Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Манакова, А. Г. Дыльков, Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 225–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 07:03:57

Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа

Н. А. Манакова, А. Г. Дыльков

В работе исследовано оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа. Полученные абстрактные результаты применены к линейной модели Хоффа на графе.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm9283

Введение. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, а оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, функции $u: [0, \tau) \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{U}$, $y: [0, \tau) \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{Y}$, $\tau < \infty$, подлежат дальнейшему определению. Введем в рассмотрение L -резольвентное множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\},$$

L -спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M , соответственно правую и левую L -резольвенты оператора M (см. [1])

$$R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно оператора L* (или просто (L, σ) -ограниченным), если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Оператор M называется (L, p) -ограниченным, если он (L, σ) -ограничен и ∞ – несущественно особая точка L -резольвенты оператора M (т.е. ∞ – устранимая особая точка или полюс порядка $p \in \mathbb{N}$).

В дальнейшем будем считать, что оператор M (L, p) -ограничен. Тогда существуют аналитические группы операторов [1]

$$X^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu \quad \text{и} \quad Y^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu,$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Положим

$$\mathfrak{X}^0(\mathfrak{Y}^0) = \ker X^\bullet(\ker Y^\bullet), \quad \mathfrak{X}^1(\mathfrak{Y}^1) = \text{im } X^\bullet(\text{im } Y^\bullet)$$

и обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{X}^k$, $k = 0, 1$.

Далее, пусть L -спектр оператора M представим в виде

$$\sigma^L(M) = \sigma_{\text{fin}}^L(M) \cup \sigma_{\text{in}}^L(M), \quad \sigma_{\text{fin}}^L(M) \cap \sigma_{\text{in}}^L(M) = \emptyset. \quad (0.1)$$

Операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) d\mu$$

– проекторы, $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$, и $\ker P = \mathfrak{X}^0$, $\ker Q = \mathfrak{Y}^0$, $\text{im } P = \mathfrak{X}^1$, $\text{im } Q = \mathfrak{Y}^1$. Из существования проекторов и (L, p) -ограниченности оператора M следует, что пространство $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{Y}$) равно прямой сумме ядра и образа проектора P (Q), т.е. $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$ ($\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$) (см. [1]).

Аналогично построим проекторы P_{fin} и P_{in} :

$$P_{\text{fin}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu, \quad P_{\text{in}} = P - P_{\text{fin}}.$$

Здесь контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma_{\text{fin}}^L(M)$.

ТЕОРЕМА 1 [2]. Пусть оператор M (L, p) -ограничен и $\sigma^L(M) = \sigma_{\text{fin}}^L(M) \cup \sigma_{\text{in}}^L(M)$, причем $\sigma_{\text{fin}}^L(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$. Тогда существуют проекторы $P_{\text{fin}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ и $Q_{\text{fin}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ такие, что операторы

$$\begin{aligned} L &\in \mathcal{L}(\ker P_{\text{fin}}; \ker Q_{\text{fin}}) \cup \mathcal{L}(\text{im } P_{\text{fin}}; \text{im } Q_{\text{fin}}), \\ M &\in \mathcal{L}(\ker P_{\text{fin}}; \ker Q_{\text{fin}}) \cup \mathcal{L}(\text{im } P_{\text{fin}}; \text{im } Q_{\text{fin}}). \end{aligned}$$

Для уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu \quad (0.2)$$

рассмотрим начально-конечную задачу [3], [4]

$$P_{\text{in}}(x(0) - x_0) = 0, \quad P_{\text{fin}}(x(\tau) - x_{\tau}) = 0, \quad (0.3)$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+$ (для определенности вообще можно $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), $x_0, x_{\tau} \in \mathfrak{X}$.

Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании такой пары $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{\text{ad}}$, для которой выполняется соотношение

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf_{(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{\text{ad}}} J(x, u). \quad (0.4)$$

Здесь $J(x, u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества; управление $u \in \mathfrak{U}_{\text{ad}}$, где $\mathfrak{U}_{\text{ad}}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$, а все $x \in \mathfrak{X}$ – решения задачи (0.2), (0.3). Таким образом, оптимальное управление решениями задачи (0.2)–(0.4) дает возможность минимизировать штрафные санкции.

Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики (см. обстоятельные обзоры в [5], [6]). Оптимальное управление линейными уравнениями с условиями Коши впервые изучалось в [1; гл. 7]. Условия (0.3) являются обобщением задачи Шоуолтера–Сидорова [7]. В работе [8] предложен численный алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа. Оптимальное управление для полулинейных уравнений соболевского типа рассматривалось в работе [9]. Наш подход основан на идеях и методах [1], [10], [11].

1. Сильные решения. Для линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + f \quad (1.1)$$

рассмотрим начально-конечную задачу (0.3).

ТЕОРЕМА 2 [2]. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, причем выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и вектор-функции $f \in C^p([0, \tau]; \mathfrak{Y}) \cap C^{p+1}((0, \tau); \mathfrak{Y})$ существует единственное решение задачи (0.3), (1.1), которое имеет к тому же вид

$$\begin{aligned} x(t) = & - \sum_{q=0}^p (M_0^{-1} L_0)^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t) \\ & + U_{\text{in}}^t x_0 + \int_0^t R_{\text{in}}^{t-s} f^{\text{in}}(s) ds + U_{\text{fin}}^{t-\tau} x_\tau - \int_t^\tau R_{\text{fin}}^{t-s} f^{\text{fin}}(s) ds, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} U_{\text{in}}^t &= (2\pi i)^{-1} \left(\int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu - \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \right), \\ R_{\text{in}}^t &= (2\pi i)^{-1} \left(\int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu - \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu \right), \\ U_{\text{fin}}^t &= (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad R_{\text{fin}}^t = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \\ f^0 &= (\mathbb{I} - Q)f, \quad f^{\text{fin}(\text{in})} = Q_{\text{fin}(\text{in})}f. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вектор-функцию

$$x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X})\}$$

назовем *сильным решением уравнения (1.1)*, если она п.в. на $(0, \tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (1.1) назовем *сильным решением начально-конечной задачи*, если оно удовлетворяет (0.3) (см. [1]).

В силу непрерывности вложения $H^1(\mathfrak{X}) \hookrightarrow C([0, \tau]; \mathfrak{X})$ наше определение корректно. Термин “сильное решение” введен для того, чтобы отличать решение уравнения (1.1) в данном смысле от решения (1.2), которое теперь уместно называть “классическим”. Заметим, что классическое решение (1.2) является также и сильным решением задачи (0.3), (1.1).

Построим пространства

$$H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}) : v^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Пространство $H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ гильбертово со скалярным произведением

$$[v, w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle v^{(q)}, w^{(q)} \rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

Пусть $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$. Введем в рассмотрение операторы

$$\begin{aligned} A_1 f(t) &= - \sum_{q=0}^p (M_0^{-1} L_0)^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t), & k_1(t) &= U_{\text{in}}^t x_0, \\ A_2 f(t) &= \int_0^t R_{\text{in}}^{t-s} f^{\text{in}}(s) ds, & k_2(t) &= U_{\text{fin}}^{t-\tau} x_\tau, \\ A_3 f(t) &= \int_t^\tau R_{\text{fin}}^{t-s} f^{\text{fin}}(s) ds. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Пусть оператор M (L, p) -ограничен. Тогда

- (i) $A_1 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}); H^1(\mathfrak{X}))$;
- (ii) при любом $x_0 \in \mathfrak{X}$ вектор-функция $k_1 \in C^1([0, \tau]; \mathfrak{X})$;
- (iii) $A_2 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}); H^1(\mathfrak{X}))$;
- (iv) при любом $x_\tau \in \mathfrak{X}$ вектор-функция $k_2 \in C^1([0, \tau]; \mathfrak{X})$;
- (v) $A_3 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}); H^1(\mathfrak{X}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Очевидно, что

$$\begin{aligned} \|A_1 f\|_{H^1(\mathfrak{X}^0)} &\leq \sum_{q=0}^p \|(M_0^{-1} L_0)^q M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f^{(q)}\|_{H^1(\mathfrak{X}^0)} \\ &\leq \sum_{q=0}^p \|(M_0^{-1} L_0)^q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)} \|M_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0; \mathfrak{X}^0)} \|f^{(q)}\|_{H^1(\mathfrak{X}^0)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем требуемое.

