Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, К. В. Панкрашкин, Открытие лакун и расщепление краев зон для волноводов, соединенных периодической системой малых окон, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 665–683

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:18:17

Открытие лакун и расщепление краев зон для волноводов, соединенных периодической системой малых окон

Д. И. Борисов, К. В. Панкрашкин

На примере пары связанных волноводов строится периодический дифференциальный оператор второго порядка в евклидовой области, у которого имеются лакуны в зонном спектре, причем соответствующие зонные функции достигают краев лакун строго внутри зоны Бриллюэна. Пара волноводов моделируется Лапласианом в двух бесконечных полосах различной ширины, имеющих общую внутреннюю границу. На общей границе ставится краевое условие Неймана и вырезается периодическая система малых отверстий, на оставшейся внешней части границы – краевое условие Дирихле. Показано, что путем изменения ширины полос и расстояний между отверстиями можно произвольным образом менять как положение упомянутых экстремумов, так и количество лакун. Вычислены первые члены асимптотик длин лакун и точек экстремума.

Библиография: 26 названий.

DOI: 10.4213/mzm9284

Введение

Хорошо известно, что периодические операторы широкого класса имеют зонный спектр, т.е. спектр является объединением конечных отрезков. Одним из важных вопросов в изучении таких операторов является вопрос о существовании спектральных лакун – открытых интервалов, лежащих вне спектра, концы которых лежат в спектре. Исследование данного свойства мотивировано широким кругом приложений и, в частности, проблемами теории фотонных кристаллов [1].

Классическим примером периодического оператора является одномерный оператор Шрёдингера с периодическим потенциалом (оператор Хилла). Для него концами лакун могут служить лишь те значения энергии, при которых существует нетривиальное периодическое или антипериодическое решение уравнения на собственные значения. Хотя такое положение дел обусловлено особыми свойствами оператора, долгое время оно по умолчанию предполагалось выполненным и для более широкого класса операторов; периодические и антипериодические собственные значения в этом случае заменяются на значения зонных функций при особых

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-91052-NCN1), Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.” (соглашение 14.В37.21.0358), и гранта ГСГ.

значениях квазиимпульса (см. ниже). Обсуждение данного свойства в достаточно общем контексте с аналитической точки зрения появилось лишь относительно недавно в работах [2], [3], которые послужили мотивацией для настоящей статьи. Работа [3] содержит, в частности, несколько примеров достаточно сложных многомерных комбинаторных операторов, у которых концы лакун отвечают промежуточным значениям квазиимпульса, а работа [2] посвящена более детальному анализу $\mathbb{Z}$ -периодических операторов.

Следует однако отметить, что схожие эффекты, а именно достижение экстремумов на промежуточных значениях квазиимпульса и наличие кратных экстремумов, достаточно давно известны в физической литературе как расщепление концов зон (split band edge), которое, в частности, играет существенную роль в замедлении волн в фотонных кристаллах, см. например [4]–[6]. На физическом уровне строгости было замечено, что расщепление концов зон может возникать при сцеплении нескольких $\mathbb{Z}$ -периодических структур с различными характеристиками, см., к примеру, [6]. В данной работе мы придаем этому утверждению строгий смысл на примере двух несимметричных волноводов. Мы рассматриваем систему, состоящую из двух двумерных полос различной ширины, соединенных между собой периодической системой окон. На внешних стенках поставлены условия Дирихле, а на внутренней стенке – условия Неймана. Показано, что при некоторых соотношениях между периодом и шириной волноводов и в предположении малости окон соответствующий оператор (Лапласиан) имеет лакуны, концы которых достигаются на промежуточных значениях квазиимпульса. Заметим, что нами существенно используется факт $\mathbb{Z}$ -периодичности (т.е. периодичности по одному направлению и компактностью по остальным), и на случай систем с многомерной периодичностью слоев полученные результаты, по видимому, не переносятся (см., например, обзор [7], по поводу возможных механизмов открытия лакун в многомерных системах).

Вопросы открытия лакун в связанных и возмущенных волноводах (в ситуациях, отличных от изучаемой в данной статье) уже рассматривались в многочисленных работах. В частности, в работе [8] показано наличие лакун в спектре периодически изогнутого волновода, а работа [9] посвящена исследованию асимптотики зон и лакун изогнутых волноводов в зависимости от поперечного размера. Несколько работ было посвящено исследованию различными методами волноводов, представимых в виде цепочки областей, связанных малыми отверстиями или перемычками [10]–[13]; в этом случае количество лакун неограниченно растет. Наиболее близкими по использованным методам являются статьи [14]–[16], показывающие открытие лакун в цилиндрических волноводах с периодическими локализованными возмущениями вблизи границы. Кроме того, имеется ряд работ в физической литературе [17]–[19], посвященных исследованию лакун в волноводах, возмущенных или связанных с помощью периодически меняющихся краевых условий. Основной вклад настоящей работы состоит в строгом описании эффекта расщепления концов зон в связанных волноводах, который ни в одной из известных нам работ ранее обнаружен не был.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводится строгая постановка задачи и формулируется основной результат, теорема 1.1, доказательству которого посвящены последующие два раздела. Раздел 2 посвящен получению оценки сверху для разности зонных функций связанных и несвязанных волноводов. В разделе 3 более детально анализируются пересечения зонных функций несвязан-

ных волноводов и выводятся асимптотики зонных функций дисперсий связанных волноводов в окрестности этих пересечений.

1. Постановка задачи

Обозначим для удобства $d_+ := \pi$, $d_- = d > 0$, и кроме того, пусть h и ε – параметры, удовлетворяющие $0 \leq \varepsilon < h$. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим бесконечные прямые полосы

$$\Pi_+ := \mathbb{R} \times (0, d_+), \quad \Pi_- := \mathbb{R} \times (-d_-, 0), \quad \Pi := \mathbb{R} \times (-d_-, d_+),$$

и введем оператор H^ε , действующий в $L_2(\Pi)$ как Лапласиан с краевыми условиями Дирихле на прямых $x_2 = \pm d_\pm$ и краевыми условиями Неймана на прямой $x_2 = 0$ за исключением отрезков $\omega_n^\varepsilon := (2nh - \varepsilon, 2nh + \varepsilon) \times \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Понятно, что при $\varepsilon = 0$ мы имеем просто равенство $H^0 = H_+ \oplus H_-$, где $H_\pm$ – Лапласианы в волноводах $\Pi_\pm$ с краевыми условиями Дирихле на прямых $x_2 = \pm d_\pm$ и краевыми условиями Неймана на прямой $x_2 = 0$.

