Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Дьяченко, Асимптотика собственных значений ин-
дефинитной задачи Штурма–Лиувилля, *Матем. заметки*,
2000, том 68, выпуск 1, 139–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm928>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 10:46:31

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНДЕФИНИТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

А. В. Дьяченко

Введение. Мы исследуем индефинитную спектральную задачу Штурма–Лиувилля

$$-y'' + [\lambda^2 f(x) + q(x)]y = 0, \quad A \leq x \leq B, \quad (1)$$

$$y(A) = y(B) = 0, \quad (2)$$

где функции $f(x)$, $q(x)$ вещественны и интегрируемы на $[A, B]$, причем

$$\int_A^B \sqrt{f_{\pm}} dx > 0, \quad \text{где } f_{\pm} = \max\{\pm f, 0\}.$$

Из работ [1], [2] следует, что спектр этой задачи дискретен и не имеет конечных точек сгущения, при этом лишь конечное число собственных значений лежит вне вещественной и мнимой осей. В дальнейшем мы будем считать, что λ – положительный параметр. В [3] показано, что асимптотика собственных значений имеет вид

$$\lambda_m \sim \frac{\pi m}{\int_A^B \sqrt{f_-} dx}.$$

Наша цель – уточнить асимптотику при дополнительных предположениях гладкости функций $f(x)$ и $q(x)$. Кроме того, мы предположим, что $f(x)$ имеет конечное число простых нулей, которые называются точками поворота.

План заметки следующий. Сначала мы найдем асимптотику собственных значений для одной точки поворота, причем в этом случае мы покажем, что асимптотические формулы могут быть выписаны с произвольным числом членов в предположении достаточной гладкости функций $f(x)$ и $q(x)$. Далее мы покажем с помощью метода “склейки”, что в случае двух точек поворота с положительными значениями функции $f(x)$ в концах отрезка асимптотику можно выписать с точностью до трех членов. Наконец, в случае произвольного конечного числа точек поворота методом “склейки” мы покажем, что задача о нахождении асимптотики собственных значений сводится к двум рассмотренным случаям.

Случай одной и двух точек поворота. Рассмотрим сначала случай

$$f(x) = \pm(x - x^{\pm})h(x), \quad h(x) > 0. \quad (3)$$

Для упрощения формул положим, что x изменяется на отрезке с концами a и b , причем $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Точка поворота $x^{\pm}$ лежит между a и b .

ТЕОРЕМА 1. Если

$$f \in C^{p+4}, \quad q \in C^p \quad \text{при} \quad p = \left[\frac{3n+1}{2} \right], \quad n \geq 1, \quad (4)$$

то уравнение (1) при условии (3) имеет пару независимых решений $v(x) = v(x, \lambda, n)$ и $u(x) = u(x, \lambda, n)$ класса C^2 , для которых справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v^\pm(b) &= \mathcal{L}^\pm, & \dot{v}^\pm(b) &= \lambda \mathcal{L}^{*\pm}, \\ u^\pm(b) &= e^{-\beta\lambda} \mathcal{M}^\pm, & \dot{u}^\pm(b) &= \lambda e^{-\beta\lambda} \mathcal{M}^{*\pm}, \\ v^\pm(a) &= e^{-\beta\lambda} \operatorname{Re}(e^{i\alpha\lambda} \mathcal{P}^\pm), & \dot{v}^\pm(a) &= \lambda e^{-\beta\lambda} \operatorname{Re}(e^{i\alpha\lambda} \mathcal{P}^{*\pm}), \\ u^\pm(a) &= \operatorname{Re}(e^{i\alpha\lambda} \mathcal{Q}^\pm), & \dot{u}^\pm(a) &= \lambda \operatorname{Re}(e^{i\alpha\lambda} \mathcal{Q}^{*\pm}), \end{aligned}$$

где $\beta = \int \sqrt{f_+} dx$, $\alpha = \int \sqrt{f_-} dx$, буквами $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ обозначены функции параметра λ , имеющие при $\lambda \rightarrow +\infty$ разложение вида

$$c_0 + \frac{c_1}{\lambda} + \dots + \frac{c_n}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right), \quad c_0 \neq 0. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [4] найдены такие решения при $f(x) = x$ и описано преобразование Лангера, позволяющее к этому случаю свести наше уравнение. Коэффициенты в разложениях можно найти явно, пользуясь рекуррентными соотношениями.