(ii) Пусть $x_0 \in \mathfrak{X}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} k_1(t) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} (\mu L - M + M) x_0 e^{\mu t} d\mu \right. \\ &\quad \left. - \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} (\mu L - M + M) x_0 e^{\mu t} d\mu \right) \\ &= R_{\text{in}}^t M x_0 = R_{\text{in}}^t Q_{\text{in}} M x_0 = R_{\text{in}}^t M_{1 \text{ in}} P_{\text{in}} x_0. \end{aligned}$$

Следовательно, вектор-функция $k_1'(t)$ непрерывна на $[0, \tau)$.

(iii) Если $p = 0$, то

$$A_2 f \in C([0, \tau]; \mathfrak{X}) \cap C^1((0, \tau); \mathfrak{X}),$$

поэтому (ii) выполняется.

Для $p \neq 0$ доказательство вытекает из вложения $H^{p+1}(\mathfrak{Y}) \hookrightarrow H^1(\mathfrak{Y})$.

(iv) Доказывается аналогично (ii).

(v) Доказывается аналогично (iii).

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (0.3), (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя на уравнение (1.1) последовательно проекторами $\mathbb{I} - Q$ и $Q_{\text{fin}(\text{in})}$ и пользуясь теоремой 1, сведем его к эквивалентной системе из трех независимых уравнений

$$H\dot{x}^0 = x^0, \quad x^0(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\dot{x}^{\text{fin}} = S_{\text{fin}}x^{\text{fin}}, \quad x^{\text{fin}}(\tau) = 0, \quad (1.4)$$

$$\dot{x}^{\text{in}} = S_{\text{in}}x^{\text{in}}, \quad x^{\text{in}}(0) = 0, \quad (1.5)$$

где $H = M_0^{-1}L_0$, $S_{\text{fin}(\text{in})} = L_{1\text{fin}(\text{in})}^{-1}M_{1\text{fin}(\text{in})} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_{\text{fin}(\text{in})}^1)$. Здесь $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$ – два решения задачи (0.3), (1.1).

В теории, развитой в монографии [1], доказано, что в случае (L, p) -ограниченности оператора M любая цепочка M -присоединенных векторов (см. [1; гл. 4, § 3]) любого собственного вектора оператора L (под собственным вектором оператора L мы понимаем любой вектор $g = \ker L \setminus \{0\}$) имеет конечную длину p . Откуда с учетом непрерывности оператора M_0^{-1} и замкнутости подпространства $\mathfrak{X}^0$ оператор H нильпотентен со степенью p .

В силу нильпотентности оператора H из уравнения (1.3) получаем

$$H^{p+1}\dot{x}^0 = H^p x^0 = 0.$$

Продолжая этот процесс, убеждаемся, что $x^0 = 0$. Равенство нулю решений задач (1.4), (1.5) следует из ограниченности операторов S_{in} , S_{fin} .

2. Оптимальное управление. Для линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu \quad (2.1)$$

рассмотрим начально-конечную задачу (0.3), где функции x , y и u лежат в гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ соответственно. Операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, оператор M (L, p) -ограничен.

Введем в рассмотрение пространство управлений

$$H^{p+1}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0, \tau; \mathfrak{U}) : u^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{U}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Пространство $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ гильбертово в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$ со скалярным произведением

$$[v, w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle v^{(q)}, w^{(q)} \rangle_{\mathfrak{U}} dt.$$

Выделим в пространстве $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ – множество допустимых управлений.

Введем в рассмотрение $\mathfrak{Z}$ – некоторое гильбертово пространство наблюдений и оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Z})$, задающий наблюдение $z(t) = Cx(t)$. Заметим, что если $x \in H^1(\mathfrak{X})$, то $z \in H^1(\mathfrak{Z})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вектор-функцию $\hat{u} \in H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением решениями задачи* (2.1), (0.3), если

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min_{(x, u) \in \mathfrak{X} \times H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})} J(x, u), \quad (2.2)$$

где все $x \in \mathfrak{X}$ – решения задачи (2.1), (0.3).