Таким образом, оператор H^0 представляют собой гамильтониан системы, состоящей из двух не взаимодействующих между собой волноводов Π_+ и Π_- , в то время как H^ε описывает те же волноводы, соединенные между собой $2h$ -периодической системой окон ω_n^ε длины 2ε , см. рис. 1.

Рис. 1. Волноводы $\Pi_+ = \mathbb{R} \times (0, \pi)$ и $\Pi_- = \mathbb{R} \times (-d, 0)$, соединенные периодической системой окон. Участки границы, на которых поставлены краевые условия Дирихле и Неймана, помечены символами D и N соответственно. Выделена элементарная ячейка Π^h . Полагаем $\Pi_\pm^h := \Pi^h \cap \Pi_\pm$.

Данная работы посвящена анализу ситуации, когда система волноводов не является симметричной: $d \neq \pi$. Без ограничения общности будем предполагать, что

$$d < \pi. \quad (1.1)$$

Спектры операторов $H_\pm$ хорошо изучены. Выполнено

$$\sigma(H_\pm) = \left[\frac{\pi^2}{4d_\pm^2}, +\infty \right),$$

поэтому в предположении (1.1) спектр оператора H^0 представляет собой полуось $[1/4, +\infty)$. Кроме того, спектры $H_\pm$ и H^0 являются абсолютно непрерывными.

Обозначим через Π^h элементарную ячейку, заданную равенством

$$\Pi^h := \Pi \cap \{x = (x_1, x_2) : |x_1| < h\}.$$

Периодичность по x_1 и применение теории Флоке–Блоха позволяет разложить оператор H^ε в прямой интеграл:

$$H^\varepsilon \simeq \int_{(-\pi, \pi]}^\oplus H^\varepsilon(k) dk, \quad (1.2)$$

где $H^\varepsilon(k)$ – оператор, действующий в $L_2(\Pi^h)$, задаваемый дифференциальным выражением

$$H^\varepsilon(k) = \left(i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{k}{2h} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (1.3)$$

и краевыми условиями

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D^h, \quad (1.4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_N^{h, \varepsilon}, \quad (1.4b)$$

$$u|_{x_1=-h} = u|_{x_1=h}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-h} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=h}, \quad (1.4c)$$

где

$$\Gamma_D^h := \{x = (x_1, d_+) : |x_1| < h\} \cup \{x = (x_1, -d_-) : |x_1| < h\},$$

$$\Gamma_N^{h, \varepsilon} := \{x = (x_1, 0) : \varepsilon < |x_1| < h\}.$$

Переменная k в предыдущих формулах обычно называется *квазиимпульсом* либо *блоховским параметром*.

Спектр каждого оператора $H^\varepsilon(k)$ дискретен. Обозначим через $E_l^\varepsilon(k)$, $l \in \mathbb{N}$, его собственные значения, взятые с учетом кратности и занумерованные в неубывающем порядке, $E_l^\varepsilon(k) \leq E_{l+1}^\varepsilon(k)$. Функции $k \mapsto E_l^\varepsilon(k)$, называемые *зонными функциями* (либо *законами дисперсии*, либо *дисперсионными соотношениями*), являются 2π -периодическими, непрерывными и четными (благодаря вещественности Лапласиана), причем спектр оператора H^ε есть не что иное, как объединение образов этих функций,

$$\sigma(H^\varepsilon) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} B_l^\varepsilon, \quad B_l^\varepsilon = E_l^\varepsilon((-\pi, \pi]).$$

Отрезок $B_l^\varepsilon =: [\alpha_l^-, \alpha_l^+]$ называется l -й *зоной оператора* H^ε . В случае, если при некотором $l \in \mathbb{N}$ выполнено строгое неравенство $\alpha_l^+ < \alpha_{l+1}^-$, то интервал $(\alpha_l^+, \alpha_{l+1}^-)$ называется *лакуной* оператора H^ε .

Центральным вопросом нашей работы является вопрос о существовании лакун в спектре H^ε при малых ε , а также вопрос о том, при каких значениях квазиимпульса k достигаются экстремальные значения $\alpha_l^\pm$ законов дисперсии. В частности, будет наглядно показано достижение экстремумов вне особых значений $k = 0$ и $k = \pm\pi$.

Для формулировки основных результатов нам потребуются некоторые дополнительные обозначения. Обозначим $\Pi_\pm^h := \Pi_\pm \cap \{x : |x_1| < h\}$. В пространствах $L_2(\Pi_\pm^h)$ рассмотрим операторы $H_\pm(k)$, заданные дифференциальным выражением (1.3) с краевыми условиями (1.4), где в условии Неймана (1.4b) мы полагаем

$$\Gamma_N^{h, 0} := \{x = (x_1, 0) : |x_1| < h\}.$$

Аналогично (1.2) выполнены разложения

$$H_{\pm} \simeq \int_{(-\pi, \pi]}^{\oplus} H_{\pm}(k) dk.$$

Операторы $H_{\pm}(k)$ имеют дискретные спектры, причем собственные значения и собственные функции вычисляются явно. Собственными значениями являются числа

$$E_{m,p}^{\pm}(k) = \left(\frac{k + 2\pi m}{2h} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{d_{\pm}} \right)^2 \left(p + \frac{1}{2} \right)^2, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad p \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (1.5)$$

при $k \notin \{0, \pi\}$ собственное значение $E_{m,p}^{\pm}(k)$ является простым с собственной функцией

$$\psi_{m,p}(x, y) = e^{(i\pi m x)/h} \cos \left[\frac{\pi}{d_{\pm}} \left(p + \frac{1}{2} \right) y \right], \quad (1.6)$$

в то время как при $k \in \{0, \pi\}$ соответствующее собственное значение имеет кратность два. Спектром оператора $H^0(k)$ является объединение, с учетом кратности, собственных значений $E_{m,p}^+(k)$ и $E_{m,p}^-(k)$ для всех $m \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

Заметим, что кратность спектра неограниченно растет на высоких энергиях: каждая точка спектра E оператора H^0 принадлежит образам $\kappa(E)$ функций $E_{m,p}^{\pm}$, при этом $\kappa(E) \xrightarrow{E \rightarrow +\infty} +\infty$. Наш основной результат, содержащийся в следующей теореме, описывает поведение спектра H^{ε} в окрестности точек E с $\kappa(E) \leq 4$. Заметим, что неравенство $\kappa(E) \leq 4$ автоматически влечет $E < 9/4$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнено неравенство (1.1) и существует точка $k_0 \in (0, \pi)$ и $m, n \in \mathbb{Z}$, для которых выполнены неравенства

$$E_0 := E_{n,0}^+(k_0) = E_{m,0}^-(k_0) < \frac{9}{4}, \quad (1.7a)$$

$$\frac{\partial E_{n,0}^+}{\partial k}(k_0) \cdot \frac{\partial E_{m,0}^-}{\partial k}(k_0) < 0. \quad (1.7b)$$

