреугольной матрицей назовем верхнетреугольную матрицу с единицами на главной диагонали. Заметим, что если N – верхняя нильтреугольная матрица над полем $\mathbb{k}$ характеристики p , то $E_p(N)$ – верхняя унитреугольная матрица над тем же полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [11]. Определим

$$\begin{aligned} E_p(X, T) &= E_p((X_0, \dots, X_n, \dots), T) = E_p(X_0 T) E_p(X_1 T^p) \cdots E_p(X_n T^{p^n}) \cdots \\ &= \exp\left(\sum_{n \geq 0} T^{p^n} \sum_{i=0}^n \frac{X_{n-i}^{p^i}}{p^i}\right) = \exp\left(\sum_{n \geq 0} T^{p^n} \frac{w_n(X)}{p^n}\right), \end{aligned}$$

где $w_n(X)$ определены в (1).

Очевидно, что

$$E_p(X \oplus Y, T) = E_p(X, T) E_p(Y, T).$$

ТЕОРЕМА 2.9 [13]. Положим $E_p(X, T) = 1 + \sum_{n > 0} c_n(X) T^n$. Тогда
1) $c_i(X) = X_0^i / i!$, $0 < i < p$;

- 2) $c_i(X) \in \mathbb{Z}_{(p)}[X_0, \dots, X_{j-1}]$, $0 < i < p^j$;
 3) $c_{p^j}(X) - X_j \in \mathbb{Z}_{(p)}[X_0, \dots, X_{j-1}]$.

Обозначим всюду далее через $U_\infty(\mathbb{k})$ группу бесконечных верхних унитарных матриц. Как мы увидим в части 3.1 настоящего текста, эта группа может быть снабжена структурой проалгебраической группы.

ТЕОРЕМА 2.10 [13]. Для бесконечной верхней нильтреугольной матрицы N над $\mathbb{k}$ образ отображения

$$(X_0, \dots, X_n, \dots) \mapsto E_p(X, N)$$

лежит в $U_\infty(\mathbb{k})$, а само отображение

$$E_p(\cdot, N): W_{p^\infty}(\mathbb{k}) \rightarrow U_\infty(\mathbb{k})$$

– регулярный гомоморфизм групп.

3. Классификация всех регулярных гомоморфизмов группы Витта в группу бесконечных унитарных матриц

3.1. Редукция гомоморфизмов. Пусть $H: W_{p^\infty}(\mathbb{k}) \rightarrow U_\infty(\mathbb{k})$ – произвольный регулярный гомоморфизм группы векторов Витта в группу бесконечных верхних унитарных матриц. Определим операцию редукции такого гомоморфизма следующим образом.

Рассмотрим на группе $U_\infty(\mathbb{k})$ бесконечную фильтрацию нормальными подгруппами вида

$$U_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & \dots & * & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & * & * & \dots & * & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & * & * & \dots & * & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & \dots & * & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & * & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \right\},$$

где над диагональю расположен треугольник нулей, образованный m подряд идущими столбцами. В следующем, $(m+2)$ -м столбце над диагональю могут располагаться k подряд идущих нулей, а остальные элементы произвольны. Таким образом, общее число фиксированных нулей над диагональю равно $n = m(m+1)/2 + k$, где $k < m+2$. Заметим, что

$$U_n/U_{n+1} \cong (\mathbb{k}, +).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта фильтрация является частным случаем фильтрации Серра [14].

Пусть $\text{Im } H$ целиком содержится в U_n , но не содержится целиком в U_{n+1} . Тогда имеется регулярный гомоморфизм группы векторов Витта в факторгруппу

$$H/U_{n+1}: W_{p^\infty}(\mathbb{k}) \rightarrow U_n/U_{n+1} \cong \mathbb{k}.$$