Нашей целью является доказательство существования единственного управления $\hat{u} \in H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U})$, минимизирующего функционал стоимости

$$J(x, u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \|z^{(q)} - z_0^{(q)}\|_3^2 dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^{\tau} \langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \rangle_{\mathfrak{U}} dt. \quad (2.3)$$

Здесь $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \dots, p+1$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $z_0 = z_0(t)$ – желаемое наблюдение. Справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_{\tau} \in \mathfrak{X}$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (2.1), (0.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 при любых $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_{\tau} \in \mathfrak{X}$ и $u \in H^{p+1}(\mathfrak{U})$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи (2.1), (0.3), имеющее вид

$$x(t) = (A_1 + A_2 - A_3)(y + Bu)(t) + k_1(t) + k_2(t), \quad (2.4)$$

где операторы A_1, A_2, A_3 и вектор-функции k_1, k_2 заданы в лемме 1.

Зафиксируем $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_{\tau} \in \mathfrak{X}$ и рассмотрим (2.4) как отображение $D: u \rightarrow x(u)$. Тогда отображение $D: H^{p+1}(\mathfrak{U}) \rightarrow H^1(\mathfrak{X})$ определено непрерывно. Поэтому функционал стоимости зависит только от u , т.е. $J(u) = J(x, u)$.

Перепишем функционал стоимости (2.3) в виде

$$J(u) = \|Cx(t, u) - z_0\|_{H^1(3)}^2 + [v, u],$$

где $v^{(q)}(t) = N_q u^{(q)}(t)$, $q = 0, \dots, p+1$. Отсюда

$$J(u) = \pi(u, u) - 2\lambda(u) + \|z_0 - Cx(t, 0)\|_{H^1(3)}^2,$$

где

$$\pi(u, u) = \|C(x(t, u) - x(t, 0))\|_{H^1(3)}^2 + [v, u]$$

– билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $H^{p+1}(\mathfrak{U})$, а

$$\lambda(u) = \langle z_0 - Cx(t, 0), C(x(t, u) - x(t, 0)) \rangle_{H^1(3)}$$

– линейная непрерывная на $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ форма. Следовательно, существует и притом единственный элемент $\hat{u} \in H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U})$, для которого

$$J(\hat{u}) = \min_{u \in H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U})} J(u)$$

(см. [10; гл. 1, § 1, теорема 1.1]).

3. Необходимое условие оптимального управления. Как показано в [10; гл. 1, § 1, теорема 1.3], управление $\hat{u} \in H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U})$ оптимально тогда и только тогда, когда

$$J'(\hat{u}) \cdot (u - \hat{u}) \geq 0 \quad \forall u \in H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U}),$$

т.е. для функционала (2.3) выполняется соотношение

$$\langle Cx(t, \hat{u}) - z_0, C(x(t, u) - x(t, \hat{u})) \rangle_{H^1(3)} + [\hat{u}, u - \hat{u}] \geq 0 \quad \forall u \in H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U}), \quad (3.1)$$

где

$$[\hat{u}, u - \hat{u}] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle N_q \hat{u}^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - \hat{u}^{(q)}(t) \rangle_{\mathfrak{U}} dt$$

– билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $H^{p+1}(\mathfrak{U})$.

Введем в рассмотрение изоморфизмы

$$\Lambda: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}^*, \quad \Lambda_{\mathfrak{U}}: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*.$$

Тогда неравенство (3.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \langle C^* \Lambda(Cx(t, \hat{u}) - z_0), x(t, u) - x(t, \hat{u}) \rangle_{H^1(\mathfrak{Z})} \\ & + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle N_q \hat{u}^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - \hat{u}^{(q)}(t) \rangle \geq 0 \quad \forall u \in H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пусть $\mathfrak{X}^*, \mathfrak{Y}^*$ – сопряженные пространства к $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ соответственно. Зафиксируем некоторые векторы $x_0^*, x_\tau^* \in \mathfrak{X}^*$. Операторы $L^*, M^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^*; \mathfrak{X}^*)$. Введем в рассмотрение L^* -резольвентное множество

$$\rho^{L^*}(M^*) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L^* - M^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^*; \mathfrak{Y}^*)\}$$

и L^* -спектр $\sigma^{L^*}(M^*) = \mathbb{C} \setminus \rho^{L^*}(M^*)$ оператора M^* (см. [1; гл. 7]).