ТЕОРЕМА 2 (Спектр задачи с одной точкой поворота). Последовательность собственных значений задачи (1), (2) при условиях (3), (4) допускает асимптотическое разложение по степеням $1/m$ с точностью до $O(1/m^{n+1})$. В частности, при $f \in C^6$, $q \in C^2$ имеем

$$\lambda_m = \frac{\pi}{\mathcal{J}} m - \frac{\pi}{4\mathcal{J}} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{5/72}{\mathcal{J}} + \frac{1}{2} \mathcal{J} \right) \frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

где

$$\mathcal{J} = \int_{\Delta} \sqrt{f_-} dx, \quad \mathcal{J} = - \int_{\Delta} \left(\frac{1}{f_-^{1/4}} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{f_-^{1/4}} - \frac{q}{f_-^{1/2}} - \frac{5}{36} \frac{f_-^{1/2}}{\xi^2} \right) dx, \quad (6)$$

Δ – отрезок, на котором $f(x) \leq 0$,

$$\xi(x) = \begin{cases} \int_{x^-}^x \sqrt{f_-} dt, & x \in [x^-, a], \\ \int_x^{x^+} \sqrt{f_-} dt, & x \in [a, x^+]. \end{cases} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решения из теоремы 1 позволяют написать уравнение для собственных значений в виде $u^\pm(a) = O(1/\lambda^\infty)$, что эквивалентно

$$e^{2i\alpha\lambda} = -\overline{\mathcal{Q}^\pm} / \mathcal{Q}^\pm,$$

где $\mathcal{Q}^\pm$ имеют асимптотические разложения вида (5). Вычисляя первые два коэффициента разложений $\mathcal{Q}^\pm$ явно (подробности вычислений опускаются) и подставляя их в последнюю формулу, получим

$$e^{2i\alpha\lambda} = -i \left[1 + \left(\frac{5/36}{\alpha} + \mathcal{J} \right) \frac{i}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right].$$

После логарифмирования получаем требуемое разложение.

Перейдем теперь к случаю

$$f(x) = (x - x^-)(x - x^+)h(x), \quad h(x) > 0, \quad b_0 \leq x \leq b_1, \quad (8)$$

где $b_0 < x^- < x^+ < b_1$.

ТЕОРЕМА 3 (Спектр задачи с двумя точками поворота). *Собственные значения задачи (1), (2) при условиях (8), (4) можно расположить в две серии, каждая из которых допускает асимптотическое разложение по степеням $1/t$ с точностью до $O(1/t^{n+1})$. В частности, при $f \in C^6$, $q \in C^2$ имеем*

$$\lambda_m^j = \frac{2\pi}{\mathcal{J}} m + (-1)^j \frac{\pi}{2\mathcal{J}} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{5/36}{\mathcal{J}} + \frac{1}{4} \mathcal{J} \right) \frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \quad j = 1, 2.$$

Если ограничиться только тремя членами разложения, то обе серии склеиваются в одну

$$\lambda_m = \frac{\pi}{\mathcal{J}} m - \frac{\pi}{2\mathcal{J}} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{5/36}{\mathcal{J}} + \frac{1}{4} \mathcal{J} \right) \frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Величины $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ вычисляются по формулам (6), причем в определении (7) функции $\xi(x)$ точка $a \in \Delta = [x^-, x^+]$ выбирается так, чтобы

$$\int_{x^-}^a \sqrt{f_-} dx = \int_a^{x^+} \sqrt{f_-} dx =: \alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже мы докажем методом “склейки”, что уравнение на собственные значения в данном случае имеет вид $\det \mathbf{A} = O(1/\lambda^\infty)$, где

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} u^-(a) & u^+(a) \\ \dot{u}^-(a) & \dot{u}^+(a) \end{vmatrix},$$