Он имеет вид

$$H/U_{n+1}: X \mapsto f(X_0) = \sum_{i=0}^{n_0} a_{0i} X_0^{p^i}.$$

Согласно следствию 2.2 можно поднять рассматриваемый гомоморфизм $W_{p^\infty}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$ до гомоморфизма $S: W_{p^\infty}(\mathbb{k}) \rightarrow W_{p^\infty}(\mathbb{k})$:

$$S(X) = \sum_{i=0}^{n_0} \hat{a}_{0i} F^i(X)$$

(выберем это поднятие именно таким, как в доказательстве теоремы 2.5: впоследствии это будет иметь значение в наших построениях). Пусть $u_0 \in \text{Im } H$ такой, что его смежный класс в $U_n/U_{n+1} \cong \mathbb{k}$ равен 1 в поле $\mathbb{k}$. Заметим, что аналитическая функция от элемента коммутативной подгруппы в $U_\infty(\mathbb{k})$ коммутирует со всеми элементами этой подгруппы. Поэтому $E_p(X, L_p(u_0))$ для любого $X \in W_{p^\infty}(\mathbb{k})$ коммутирует с любым элементом $\text{Im } H$. Положим

$$H_1(X) = H(X) \cdot E_p(S(X), L_p(u_0))^{-1},$$

где

$$S(X) = \sum_{i=0}^{n_0} \hat{a}_{0i} F^i(X).$$

H_1 – гомоморфизм групп, так как является отношением гомоморфизмов, для которых любой элемент из образа первого коммутирует с любым элементом из образа второго. При этом $\text{Im } H_1$ целиком лежит в U_{n+1} . Построенный гомоморфизм H_1 называется *редукцией* гомоморфизма H .

Если с помощью редукции перейти от H_1 к H_2 , затем от H_2 к H_3 и т.д., то мы получим следующий результат:

ТЕОРЕМА 3.1. *Всякий регулярный гомоморфизм $H: W_{p^\infty}(\mathbb{k}) \rightarrow U_\infty(\mathbb{k})$ имеет вид*

$$H(X) = \prod_{i=0}^n E_p(\sigma_i(X), N_i),$$

где n – это натуральное число или бесконечность,

$$\sigma_i \in \text{End}(W_{p^\infty}(\mathbb{k})), \quad \sigma_i = \sum_j \hat{a}_{ij} F^j,$$

$\{N_i\}_i$ – линейно независимый над $\mathbb{k}$ набор бесконечных верхних нильтреугольных матриц, таких что $1 + N_i \in U_{n_i} \setminus U_{n_i+1}$ и $n_i \in \mathbb{N}$ возрастают.

Таким образом, мы описали не только все гомоморфизмы $W_{p^\infty}(\mathbb{k}) \rightarrow U_\infty(\mathbb{k})$, но и все гомоморфизмы $W_{p^N}(\mathbb{k}) \rightarrow U_\infty(\mathbb{k})$.

3.2. Касательная алгебра к образу гомоморфизма. За определением касательной алгебры $\text{Lie}(G)$ групповой схемы G над полем $\mathbb{k}$ и касательного вектора к схеме над $\mathbb{k}$ мы отсылаем к [15].

Опишем касательную алгебру к образу группы $W_{p^\infty}(\mathbb{k})$ при гомоморфизме H из теоремы 3.1. Всякий $\sigma_i(X)_0 = \sum_j a_{ij} X_0^{p^j}$. Можно считать, что хоть один из $a_{i0} \neq 0$:

в противном случае по построению σ_i гомоморфизм H зависит от X_0^p , а не от X_0 , т.е. H является композицией другого гомоморфизма $\tilde{H}$ и гомоморфизма Фробениуса и мы можем заменить H на $\tilde{H}$.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial X_0} \prod_i E_p(\sigma_i(X), N_i) \Big|_{X=0} = \sum_i \frac{\partial}{\partial X_0} E_p(\sigma_i(X), N_i) \Big|_{X=0} = \sum_i a_{i0} N_i.$$

Возьмем $\sum_i a_{i0} N_i$ в качестве первого касательного вектора в единице к образу $W_{p^\infty}(\mathbb{k})$. Заметим, что возведение в p -ю степень в аддитивной группе векторов Витта это композиция $F \circ V = V \circ F$. Образ этого эндоморфизма это подгруппа коразмерности 1. При этом

$$\left(\prod_i E_p(\sigma_i(X), N_i) \right)^p = \prod_i E_p(F(V(\sigma_i(X))), N_i) = \prod_i E_p(F(\sigma_i(X)), N_i^p).$$