ЛЕММА 2 [1; гл. 7]. Пусть пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ гильбертовы. Тогда оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ (L, p) -ограничен тогда и только тогда, когда оператор $M^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^*; \mathfrak{X}^*)$ (L^*, p) -ограничен.

Тогда L^* -спектр оператора M^* разбивается на

$$\sigma^{L^*}(M^*) = \sigma_{\text{fin}}^{L^*}(M^*) \cup \sigma_{\text{in}}^{L^*}(M^*), \quad \sigma_{\text{fin}}^{L^*}(M^*) \cap \sigma_{\text{in}}^{L^*}(M^*) = \emptyset.$$

Операторы

$$P^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^{L^*}(M^*) d\mu, \quad Q^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^{L^*}(M^*) d\mu$$

– проекторы, $P^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^*)$, $Q^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^*)$. Здесь $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – замкнутый контур, ограничивающий область, содержащую $\sigma^{L^*}(M^*)$; $R_{\mu}^{L^*} = (\mu L^* - M^*)^{-1} L^*$ – правая, а $L_{\mu}^{L^*} = L^* (\mu L^* - M^*)^{-1}$ – левая L^* -резольвенты оператора M^* . Положим

$$\mathfrak{X}^{*0} = \ker Q^*, \quad \mathfrak{Y}^{*0} = \ker P^*, \quad \mathfrak{X}^{*1} = \text{im } Q^*, \quad \mathfrak{Y}^{*1} = \text{im } P^*.$$

Аналогично построим проекторы P_{fin}^* и P_{in}^* :

$$P_{\text{fin}}^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^{L^*}(M^*) d\mu, \quad P_{\text{in}}^* = P^* - P_{\text{fin}}^*.$$

Здесь контур $\gamma \in \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma_{\text{fin}}^{L^*}(M^*)$ оператора.

Теперь определим сопряженное состояние задачи (2.1), (0.3) $\xi(t, u) \in H^{p+1}(\mathfrak{Y}^*)$ как решение уравнения

$$-L^* \dot{\xi} = M^* \xi + C^* \Lambda(Cx(t, u) - z_0) \quad (3.3)$$

на интервале $(0; \tau)$, снабженного начально-конечным условием

$$P_{\text{in}}^* \xi(\tau) = 0, \quad P_{\text{fin}}^* \xi(0) = 0. \quad (3.4)$$

Аналогично п. 2 показывается справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть пространства $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ гильбертовы и оператор M (L, p) -ограничен. Тогда существует единственное решение $\xi(t, u) \in H^1(\mathfrak{Y}^*)$ задачи (3.3), (3.4).

В случае $p = 0$ справедливо необходимое и достаточное условие существования оптимального управления.

ТЕОРЕМА 6. Пусть оператор M $(L, 0)$ -ограничен. Тогда при любых $y \in H^1(\mathfrak{Y})$ и $x \in H^1(\mathfrak{X})$ оптимальное управление $\hat{u} \in H_{\partial}^1(\mathfrak{U})$ для задачи (2.1), (0.3) характеризуется соотношениями (3.3), (3.4) и для всех $u \in H_{\partial}^1(\mathfrak{U})$ выполняется неравенство

$$\langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1} B^* \xi(t, \hat{u}), u(t) - \hat{u}(t) \rangle_{H^1(\mathfrak{Z})} + \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \langle N_q \hat{u}^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - \hat{u}^{(q)}(t) \rangle_{\mathfrak{U}} dt \geq 0$$