Тогда для достаточно малых ε в спектре оператора H^{ε} имеется лакуна $(\alpha_l(\varepsilon), \alpha_r(\varepsilon))$, концы которой имеют асимптотику

$$\alpha_j(\varepsilon) = E_0 - \frac{\tau_j}{4h|\ln \varepsilon|} + \mathcal{O}(|\ln \varepsilon|^{-2}), \quad j = l, r, \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_l &:= 2\sqrt{\zeta(1 - \beta^2)} - \beta(\zeta - 1) - \zeta - 1, \\ \tau_r &:= -2\sqrt{\zeta(1 - \beta^2)} - \beta(\zeta - 1) - \zeta - 1, \\ \zeta &:= \frac{\pi}{d}, \quad \beta := \frac{\pi(m + n) + k_0}{\pi(n - m)}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Зонные функции $E_l^{\varepsilon}(k)$ и $E_r^{\varepsilon}(k)$, описывающие точки спектра соответственно левее и правее лакуны $(\alpha_l(\varepsilon), \alpha_r(\varepsilon))$, достигают свои экстремальные значения $\alpha_l(\varepsilon) \equiv \max_{|k| \leq \pi} E_l^{\varepsilon}(k)$ и $\alpha_r(\varepsilon) \equiv \min_{|k| \leq \pi} E_r^{\varepsilon}(k)$ в точках $\pm k_l(\varepsilon)$ и $\pm k_r(\varepsilon)$ соответственно:

$$E_l^{\varepsilon}(\pm k_l(\varepsilon)) = \alpha_l(\varepsilon), \quad E_r^{\varepsilon}(\pm k_r(\varepsilon)) = \alpha_r(\varepsilon).$$

Рис. 2. Схематичное изображение двух возможных конфигураций зонных функций оператора H^0 . Сплошные линии соответствуют функциям $E_{m,p}^+$, пунктирные – функциям $E_{m,p}^-$. (а) Точками помечены пересечения зонных функций, удовлетворяющие условиям теоремы 1.1. (б) Точек, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1, нет.

Имеют место асимптотики

$$\begin{aligned}
 k_{l/r}(\varepsilon) &= k_0 + \frac{\sigma_{l/r}}{\ln \varepsilon} + \mathcal{O}(|\ln \varepsilon|^{-3/2}), \\
 \sigma_l &= -\frac{\beta h}{\pi(n-m)} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta^2}} + \frac{(1-\zeta)h}{2\pi(n-m)}, \\
 \sigma_r &= \frac{\beta h}{\pi(n-m)} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta^2}} + \frac{(1-\zeta)h}{2\pi(n-m)}.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Отметим, что с применением методов работ [20; гл. 9], [21], [22], и более трудоемкого анализа можно получить дальнейшие члены асимптотик (1.10) в виде степеней $1/\ln \varepsilon$. Более того, можно показать некоторые свойства аналитичности относительно $1/\ln \varepsilon$, см. [20], [22], [23].

Заметим, что сформулированная теорема не гарантирует, что неравенства (1.7) выполнены хотя бы для одной комбинации (m, n, k_0) . Более того, легко подобрать параметры таким образом, что это условие не будет выполнено ни в одной точке; к примеру, этого можно достичь, выбрав h достаточно малым (см. рис. 2 для иллюстрации возможных конфигураций). В то же время, для выполнения условий (1.7) хотя бы в одной точке достаточно выполнения неравенств $E_{0,0}^-(0) < E_{-1,0}^+(0) < 9/4$, см. рис. 2 (б). Переписывая это неравенство с учетом явных выражений (1.5), получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть выполнены условия

$$h > \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 + 1}} < d < \pi.$$

Тогда найдется $k_0 \in (0, \pi)$, для которого условия (1.7) выполнены с $n = -1$ и $m = 0$, и оператор H^ε имеет при достаточно малых ε лауну, лежащую в $\mathcal{O}(\ln^{-1} \varepsilon)$ -окрестности соответствующей точки E_0 , причем прилегающие к этой лауне зонные функции достигают соответствующих экстремальных значений в $\mathcal{O}(\ln^{-1} \varepsilon)$ -окрестности соответствующей точки k_0 .

Рис. 3. Открытие лакуны в ситуации теоремы 1.1.

Рис. 3 иллюстрирует поведение зонных функций вблизи точек, где выполнены условия теоремы 1.1. Заметим, что хотя техника доказательства теоремы 1.1 без труда переносится на случаи $k \in \{0, \pi\}$ и позволяет, с привлечением дополнительных вычислений, выяснить поведение зонных функций в соответствующих точках пересечения (область Ω на рис. 3), однако проекции данных участков на ось E в любом случае перекрываются проекциями других участков графиков зонных функций и данные пересечения не вносят вклад в открытие лакуны.

Отметим, что за счет подходящего выбора параметров d и h можно добиться выполнения условий теоремы 1.1 при любом наперед заданном значении квазиимпульса $k_0 \in (0, \pi)$. Аналогично можно добиться наличия любого наперед заданного числа различных точек пересечения в интервале $(1/4, 9/4)$, каждая из которых будет удовлетворять условиям (1.7). Каждая из них будет порождать свою лауну в силу теоремы 1.1. Поэтому за счет подходящего выбора параметров d и h на интервале $(1/4, 9/4)$ можно открыть любое наперед заданное число лакун, причем для каждой из них будет верно утверждение теоремы 1.1. Соответствующие значения k_0 , отвечающие различным лакунам, будут, вообще говоря, различными.

2. Оценка сдвига зонных функций

Важной составляющей доказательства теоремы 1.1 является получение достаточно общей оценки на разность $|E_l^\varepsilon(k) - E_l^0(k)|$. Этому и посвящен настоящий раздел. Требуемая оценка приводится в следующей лемме.