Возьмем $\sum_i a_{i0}^p N_i^p$ в качестве второго касательного вектора к образу $W_{p^\infty}(\mathbb{k})$. По аналогии строятся еще касательные векторы: $\sum_i a_{i0}^{p^j} N_i^{p^j}$. Поскольку выполнено $\text{codim}_{W_{p^N}}(V(W_{p^N})) = 1$, эти векторы порождают всю касательную алгебру и те из них, что не равны 0, образуют ее базис. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3.2. *Касательная алгебра любой замкнутой подгруппы в $U_\infty(\mathbb{k})$, являющейся фактором группы $W_{p^\infty}(\mathbb{k})$, обладает базисом вида $\{N^{p^i}\}$ для некоторого элемента N этой касательной алгебры.*

4. Коммутативные подгруппы Ноттингемской группы

4.1. Доказательство основного результата. Предположим противное. Как следует из теоремы 2.4, должно существовать такое $n > 1$, что некоторый гомоморфизм $W_{p^n}(\mathbb{k}) \rightarrow N(\mathbb{k})$ имеет не более, чем дискретное ядро. Группа $N(\mathbb{k})$ допускает следующее естественное регулярное вложение в $U_\infty(\mathbb{k})$. Действие $r(x) \mapsto r(g^{-1})$ вкладывает $N(\mathbb{k})$ в бесконечные нижнетреугольные унитарные матрицы. Отображение $A \mapsto (A^T)^{-1}$ изоморфно отображает нижнетреугольные матрицы в верхнетреугольные.

Касательная алгебра $N(\mathbb{k})$, рассматриваемая как подалгебра в $\text{Lie}(U_\infty(\mathbb{k}))$, имеет вид

$$\left\{ \sum_{i>1} a_i x^i \frac{d}{dx} \right\}$$

со скобкой

$$\left[r(x) \frac{d}{dx}, q(x) \frac{d}{dx} \right] = (rq' - r'q) \frac{d}{dx} = r^2 \left(\frac{q}{r} \right)' \frac{d}{dx}.$$

Централизатор касательного вектора $r(x)d/dx$ имеет вид

$$\left\{ g(x^p) r(x) \frac{d}{dx} \mid g(x) \in \mathbb{k}((x)), r(x) g(x^p) \in x^2 \mathbb{k}[[x]] \right\}.$$

ЛЕММА 4.1. *Пусть $g(x)d/dx$ – касательный вектор к $N(\mathbb{k})$. Тогда $(g(x)d/dx)^p$ – тоже касательный вектор к $N(\mathbb{k})$. Он имеет вид $g(x)h(x^p)d/dx$, $h(x) \in \mathbb{k}[[x]]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, p -я степень любого дифференцирования D любой алгебры над полем характеристики p это тоже ее дифференцирование:

$$D^p(fg) = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} D^j(f) D^{p-j}(g) = D^p(f)g + fD^p(g).$$

D^p коммутирует с D и наименьшее n , такое что $x^n d/dx$ входит в запись D^p с ненулевым коэффициентом, не меньше, чем в D , поэтому D^p имеет требуемый вид.

Теперь продолжим доказательство теоремы. По теореме 3.2, касательными векторами к изучаемой связной коммутативной подгруппе являются некоторые дифференцирования D^{p^i} , $i = 0, \dots, n$. Таким образом, существует такое дифференцирование D алгебры $\mathbb{k}[[x]]$, что $D^{p^n} \neq 0$, $D^{p^{n+1}} = 0$. Пусть

$$D^{p^{n-1}} = f(x) \frac{d}{dx}.$$

Тогда

$$D^{p^n} = f(x)h(x^p) \frac{d}{dx} \neq 0.$$

Заметим, что оператор умножения на $h(x^p)$ коммутирует с оператором d/dx . Поэтому

$$D^{p^{n+1}} = f(x)h(x^p)^{p+1} \frac{d}{dx} \neq 0,$$

что противоречит нашему предположению. Следовательно, связной коммутативной подгруппой в $N(\mathbb{k})$ может быть только $\mathbb{k}^n/G$, где G – конечная подгруппа. Теорема теперь следует из следующей леммы.