где

$$x(t, \hat{u}) \in H^1(\mathfrak{X}), \quad \xi(t, \hat{u}) \in H^1(\mathfrak{Y}^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор-функция $\hat{x}(t, u) = x(t, u) - x(t, \hat{u})$ является решением начально-конечной задачи

$$P_{\text{in}}(x(0)) = 0, \quad P_{\text{fin}}(x(\tau)) = 0 \quad (3.5)$$

для уравнения

$$L\dot{\hat{x}} = M\hat{x} + B(u - \hat{u}).$$

Действуя на данное уравнение последовательно проекторами $\mathbb{I} - Q$ и $Q_{\text{fin}(\text{in})}$, сведем данную задачу к трем эквивалентным задачам

$$H\dot{\hat{x}}^0 = \hat{x}^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)B(u - \hat{u}), \quad (3.6)$$

$$L_{1\text{fin}}\dot{\hat{x}}^{\text{fin}} = M_{1\text{fin}}\hat{x}^{\text{fin}} + Q_{\text{fin}}B(u - \hat{u}), \quad P_{\text{fin}}(x(\tau)) = 0, \quad (3.7)$$

$$L_{1\text{in}}\dot{\hat{x}}^{\text{in}} = M_{1\text{in}}\hat{x}^{\text{in}} + Q_{\text{in}}B(u - \hat{u}), \quad P_{\text{in}}(x(0)) = 0. \quad (3.8)$$

Умножим (3.7) скалярно на $\xi^{\text{fin}}(t, \hat{u})$ и проинтегрируем по интервалу $(0, \tau)$. Получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} \langle L_{1\text{fin}}\dot{\hat{x}}^{\text{fin}}(t, u) - L_{1\text{fin}}\dot{\hat{x}}^{\text{fin}}(t, \hat{u}), \xi^{\text{fin}} \rangle dt \\ &= \int_0^{\tau} [\langle M_{1\text{fin}}\hat{x}^{\text{fin}}(t, u) - M_{1\text{fin}}\hat{x}^{\text{fin}}(t, \hat{u}), \xi^{\text{fin}} \rangle + \langle Q_{\text{fin}}B(u - \hat{u}), \xi^{\text{fin}} \rangle] dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям левую часть последнего равенства, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} \langle L_{1\text{fin}}\dot{\hat{x}}^{\text{fin}}(t, u) - L_{1\text{fin}}\dot{\hat{x}}^{\text{fin}}(t, \hat{u}), \xi^{\text{fin}} \rangle dt \\ &= \langle L_{1\text{fin}}\hat{x}^{\text{fin}}(t, u) - L_{1\text{fin}}\hat{x}^{\text{fin}}(t, \hat{u}), \xi^{\text{fin}}(t) \rangle \Big|_0^{\tau} - \int_0^{\tau} \langle L_{1\text{fin}}^* \dot{\xi}^{\text{fin}}, \hat{x}^{\text{fin}}(t, u) - \hat{x}^{\text{fin}}(t, \hat{u}) \rangle dt, \end{aligned}$$

откуда, применяя условия (3.4), (3.5),

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau -\langle L_{1\text{fin}}^* \dot{\xi}^{\text{fin}}, x^{\text{fin}}(t, u) - x^{\text{fin}}(t, \hat{u}) \rangle dt \\ &= \int_0^\tau [\langle M_{1\text{fin}}^* \xi^{\text{fin}}, x^{\text{fin}}(t, u) - x^{\text{fin}}(t, \hat{u}) \rangle + \langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1} B^* Q_{\text{fin}}^* \xi^{\text{fin}}, (u - \hat{u}) \rangle] dt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Аналогично найдем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau -\langle L_{1\text{in}}^* \dot{\xi}^{\text{in}}, x^{\text{in}}(t, u) - x^{\text{in}}(t, \hat{u}) \rangle dt \\ &= \int_0^\tau [\langle M_{1\text{in}}^* \xi^{\text{in}}, x^{\text{in}}(t, u) - x^{\text{in}}(t, \hat{u}) \rangle + \langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1} B^* Q_{\text{in}}^* \xi^{\text{in}}, (u - \hat{u}) \rangle] dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В силу $(L, 0)$ -ограниченности оператора M и нильпотентности оператора H в случае $p = 0$ из (3.6) следует, что

$$0 = \hat{x}^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)B(u - \hat{u}).$$