ЛЕММА 2.1. Для каждого $l \in \mathbb{N}$ найдется константа $C_l > 0$ такая, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и всех $k \in (-\pi, \pi]$ выполнено неравенство

$$0 \leq E_l^\varepsilon(k) - E_l^0(k) \leq \frac{C_l}{|\ln \varepsilon|}. \quad (2.1)$$

Для доказательства требуемых оценок мы, аналогично тому, как это уже делалось в сходных ситуациях в работах [10], [11], используем принцип минимакса. Введем в рассмотрение квадратичные формы a_k^0 и a_k^ε , отвечающие операторам $H^0(k)$ и $H^\varepsilon(k)$ соответственно. Стандартные построения показывают, что форма a_k^0 задана выражением

$$a_k^0(u, u) = \int_{\Pi^h} \left(\left| \left(i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{k}{2h} \right) u(x_1, x_2) \right|^2 + \left| \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx_1 dx_2$$

на области определения D^0 , состоящей из функций $u \in W_2^1(\Pi_+^h) \oplus W_2^1(\Pi_-^h)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u|_{\Gamma_D^h} = 0, \quad u|_{x_1=-h} = u|_{x_1=h}. \quad (2.2)$$

В свою очередь, форма a_k^ε является сужением a_k^0 на множество D^ε , состоящее из функций $u \in D^0$, удовлетворяющих, дополнительно к (2.2), условию согласования на окне

$$u^+|_{\omega_0^\varepsilon} = u^-|_{\omega_0^\varepsilon}, \quad (2.3)$$

где под $u^\pm$ понимается сужение u на $\Pi_\pm^h$.

Согласно принципу минимакса [24; теорема XIII.2], для собственных значений $E_l^\varepsilon(k)$ выполнено равенство

$$E_l^\varepsilon(k) = \max_{L \in S_{l-1}} \min_{\substack{u \in D^\varepsilon \cap L \\ u \neq 0}} \frac{a_k^0(u, u)}{\|u\|_{L^2(\Pi^h)}^2}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon \geq 0, \quad (2.4)$$

где через S_m обозначено множество замкнутых подпространств $L^2(\Pi^h)$ коразмерности m , (т.е. $\dim L^\perp = m$ для всех $L \in S_m$). Поскольку $D^\varepsilon \subset D^0$, левая часть неравенства (2.1) напрямую следует из (2.4).

Для доказательства правой части (2.1) воспользуемся подходом, схожим с использованным в [10], [11]. Вначале введем семейство срезающих функций. Пусть $\psi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – бесконечно дифференцируемая функция с $\psi(s) = 1$ при $s \leq 1/2$, и $\psi(s) = 0$ при $s \geq 1$. При $\varepsilon > 0$ введем функции $\Phi_\varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами

$$\Phi_\varepsilon(x) = \psi\left(\left|\frac{\ln|x|}{\ln\varepsilon}\right|\right), \quad x \neq 0, \quad \Phi_\varepsilon(0) = 0.$$

Заметим, что для любой функции $v \in D^0$ произведение $u = \Phi_\varepsilon v$ при достаточно малых ε по-прежнему лежит в D^0 и, кроме того, обращается в нуль вблизи окна ω_0^ε . Поэтому выполнено равенство (2.3) и, соответственно, включение $u \in D^\varepsilon$. Кроме того, обозначая $B_1 = \max_{s \in \mathbb{R}} |\psi'(s)|$, при малых ε имеем оценки

$$\iint_{\Pi^h} |\nabla \Phi_\varepsilon| dx = \frac{2\pi}{|\ln\varepsilon|} \int_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}} \left| \psi' \left(\frac{\ln r}{\ln\varepsilon} \right) \right| dr \leq \frac{2\pi B_1 \sqrt{\varepsilon}}{|\ln\varepsilon|}, \quad (2.5)$$

$$\iint_{\Pi^h} |\nabla \Phi_\varepsilon|^2 dx = \frac{2\pi}{|\ln\varepsilon|^2} \int_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}} \left| \psi' \left(\frac{\ln r}{\ln\varepsilon} \right) \right|^2 \frac{dr}{r} \leq \frac{2\pi B_1^2}{|\ln\varepsilon|^2} \int_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{dr}{r} = \frac{\pi B_1^2}{|\ln\varepsilon|}. \quad (2.6)$$

Пусть теперь $l \in \mathbb{N}$. Зафиксируем собственные функции u_j^k , $j = 1, \dots, l$, оператора $H^0(k)$, отвечающие соответственно собственным значениям $E_j^0(k)$, т.е. $H^0(k)u_j^k =$

$E_j^0(k)u_j^k$, таким образом, чтобы были выполнены условия нормировки

$$\langle u_j^k, u_s^k \rangle_{L^2(\Pi^h)} = \begin{cases} 1, & j = s, \\ 0, & j \neq s. \end{cases}$$

Заметим, что сужения собственных функций u_j^k на прямоугольники $\Pi_{\pm}^h$ либо равны нулю, либо задаются явными выражениями (1.6). Отсюда следует, что можно подобрать константу $B_2 > 0$ такую, что

$$\sup_{x \in \Pi_+^h \cup \Pi_-^h} |u_j^k(x)| + |\nabla u_j^k(x)| \leq B_2, \quad j = 1, \dots, l, \quad k \in (-\pi, \pi],$$

с помощью чего элементарно показывается, что найдется константа $B_3 > 0$ такая, что

$$|\langle \Phi_\varepsilon u_j^k, \Phi_\varepsilon u_s^k \rangle_{L^2(\Pi^h)} - \langle u_j^k, u_s^k \rangle_{L^2(\Pi^h)}| \leq B_3 \varepsilon \quad (2.7)$$

для всех $j, s = 1, \dots, l$ и всех $k \in (-\pi, \pi]$. Из этой последней оценки, в частности, следует линейная независимость l функций $\Phi_\varepsilon u_j^k$, $j = 1, \dots, l$, при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Кроме того, как замечено выше, каждая из этих функций лежит в D^ε .

Рассмотрим теперь произвольное подпространство $L \in S_{l-1}$. Из соображений размерности пересечение $D^\varepsilon \cap L$ содержит как минимум одну линейную комбинацию v вида

$$v = \sum_{j=1}^l b_j \Phi_\varepsilon u_j^k, \quad b = (b_j) \in \mathbb{C}^l \setminus \{0\},$$

причем согласно (2.7) для любого вектора b выполнено

$$\|v\|_{L^2(\Pi^h)}^2 \geq \|b\|_{\mathbb{C}^l}^2 (1 - B_4 \varepsilon)$$

с некоторой константой $B_4 > 0$, не зависящей от ε и k . Элементарными вычислениями получаем