$u^\pm(x)$ – решения, даваемые теоремой 1 на отрезках $[a, b_1]$ и $[b_0, a]$. После подстановки получим

$$\Phi \cdot e^{4i\alpha\lambda} - 2 \cdot \operatorname{Re} \Omega \cdot e^{2i\alpha\lambda} + \overline{\Phi} = 0,$$

где

$$\Phi = \mathcal{Q}^- \overset{*}{\mathcal{Q}}^+ - \mathcal{Q}^+ \overset{*}{\mathcal{Q}}^-, \quad \Omega = \mathcal{Q}^- \overset{*}{\mathcal{Q}}^+ - \mathcal{Q}^+ \overset{*}{\mathcal{Q}}^-.$$

Это квадратное уравнение относительно $e^{2i\alpha\lambda}$ дает две серии собственных значений. Однако, если положить $n = 1$ в теореме 1, то, как показывает непосредственная подстановка, $\operatorname{Re} \Omega = O(1/\lambda^2)$ и уравнение становится линейным относительно $e^{4i\alpha\lambda}$:

$$e^{4i\alpha\lambda} = - \left[1 + \left(\frac{5/36}{\alpha} + \frac{1}{2} \mathcal{J} \right) \frac{2i}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right].$$

Отсюда получаются требуемые разложения.

Задача с конечным числом точек поворота. Предположим для определенности, что $f(A) < 0$, $f(B) > 0$. Это ограничение несущественно, так как другие возможные случаи рассматриваются аналогично и приводят к тому же результату. Пусть

$$f(x) = (x - x_0^+) \cdot \prod_{k=1}^r [(x - x_k^-)(x - x_k^+)] \cdot h(x), \quad h(x) > 0, \quad A \leq x \leq B,$$

где $A < x_0^+ < x_1^- < x_1^+ < \dots < x_r^- < x_r^+ < B$.

ТЕОРЕМА 4 (Спектр задачи с конечным числом точек поворота). Обозначим через Δ_k^* , $k = 0, 1, \dots, r$, отрезки, на которые произвольные точки $b_k \in (x_k^+, x_{k+1}^-)$ разбивают отрезок $[A, B]$. Пусть $\lambda_{k,m}$ – собственные значения задач на отрезках Δ_k^* с нулевыми краевыми условиями. Тогда при выполнении условий гладкости (4) собственные значения задачи на всем отрезке можно расположить в $r+1$ серий, асимптотики которых будут совпадать с $\lambda_{k,m}$, $k = 0, 1, \dots, r$.

Таким образом, собственные значения задачи можно расположить в $2r+1$ серий, асимптотики которых выписываются с точностью до $O(1/m^{n+1})$. Если же ограничиться только тремя членами асимптотики, то серии, отвечающие отрезкам $\Delta_k^* = [b_{k-1}, b_k]$, $k = 1, \dots, r$, склеиваются и их общее число сокращается до $r+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем точки $a_k \in (x_k^-, x_k^+)$ и обозначим $a_0 = A$, $b_r = B$. Пользуясь теоремой 1, выпишем общие решения: $y(x) = c_k^+ v_k^+(x) + d_k^+ u_k^+(x)$ на $[a_k, b_k]$ и $y(x) = c_k^- v_k^-(x) + d_k^- u_k^-(x)$ на $[b_k, a_{k+1}]$. Число λ является собственным значением, когда существует ненулевой вектор $(\dots, c_k^+, d_k^+, c_k^-, d_k^-, \dots)$, для которого значения решений и их производных совпадают в точках склейки a_k, b_k и, кроме того, выполняются краевые условия в концевых точках A и B . Это условие можно записать в виде: $\det \mathbf{Y} = 0$, где

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Z}_1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mathbf{X}_{r-1} & \mathbf{Y}_{r-1} & \mathbf{Z}_{r-1} \\ & & & \mathbf{X}_r & \mathbf{Y}_r \end{vmatrix}; \quad \mathbf{Y}_k = \begin{vmatrix} u_{k-1}^-(a_k) & -v_k^+(a_k) & -u_k^+(a_k) & 0 \\ \dot{u}_{k-1}^-(a_k) & -\dot{v}_k^+(a_k) & -\dot{u}_k^+(a_k) & 0 \\ 0 & v_k^+(b_k) & u_k^+(b_k) & -v_k^-(b_k) \\ 0 & \dot{v}_k^+(b_k) & \dot{u}_k^+(b_k) & -\dot{v}_k^-(b_k) \end{vmatrix},$$