Умножая данное равенство скалярно на $\xi^0(t, \hat{u})$ и интегрируя по интервалу $(0, \tau)$, получаем

$$0 = \int_0^\tau [\langle M_0^* \xi^0, x^0(t, u) - x^0(t, \hat{u}) \rangle + \langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1} B^* (\mathbb{I} - Q)^* \xi^0, (u - \hat{u}) \rangle] dt. \quad (3.11)$$

Суммируя (3.9)–(3.11), будем иметь

$$\int_0^\tau -\langle L^* \dot{\xi}, x(t, u) - x(t, \hat{u}) \rangle dt = \int_0^\tau [\langle M^* \xi, x(t, u) - x(t, \hat{u}) \rangle + \langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1} B^* \xi, (u - \hat{u}) \rangle] dt.$$

Умножим (3.3) скалярно на $x(t, u) - x(t, \hat{u})$ и проинтегрируем по интервалу $(0, \tau)$. Получим

$$\int_0^\tau -\langle L^* \dot{\xi}, x(t, u) - x(t, \hat{u}) \rangle dt = \int_0^\tau \langle M^* \xi + C^* \Lambda(Cx(t; u) - z_0), x(t, u) - x(t, \hat{u}) \rangle dt.$$

Тогда неравенство (3.2) в случае $p = 0$ можно записать в виде

$$\int_0^\tau \langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1} B^* \xi(t, \hat{u}), u(t) - \hat{u}(t) \rangle dt + \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \langle N_q \hat{u}^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - \hat{u}^{(q)}(t) \rangle_{\mathfrak{U}} dt \geq 0,$$

где $u \in H_{\hat{\partial}}^1(\mathfrak{U})$.

4. Линейная модель Хоффа на графе. Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер; причем каждое его ребро E_i имеет длину $l_i \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_i \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим уравнения Хоффа на графе $\mathbf{G}$

$$\lambda x_{jt} + x_{jtss} = \alpha x_j + u_j, \quad (4.1)$$

которые моделируют динамику выпучивания двутавровой балки в конструкции [12]. Здесь функция $x_j = x_j(s, t)$ характеризует отклонение балки от вертикали; $x_{jt} =$

$\partial x_j / \partial t$, $x_{jtss} = \partial^3 x_j / (\partial^2 s \partial t)$, параметры $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ характеризуют нагрузку и свойства материала балок соответственно.

Нас интересуют решения уравнения (4.1), удовлетворяющие следующим условиям:

$$x_j(0, t) = x_k(0, t) = x_m(l_m, t) = x_n(l_n, t), \quad (4.2)$$

где $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i)$, $E_m, E_n \in E^\omega(V_i)$ ($E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ – множество ребер с началом (концом) в вершине V_i), а также

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k x_{ks}(l_k, t) = 0. \quad (4.3)$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$$

со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j ds$$

и банахово пространство

$$\mathfrak{X} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots) : x_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (4.2)}\}$$

с нормой

$$\|x\|_{\mathfrak{X}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (x_{js}^2 + x_j^2) ds.$$

В силу теорем вложения Соболева функции из W_2^1 абсолютно непрерывны, поэтому пространство $\mathfrak{X}$ определено корректно.

Обозначим через $\mathfrak{Y}$ сопряженное к $\mathfrak{X}$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство и формулой

$$\langle Ax, v \rangle = - \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} x_{js} v_{js} ds, \quad x, v \in \mathfrak{X},$$

зададим оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Его спектр $\sigma(A)$ отрицателен, дискретен, конечно-кратен и сгущается только к $-\infty$. Занумеруем собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора A по невозрастанию с учетом кратности. Тогда ортонормированное (в смысле $L_2(\mathbf{G})$) семейство соответствующих собственных функций $\{\varphi_k\}$ оператора A образует базис пространства $\mathfrak{X}$ в силу плотного и непрерывного вложения $\mathfrak{Y}$ в $L_2(\mathbf{G})$.

Формулой

$$N: x \rightarrow (x_{1ss}, x_{2ss}, \dots, x_{jss}, \dots)$$

зададим оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$.