$$\begin{aligned} a_k^0(v, v) &= \sum_{j,s=1}^l \overline{b_j} b_s a_k^0(\Phi_\varepsilon u_j^k, \Phi_\varepsilon u_s^k) \\ &= \sum_{j,s=1}^l \overline{b_j} b_s \left\{ \int_{\Pi^h} \Phi_\varepsilon^2(x) \left[\overline{\left(i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{k}{2h} \right) u_j^k} \left(i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{k}{2h} \right) u_s^k + \frac{\overline{\partial u_j^k}}{\partial x_2} \frac{\partial u_s^k}{\partial x_2} \right] dx \right. \\ &\quad + \int_{\Pi^h} |\nabla \Phi_\varepsilon|^2 \overline{u_j^k} u_s^k dx \\ &\quad + \int_{\Pi^h} \left[\Phi_\varepsilon \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x_1} \left(\overline{\left(i \frac{\partial u_j^k}{\partial x_1} - \frac{k u_j^k}{2h} \right) u_s^k} + \overline{u_j^k} \left(i \frac{\partial u_s^k}{\partial x_1} - \frac{k u_s^k}{2h} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \Phi_\varepsilon \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x_2} \left(\frac{\overline{\partial u_j^k}}{\partial x_2} u_s^k + \overline{u_j^k} \frac{\partial u_s^k}{\partial x_2} \right) \right] dx \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда с применением (2.5) и (2.6) выводим, что для всех $j, s = 1, \dots, l$ и всех $k \in (-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Pi^h} |\nabla \Phi_\varepsilon|^2 \overline{u_j^k} u_s^k dx \right| \leq \frac{B_5}{|\ln \varepsilon|}, \\ & \left| \int_{\Pi^h} \left[\Phi_\varepsilon \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x_1} \left(\left(i \frac{\partial u_j^k}{\partial x_1} - \frac{k u_j^k}{2h} \right) u_s^k + \overline{u_j^k} \left(i \frac{\partial u_s^k}{\partial x_1} - \frac{k u_s^k}{2h} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Phi_\varepsilon \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_j^k}{\partial x_2} u_s^k + \overline{u_j^k} \frac{\partial u_s^k}{\partial x_2} \right) \right] dx \right| \leq \frac{B_6 \sqrt{\varepsilon}}{|\ln \varepsilon|}, \\ & \left| \int_{\Pi^h} \Phi_\varepsilon^2(x) \left[\overline{\left(i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{k}{2h} \right) u_j^k} \left(i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{k}{2h} \right) u_s^k + \frac{\partial \overline{u_j^k}}{\partial x_2} \frac{\partial u_s^k}{\partial x_2} \right] dx - a_k^0(u_j^k, u_s^k) \right| \leq B_7 \varepsilon \end{aligned}$$

с некоторыми положительными константами B_5, B_6, B_7 , не зависящими от k и ε .

Замечая, что $a_k^0(u_j^k, u_s^k) = E_j^0(k) \langle u_j^k, u_s^k \rangle_{L^2(\Pi^h)}$, и объединяя все полученные выше оценки, приходим к

$$a_k^0(v, v) \leq \sum_{j=1}^l E_j^0(k) |b_j|^2 + \frac{B_8 \|b\|_{\mathbb{C}^l}^2}{|\ln \varepsilon|},$$

где константа $B_8 > 0$ не зависит от b, ε и k . Теперь, поскольку выполнено $E_l^0(k) = \max_{j \in \{1, \dots, l\}} E_j^0(k)$, имеем

$$\min_{\substack{u \in D^\varepsilon \cap L \\ v \neq 0}} \frac{a_k^0(u, u)}{\|u\|_{L^2(\Pi^h)}^2} \leq \frac{a_k^0(v, v)}{\|v\|_{L^2(\Pi^h)}^2} \leq \frac{\sum_{j=1}^l E_j^0(k) |b_j|^2 + \frac{B_8 \|b\|_{\mathbb{C}^l}^2}{|\ln \varepsilon|}}{(1 - B_4 \varepsilon) \|b\|_{\mathbb{C}^l}^2} \leq E_l^0(k) + \frac{C_l}{|\ln \varepsilon|}$$

с некоторой константой C_l , не зависящей от b, ε, k . Поскольку подпространство $L \in S_{l-1}$ было произвольным, отсюда в силу принципа минимакса (2.4) следует требуемая оценка в правой части (2.1).

3. Анализ вблизи пересечений зонных функций

В настоящем разделе мы проводим более детальный анализ собственных значений $E_l^\varepsilon(k)$ вблизи $k = k_0$ и завершаем доказательство теоремы 1.1.

Непосредственно из определения функций $E_{m,0}^\pm$ вытекает, что если условия (1.7) выполнены с некоторыми m, n, k_0 , то они выполнены и с $-m, -n, -k_0$, причем значение E_0 остается без изменений. Кроме того, никаких других точек, в которых было бы выполнено (1.7a) с тем же значением E_0 , не существует. Таким образом, из леммы 2.1 вытекает, что для любого числа $A > 0$ и достаточно малых ε существует константа $t_0 = t_0(A) > 0$ такая, что выполнено неравенство

$$\text{dist}(\sigma(H_\varepsilon(k)), E_0) \geq \frac{A}{|\ln \varepsilon|} \quad \text{при} \quad |k - k_0| \geq \frac{t_0}{|\ln \varepsilon|} \quad \text{и} \quad |k + k_0| \geq \frac{t_0}{|\ln \varepsilon|}. \quad (3.1)$$

Следовательно, при k , отстоящих от $\pm k_0$ на достаточно большом расстоянии, спектр оператора $H^\varepsilon(k)$ отделен от точки E_0 на расстояние порядка не менее $\mathcal{O}(|\ln \varepsilon|^{-1})$. Для доказательства теоремы теперь необходимо исследовать поведение спектра оператора $H^\varepsilon(k)$ при $|k - k_0| \leq t_0 |\ln \varepsilon|^{-1}$ и $|k + k_0| \leq t_0 |\ln \varepsilon|^{-1}$. Исследование проведем только в окрестности точки k_0 . Результаты для второго случая затем несложно

получить, используя очевидный факт, что замена $k \mapsto -k$ в операторе $H^\varepsilon(k)$ не меняет собственных значений, а соответствующие собственные функции переходят в комплексно сопряженные.

Будем рассматривать значения k , имеющие вид

$$k_\varepsilon = k_0 + \frac{t}{\ln \varepsilon},$$

где t – вещественный параметр, который меняется на отрезке $[-t_0, t_0]$. В силу леммы 2.1 оператор $H^\varepsilon(k_\varepsilon)$ имеет ровно два собственных значения, сходящихся к E_0 при $\varepsilon \rightarrow +0$. Обозначим их через $E_\varepsilon^{(j)}(t)$, $j = 1, 2$. Будем предполагать упорядочение $E_\varepsilon^{(1)}(t) \leq E_\varepsilon^{(2)}(t)$.

Для построения асимптотик $E_\varepsilon^{(j)}(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ воспользуемся методом согласования асимптотических разложений [25]. Это будет сделано в два этапа: построение формальных асимптотических разложений и строгое их обоснование.

3.1. Построение формальных асимптотик. Асимптотики вышеупомянутых собственных значений будем строить в следующем виде:

$$E_\varepsilon^{(j)}(t) = E_0 + \frac{\mu^{(j)}(t)}{\ln \varepsilon} + \dots, \quad (3.2)$$

где $\mu^{(j)}(t)$ – некоторые константы, подлежащие определению.