ЛЕММА 4.2. Пусть G – конечная подгруппа в $(\mathbb{k}, +)^l$. Тогда $(\mathbb{k}, +)^l/G \cong (\mathbb{k}, +)^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $G \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$. Поэтому достаточно доказать для $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Выберем в G порождающий элемент e . В $\mathbb{k}^n$ ему соответствует некоторый вектор v . Дополнив v до базиса, мы получим $\mathbb{k}^l/G \cong (\mathbb{k}/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) \oplus \mathbb{k}^{l-1}$ (v после этой линейной замены становится 1 в поле $\mathbb{k}$). В то же время, $M: x \rightarrow x^p - x$ – эндоморфизм $\mathbb{k}$, ядро которого равно в точности $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а образ это всё $\mathbb{k}$. Что и требовалось доказать.

4.2. Открытые вопросы. Вопрос о том, для каких n в Ноттингемской группе найдется подгруппа, изоморфная $\mathbb{k}^n$, является открытым. При $n = 1$ такие подгруппы есть: это подгруппы вида

$$f_{\lambda,l}(x) = \sqrt[l]{\frac{x^l}{1 + \lambda x^l}}, \quad \lambda \in \mathbb{k}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (l, p) = 1, \quad f_{\lambda,l} \circ f_{\mu,l} = f_{\lambda+\mu,l}.$$

Помимо этого открытым остается вопрос о том, какие бесконечномерные связные абелевы подгруппы имеются в Ноттингемской группе. Реализуется ли в Ноттингемской группе группа $W_{p^\infty}(\mathbb{k})$? Реализуются ли какие-либо из ее факторов по предискретным подгруппам?

К примеру, в $N(\mathbb{k})$ есть замкнутая подгруппа, изоморфная группе $(\{1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i T^i \mid a_i \in \mathbb{F}_p\}, \cdot)$, реализуемая как $\{x + \sum a_i x^{p^i} \mid a_i \in \mathbb{F}_p\}$ в Ноттингемской группе (см. [16]). Она имеет бесконечный порядок, но не связная.

Автор очень благодарен своему научному руководителю Э. Б. Винбергу, а также Д. А. Тимашеву, А. Я. Канелю-Белову, М. В. Ершову за полезные обсуждения в связи с этой статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. P. Serre, *Groupes Pro-algebriques*, Publ. Math. IHES № 7, 1990.
- [2] R. Camina, “Subgroups of Nottingham group”, *J. Algebra*, **196** (1997), 101–113.
- [3] B. Klopsch, “Automorphisms of the Nottingham Group”, *J. Algebra*, **223**:1 (2000), 37–56.
- [4] P. P. Palfy, “The number of conjugacy classes in some quotients of the Nottingham group”, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **41**:02 (1998), 369–384.
- [5] M. Ershov, “New just-infinite pro- p groups of finite width and subgroups of the Nottingham group”, *J. Algebra*, **275**:1 (2004), 419–449.
- [6] M. Ershov, “On subgroups of the Nottingham group of positive Hausdorff dimension”, *Comm. Algebra*, **35**:1 (2007), 193–206.
- [7] I. Fesenko, “On just infinite pro- p -groups and arithmetically pro-finite extensions of local fields”, *J. Reine Angew. Math.*, **517** (1999), 61–80.
- [8] J.-P. Wintenberger, “Extensions abéliennes et groupes d’automorphismes de corps locaux”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **290**:5 (1980), A201–A203.
- [9] И. К. Бабенко, “Алгебра, геометрия и топология группы подстановок формальных степенных рядов”, *УМН*, **68**:1 (2013), 3–76.
- [10] M. Hazewinkel, *Witt Vectors. Part 1*, arXiv:math.RA/0804.3888v1.
- [11] Ж. П. Серр, *Алгебраические группы и поля классов*, Мир, М., 1968.
- [12] A. M. Robert, *A Course in p -Adic Analysis*, Grad. Texts in Math., **198**, Springer, New York, 2000.
- [13] R. Proud, “Witt groups and unipotent elements in algebraic groups”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **82**:3 (2000), 647–675.
- [14] Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980.
- [15] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Pure Appl. Math., **131**, Academic Press, Boston, MA, 1987.
- [16] Y. Barnea, B. Klopsch, “Index-subgroups of the Nottingham group”, *Adv. Math.*, **180**:1 (2003), 187–221.

Я. В. Абрамов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: zroslav@gmail.com

Поступило

18.08.2011

Исправленный вариант

08.04.2014