Выберем $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и построим оператор $L = \lambda + N$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, а его спектр $\sigma(L) = \{\lambda + \lambda_k\}$. Оператор M зададим формулой $M = \alpha \mathbb{I}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Тогда начально-конечная задача (0.3) примет вид

$$\sum_{\mu_k \in \sigma_{\text{in}}^L(M)} \langle (x(0) - x_0), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0, \quad \sum_{\mu_k \in \sigma_{\text{fin}}^L(M)} \langle (x(\tau) - x_\tau), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0. \quad (4.4)$$

Таким образом, мы свели задачу (4.1)–(4.4) к задаче (2.1), (0.3).

ЛЕММА 3. При любых $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ оператор $M(L, 0)$ -ограничен.

ТЕОРЕМА 7 [2]. При любых $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $x \in C([0, \tau]; \mathfrak{X}) \cap C^1((0, \tau); \mathfrak{X})$ задачи (4.2)–(4.4) для уравнения (4.1) вида

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum_{\mu_k \in \sigma_{\text{in}}^L(M)} \left[\exp\left(\frac{t\alpha}{\lambda + \lambda_k}\right) \langle x_0, \varphi_k \rangle \varphi_k + \int_0^t \exp\left(\frac{(t-s)\alpha}{\lambda + \lambda_k}\right) \langle u^{\text{in}}(s), \varphi_k \rangle \varphi_k ds \right] \\ & + \sum_{\mu_k \in \sigma_{\text{fin}}^L(M)} \left[\exp\left(\frac{(t-\tau)\alpha}{\lambda + \lambda_k}\right) \langle x_\tau, \varphi_k \rangle \varphi_k \right. \\ & \left. - \int_t^\tau \exp\left(\frac{(t-s)\alpha}{\lambda + \lambda_k}\right) \langle u^{\text{fin}}(s), \varphi_k \rangle \varphi_k ds \right] - \frac{u^0}{\alpha}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение пространство

$$H^1(\mathfrak{U}) = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : \dot{u}_j \in L_2(0, \tau; (0, l_j))\}.$$

Построим операторы

$$\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \rangle = \sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{jkq} (u_{jk}^{(q)})^2(t),$$

где $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k$, φ_k – ортонормированные в смысле $L_2(\mathbf{G})$ функции, ν_{jkq} – положительные числа.

ТЕОРЕМА 8. При любых $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$, $u \in H_{\partial}^{p+1}(\mathfrak{U})$ существует единственное решение задачи (4.1)–(4.4), (2.2).

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить профессора Г. А. Свиридюка за проявленный интерес к работе, строгую, но конструктивную критику, в немалой степени способствующую улучшению статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2003.
- [2] С. А. Загребина, “Задача Шоултера–Сидорова–Веригина для линейных уравнений соболевского типа”, *Неклассические уравнения математической физики*, Труды международной конференции “Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения”, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа, Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2007, 150–157.

- [3] С. А. Загребина, “Начально-конечные задачи для уравнений соболевского типа как обобщения задачи Шоултера–Сидорова”, *Обзор приклад. и пром. математики*, **17:4** (2010), 552–553.
- [4] А. А. Замышляева, А. В. Юзеева, “Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска–Лява на графе”, *Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Матем.*, **3:2** (2010), 85–96.
- [5] G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii, *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **256**, Marcel Dekker, New York, 2003.
- [6] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Математика и прикладная математика, Физматлит, М., 2007.
- [7] Г. А. Свиридюк, С. А. Загребина, “Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа”, *Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Матем.*, **3:1** (2010), 51–72.
- [8] А. В. Келлер, “Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа”, *Обзор приклад. и пром. математики*, **16:2** (2009), 345–346.
- [9] Н. А. Манакова, “Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации”, *Дифференц. уравнения*, **43:9** (2007), 1185–1192.
- [10] Ж.-Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972.
- [11] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Новосибирск, 1999.
- [12] Г. А. Свиридюк, А. А. Баязитова, “О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **1(18)** (2009), 6–17.

Н. А. Манакова

Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск

E-mail: manakova@hotmail.ru

Поступило

12.09.2011

Исправленный вариант

01.04.2012

А. Г. Дыльков

Магнитогорский государственный университет

E-mail: dylkov@yandex.ru