Вне малой окрестности окна ω_0^ε асимптотики собственных функций $\psi_\varepsilon^{(j)}$ оператора $H^\varepsilon(k_\varepsilon)$, отвечающих собственным значениям $E_\varepsilon^{(j)}$, будем искать в виде

$$\psi_\varepsilon^{(j)}(x) = e^{i(2\pi m)/(2h)x_1} \left(\phi_0^{(j)}(x) + \frac{\phi_1^{(j)}(x)}{\ln \varepsilon} + \dots \right), \quad (3.3)$$

где

$$\phi_0^{(j)} = \begin{cases} a_+^{(j)} \phi_0^+(x), & x_2 > 0, & \phi_0^+(x) = e^{i(\pi(n-m)/h)x_1} \cos \frac{x_2}{2}, \\ a_-^{(j)} \phi_0^-(x), & x_2 < 0, & \phi_0^-(x) = \cos \frac{\pi x_2}{2d}, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $a_\pm^{(j)}$ – некоторые константы, одновременно не равные нулю. Всюду далее представление (3.3) будем называть *внешним разложением*.

Подставим внешнее разложение и (3.2) в уравнение на собственные значения

$$H^\varepsilon(k) \psi_\varepsilon^{(j)} = E_\varepsilon^{(j)} \psi_\varepsilon^{(j)}, \quad (3.5)$$

и соберем коэффициенты при одинаковых степенях $1/\ln \varepsilon$. Рассмотрение первых двух членов полученного ряда дает следующие задачи на коэффициенты $\phi_1^{(j)}$:

$$\begin{aligned} & \left(\left(i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{k_0 + 2\pi m}{2h} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - E_0 \right) \phi_1^{(j)} \\ &= \left(\mu^{(j)} + \frac{t}{h} \left(i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{k_0 + 2\pi m}{2h} \right) \right) \phi_0^{(j)} \quad \text{в } \Pi^h, \\ & \frac{\partial \phi_1^{(j)}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{на } \Gamma_N^{h,0}, \quad \phi_1^{(j)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_D^h, \end{aligned} \quad (3.6)$$

а на боковых границах области Π^h для функций $\phi_1^{(j)}$ задаются периодические краевые условия (1.4с). Полученные условия распадаются на две независимые задачи в Π_+^h и Π_-^h . Условия их разрешимости в $W_2^1(\Pi_\pm^h)$ – ортогональность правых частей функциям $\phi_0^\pm$ в $L_2(\Pi_\pm^h)$. Нетрудно видеть, что условия разрешимости будут выполнены, только если $a_+^{(j)} = 0$ или $a_-^{(j)} = 0$. Однако в таком случае не удастся провести процедуру согласования асимптотических разложений вблизи окна ω_0^ε . Подобные трудности являются стандартными для задач со сменой типа краевого условия на малом участке границы, см. например [20; гл. 2 и 6] или [25; гл. III, § 1], и обычно преодолеваются рассмотрением задачи (3.6) в более широком смысле. Допустим, что $\phi_1^{(j)}$ имеет логарифмическую особенность в точке сжатия окна ω_0^ε :

$$\phi_1^{(j)}(x) = b_\pm^{(j)} \ln |x| + \tilde{b}_\pm^{(j)} + \mathcal{O}(|x|), \quad x \rightarrow 0, \quad \pm x_2 > 0, \quad (3.7)$$

где $b_\pm^{(j)}, \tilde{b}_\pm^{(j)}$ – некоторые константы, причем вне точки $x = 0$ функция $\phi_1^{(j)}$ предполагается достаточно регулярной и удовлетворяющей всем вышеупомянутым краевым условиям.

Умножим уравнения в (3.6) на $\overline{\phi_0^\pm}$ и проинтегрируем по частям в $\Pi_\pm^h$ с учетом асимптотики (3.7). Это дает необходимые условия разрешимости задач (3.6):

$$\begin{aligned} \pi b_+^{(j)} &= a_+^{(j)} \left(\pi h \mu^{(j)} - \frac{\pi t}{2h} (2\pi n + k_0) \right), \\ \pi b_-^{(j)} &= a_-^{(j)} \left(h \mu^{(j)} d - \frac{td}{2h} (2\pi m + k_0) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

С привлечением стандартных рассуждений, см., например, [25; гл. III, § 2, теорема 2.2], можно показать, что данные условия являются также и достаточными. Отметим, что на коэффициенты $\tilde{b}_\pm^{(j)}$ не возникает никаких ограничений, и их можно выбрать произвольным образом, добавляя к $\phi_1^{(j)}$ функции вида $c_\pm \phi_0^\pm$.

Построенные первые члены разложений (3.3) являются достаточно хорошим приближением истинных собственных функций только вне некоторой окрестности окна ω_0^ε , а вблизи окна не выполнены требуемые краевые условия. Для построения асимптотики вблизи окна введем растянутые координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2) = x\varepsilon^{-1}$; асимптотики собственных функций будем строить в виде внутреннего разложения:

$$\psi_\varepsilon^{(j)}(x) = e^{i((2\pi m)/(2h))x_1} \left(w_0^{(j)}(\xi) + \frac{1}{\ln \varepsilon} w_1^{(j)}(\xi) + \dots \right). \quad (3.9)$$

Подставим такой анзац и (3.2) в уравнение (3.5) и соберем коэффициенты при ε^{-2} и $\varepsilon^{-2} \ln^{-1} \varepsilon$ в получившемся формальном равенстве. Это приводит к следующим условиям на функции $w_p^{(j)}$, $p = 1, 2$:

$$\Delta_\xi w_p^{(j)} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Gamma}_*, \quad \frac{\partial w_p^{(j)}}{\partial \xi_2} = 0 \quad \text{на } \bar{\Gamma}_*, \quad \Gamma_* := O\xi_1 \setminus [-1, 1]. \quad (3.10)$$

Для однозначного определения функций $w_p^{(j)}$ необходимо задать их поведение на бесконечности. Оно определяется из условия согласования внутреннего разложения (3.9) с внешним разложением (3.3). Запишем функции $\phi_0^{(j)}$ и $\phi_1^{(j)}$ в переменных ξ

в окрестности $x = 0$:

$$\begin{aligned} \phi_0^{(j)}(x) + \frac{1}{\ln \varepsilon} \phi_1^{(j)}(x) \\ = a_{\pm}^{(j)} + b_{\pm}^{(j)} + \frac{1}{\ln \varepsilon} (b_{\pm}^{(j)} \ln |\xi| + \tilde{b}_{\pm}^{(j)}) + \mathcal{O}(\varepsilon(|\xi| + 1)), \quad x \rightarrow 0, \quad \pm x_2 > 0. \end{aligned}$$

Согласовывая данные соотношения с (3.9), получаем

$$w_0^{(j)}(\xi) = a_{\pm}^{(j)} + b_{\pm}^{(j)} + o(1), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \pm \xi_2 > 0, \quad (3.11)$$

$$w_1^{(j)}(\xi) = b_{\pm}^{(j)} \ln |\xi| + \tilde{b}_{\pm}^{(j)}, \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \pm \xi_2 > 0. \quad (3.12)$$

Таким образом, следует отыскать решения задач (3.10), ведущие себя описанным образом на бесконечности.