$$k = 1, \dots, r-1,$$

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{vmatrix} v_0^+(a_0) & u_0^+(a_0) & 0 \\ v_0^+(b_0) & u_0^+(b_0) & -v_0^-(b_0) \\ \dot{v}_0^+(b_0) & \dot{u}_0^+(b_0) & -\dot{v}_0^-(b_0) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{Y}_r = \begin{vmatrix} u_{r-1}^-(a_r) & -v_r^+(a_r) & -u_r^+(a_r) \\ \dot{u}_{r-1}^-(a_r) & -\dot{v}_r^+(a_r) & -\dot{u}_r^+(a_r) \\ 0 & v_r^+(b_r) & u_r^+(b_r) \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{X}_k = \begin{vmatrix} 0 & \chi_k \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \chi_k = \begin{vmatrix} v_{k-1}^-(a_k) \\ \dot{v}_{k-1}^-(a_k) \end{vmatrix}; \quad \mathbf{Z}_k = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \zeta_k & 0 \end{vmatrix}, \quad \zeta_k = \begin{vmatrix} -u_k^-(b_k) \\ -\dot{u}_k^-(b_k) \end{vmatrix}.$$

По теореме 1 элементы $u_k^\pm(b_k)$, $\dot{u}_k^\pm(b_k)$ имеют порядок $O(1/\lambda^\infty)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, а все остальные элементы матриц – порядок $O(\lambda)$. Поэтому определители распадаются:

$$\det \mathbf{Y} = \prod_{k=0}^r \det \mathbf{Y}_k + O\left(\frac{1}{\lambda^\infty}\right) = (-1)^r u_0^+(a_0) \cdot \prod_{k=1}^r \det \mathbf{A}_k \cdot \prod_{k=0}^{r-1} \det \mathbf{B}_k \cdot v_r^+(b_r) + O\left(\frac{1}{\lambda^\infty}\right),$$

где

$$\mathbf{A}_k = \begin{vmatrix} u_{k-1}^-(a_k) & u_k^+(a_k) \\ \dot{u}_{k-1}^-(a_k) & \dot{u}_k^+(a_k) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B}_k = \begin{vmatrix} v_k^+(b_k) & v_k^-(b_k) \\ \dot{v}_k^+(b_k) & \dot{v}_k^-(b_k) \end{vmatrix}.$$

Из теоремы 1 следует, что $(1/\lambda) \det \mathbf{B}_k$ и $v_k^\pm(b_k)$ асимптотически эквивалентны ненулевым константам, поэтому условие $\det \mathbf{Y} = 0$ запишется в виде

$$u_0^+(a_0) \cdot \prod_{k=1}^r \det \mathbf{A}_k = O\left(\frac{1}{\lambda^\infty}\right).$$

Теперь утверждение теоремы очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Даже в случае двух точек поворота, когда функция $f(x)$ отрицательна в концах отрезка, положительную часть спектра в общем случае нельзя описать формулой вида $c_1 m + c_0 + O(1/m)$, так как асимптотические разложения разных серий могут различаться уже в главном члене.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Асимптотика каждой серии собственных значений зависит только от поведения функций $f(x)$, $q(x)$ на соответствующем отрезке $\Delta \subset \Delta_k^*$, где $f(x) \leq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Описанный метод позволяет находить и собственные значения вида $\lambda = i\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda} > 0$. Для этого надо лишь сделать замену $f(x) = -\tilde{f}(x)$. В этом случае решающую роль будут играть участки, на которых $f(x) \geq 0$.

Автор благодарит проф. А. А. Шкаликова за постановку задачи и ценные советы. В частности, им предложен метод “склейки”.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mingarelli A. B. // Lecture Notes in Math. 1982. V. 964. P. 519–528. 2. Atkinson F. V., Mingarelli A. B. // J. Reine Angew. Math. 1987. V. 375. P. 380–393. 3. Пятков С. Г. // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 93–116. 4. Olver F. W. Asymptotic and Special Functions. New York: Acad. Press, 1974.