Разрешимость задач (3.10) нетрудно исследовать, используя методы комплексного анализа. А именно, область $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Gamma}_*$ удастся отобразить в круг с помощью явного конформного преобразования. Задача в круге затем уже исследуется стандартным образом – необходимо лишь учесть поведение в точке, в которую переходит бесконечность. Такой подход дает следующие результаты о разрешимости задач (3.10), (3.11), (3.12).

Задача (3.10) с поведением на бесконечности (3.11) имеет единственное решение, являющееся постоянным: $w_0^{(j)}(\xi) \equiv c_0$. Это возможно только при выполнении условия разрешимости

$$a_+^{(j)} + b_+^{(j)} = a_-^{(j)} + b_-^{(j)} = c_0. \quad (3.13)$$

Задача (3.10) с условием (3.12) также однозначно разрешима (с точностью до константы) при выполнении условия совместности

$$b_+^{(j)} = -b_-^{(j)}. \quad (3.14)$$

Ее решение можно построить явно:

$$\begin{aligned} w_1^{(j)}(\xi) &= b_+^{(j)} X(\xi) + c_1, \quad c_1 = \text{const}, \\ X(\xi) &:= \text{Re} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad z = \xi_1 + i\xi_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь ветви корня и логарифма выбираются из условий $\sqrt{1} = 1$, $\ln 1 = 0$.

Отметим некоторые свойства функции X , которые легко проверить, исходя из явного определения. Функция X бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Gamma}_*$ и непрерывна вплоть до границы этой области. Она также обладает односторонними производными на множестве Γ_* , понимаемом как двусторонним разрез. Функция X нечетна по ξ_2 и обладает следующим асимптотическим поведением на бесконечности:

$$X(\xi) = \pm(\ln |\xi| + \ln 2) + \mathcal{O}(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \pm \xi_2 > 0.$$

Именно последнее равенство и приводит к условию (3.14). В силу асимптотики (3.12) оно также позволяет определить константы $\tilde{b}_{\pm}^{(j)}$: $\tilde{b}_{\pm}^{(j)} = b_{\pm}^{(j)} \ln 2$.

Производя элементарные вычисления, нетрудно проверить, что система уравнений (3.13), (3.14) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} -2b_+^{(j)} - a_+^{(j)} + a_-^{(j)} = 0, \\ \frac{\pi}{d} a_+^{(j)} - \frac{\pi}{d} (a_-^{(j)} + 2b_-^{(j)}) = 0. \end{cases}$$

Выразим теперь числа $b_{\pm}^{(j)}$ через $\mu^{(j)}$ из формул (3.8) и подставим полученные выражения в последнюю систему уравнений:

$$(M - 2h\mu^{(j)})a^{(j)} = 0, \quad M := \begin{pmatrix} t\beta_1 - 1 & 1 \\ \zeta & -\zeta - t\beta_2 \end{pmatrix}, \quad a^{(j)} := \begin{pmatrix} a_+^{(j)} \\ a_-^{(j)} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

где

$$\beta_1 := \frac{2\pi n + k_0}{h}, \quad \beta_2 := -\frac{2\pi m + k_0}{h}, \quad \zeta = \frac{\pi}{d}. \quad (3.17)$$

Так как векторы $a^{(j)}$ предполагаются ненулевыми, то величины $2h\mu^{(j)}$ должны быть собственными значениями матрицы M ; таким образом,

$$\mu^{(j)}(t) = \frac{f_j(t, \zeta)}{4h}, \quad (3.18)$$

$$f_1(t, \zeta) := t(\beta_1 - \beta_2) - (\zeta + 1) + \sqrt{(t(\beta_1 + \beta_2) + \zeta - 1)^2 + 4\zeta},$$

$$f_2(t, \zeta) := t(\beta_1 - \beta_2) - (\zeta + 1) - \sqrt{(t(\beta_1 + \beta_2) + \zeta - 1)^2 + 4\zeta}.$$

Соответствующие собственные векторы выберем так:

$$a^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2h\mu^{(j)} + 1 - t\beta_1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (3.19)$$

Полученные выражения для $a_{\pm}^{(j)}$ полностью определяют внешнее и внутреннее разложения для собственных функций $\psi_{\varepsilon}^{(j)}$. Константу C_1 в (3.15) положим равной нулю. Таким образом, формальное построение асимптотик закончено.

3.2. Обоснование формальной асимптотики. Первый шаг обоснования – это доказательство того, что построенные асимптотики (3.2), (3.3) являются формальными асимптотическими решениями уравнения (3.5), т.е. удовлетворяют ему с точностью до достаточно малой невязки. В нашем случае требуется получить невязку порядка $\mathcal{O}(1/|\ln \varepsilon|^2)$. Для этого необходимо построить дополнительные члены во внутреннем и внешнем разложениях собственных функций $\psi_{\varepsilon}^{(j)}$, а также дополнительные слагаемые в асимптотике (3.2). Это достаточно типичная ситуация в задачах с сингулярными возмущениями. В нашем случае построение таких дополнительных членов не вызывает никаких принципиальных трудностей, но является технически громоздким. Кроме того, оно по сути повторяет упомянутые выше схожие построения в [20], [25; гл. III, § 1]. Поэтому здесь мы не будем подробно останавливаться на построении дополнительных членов, а сразу сформулируем окончательный результат. Обозначим

$$\widehat{\psi}_{\varepsilon}^{(i)}(x) = e^{i((2\pi m)/h)x_1} \left[\left(\phi_0^{(j)}(x) + \frac{1}{\ln \varepsilon} \phi_1^{(j)}(x) \right) \chi \left(\frac{|x|}{\varepsilon^{\alpha}} \right) + \left(w_0^{(j)}(\xi) + \frac{1}{\ln \varepsilon} \right) \left(1 - \chi \left(\frac{|x|}{\varepsilon^{\alpha}} \right) \right) \right]$$

$$\widehat{E}_{\varepsilon}^{(j)}(t) := E_0 + \frac{\mu^{(j)}(t)}{\ln \varepsilon},$$

где $\chi = \chi(s)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю при $s < 1$ и единице при $s > 2$, α – некоторая константа.

ЛЕММА 3.1. *Функция $\widehat{\psi}_\varepsilon^{(j)}$ принадлежит $C^\infty(\Pi^h) \cap W_2^1(\Pi^h)$. Верны сходимости*

$$\widehat{\psi}_\varepsilon^{(j)} \rightarrow e^{i((2\pi t)/(2h))x_1} \phi_0^{(j)} \quad \text{в } L_2(\Pi^h), \quad \widehat{E}_\varepsilon^{(j)} \rightarrow E_0. \quad (3.20)$$

Существуют число $\alpha \in (0, 1)$ и функции $\psi_^{(j)}(x, \varepsilon) \in C^\infty(\Pi^h) \cap W_2^1(\Pi^h)$ и $E_*^{(j)}(\varepsilon)$, такие что функции*

$$\widehat{\psi}_{\varepsilon,*}^{(j)}(x) := \widehat{\psi}_\varepsilon^{(j)}(x) + \psi_*^{(j)}(x, \varepsilon), \quad \widehat{E}_{\varepsilon,*}^{(j)} := E_\varepsilon^{(j)} + E_*^{(j)}(\varepsilon)$$

удовлетворяют уравнению

$$(H^\varepsilon(k) - \widehat{E}_{\varepsilon,*}^{(j)}) \widehat{\psi}_{\varepsilon,*}^{(j)} = g_\varepsilon^{(j)}, \quad (3.21)$$

причем верны равномерные по ε и t оценки

$$\|\psi_*^{(j)}(\cdot, \varepsilon)\|_{W_2^1(\Pi^h)} = \mathcal{O}(\ln^{-2} \varepsilon), \quad |E_*^{(j)}(\varepsilon)| = \mathcal{O}(\ln^{-2} \varepsilon), \quad (3.22)$$

$$\|g_\varepsilon^{(j)}\|_{L_2(\Pi^h)} = \mathcal{O}(\ln^{-2} \varepsilon). \quad (3.23)$$

Переходим теперь непосредственно к оценкам остатков асимптотик. В силу уравнения (3.21) и [26; гл. V, § 3.5, равенство (3.21)] верно равенство

$$\widehat{\psi}_{\varepsilon,*}^{(j)} = (H^\varepsilon(k_\varepsilon) - \widehat{E}_*^{(j)}(\varepsilon))^{-1} g_\varepsilon^{(j)} = \sum_{p=1}^2 \frac{(g_\varepsilon^{(j)}, \psi_\varepsilon^{(p)})_{L_2(\Pi^h)}}{E_\varepsilon^{(p)} - \widehat{E}_\varepsilon^{(j)}} \psi_\varepsilon^{(p)} + R_\varepsilon^{(j)} g_\varepsilon^{(j)}, \quad (3.24)$$

где $E_\varepsilon^{(p)}$ – собственные значения оператора $H^\varepsilon(k)$, сходящиеся к E_0 при $\varepsilon \rightarrow +0$, $\psi_\varepsilon^{(p)}$ – соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\Pi^h)$, $R_\varepsilon^{(j)}$ – редуцированная резольвента, как оператор в $L_2(\Pi^h)$ удовлетворяющая оценке

$$\|R_\varepsilon^{(j)}\| = \frac{1}{\text{dist}(\widehat{E}_\varepsilon^{(j)}, \sigma(H^\varepsilon(k_\varepsilon)) \setminus \{E_\varepsilon^{(1)}, E_\varepsilon^{(2)}\})} \leq C,$$

где константа C не зависит от ε и t . Кроме того, оператор $R_\varepsilon^{(j)}$ действует в ортогональное дополнение к $\{\psi_\varepsilon^{(1)}, \psi_\varepsilon^{(2)}\}$ в $L_2(\Pi^h)$.

Обозначим

$$A_{jp}(\varepsilon) := \frac{(g_\varepsilon^{(j)}, \psi_\varepsilon^{(p)})_{L_2(\Pi^h)}}{E_\varepsilon^{(p)} - E_\varepsilon^{(j)}}, \quad A_j(\varepsilon) := (A_{j1}(\varepsilon), A_{j2}(\varepsilon)).$$

Из описанных выше свойств операторов $R_\varepsilon^{(j)}$ и (3.24), (3.23), (3.20), (3.19), (3.17), (3.16), (3.4) следуют равенства

$$\begin{aligned} \|\widehat{\psi}_{\varepsilon,*}^{(j)}\|_{L_2(\Pi^h)}^2 &= \sum_{p=1}^2 |A_{jp}|^2 + \|R_\varepsilon^{(j)} g_\varepsilon^{(j)}\|_{L_2(\Pi^h)}^2, \quad j = 1, 2, \\ (\widehat{\psi}_\varepsilon^{(1)}, \widehat{\psi}_\varepsilon^{(2)})_{L_2(\Pi^h)} &= \sum_{p=1}^2 A_{1p} A_{2p} + (R_\varepsilon^{(1)} g_\varepsilon^{(1)}, R_\varepsilon^{(2)} g_\varepsilon^{(2)})_{L_2(\Pi^h)}, \end{aligned}$$

$$\|A_j\|_{\mathbb{R}^2} = \|\phi_0^{(j)}\|_{L_2(\Pi^h)} + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

$$(A_1, A_2)_{\mathbb{R}^2} = (\phi_0^{(1)}, \phi_0^{(2)})_{L_2(\Pi^h)} + o(1) = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

равномерно по $t \in [-t_0, t_0]$. Переобозначая при необходимости $\psi_\varepsilon^{(1)}$ через $\psi_\varepsilon^{(2)}$ и наоборот, в силу полученных соотношений заключаем, что верны равномерные по ε и $t \in [-t_0, t_0]$ оценки

$$|A_{11}| \geq C > 0, \quad |A_{22}| \geq C > 0.$$

Отсюда, из определения функций A_{jp} и оценки (3.23) выводим равномерные по $t \in [-t_0, t_0]$ оценки остатков

$$E_\varepsilon^{(j)}(t) - \widehat{E}_{\varepsilon,*}^{(j)}(t) = \mathcal{O}(\ln^{-2} \varepsilon).$$

Учитывая теперь (3.22), получаем окончательные асимптотики для собственных значений $E_\varepsilon^{(j)}$, равномерные по $t \in [-t_0, t_0]$:

$$E_\varepsilon^{(j)}(t) = E_0 + \frac{\mu^{(j)}(t)}{\ln \varepsilon} + \mathcal{O}(\ln^{-2} \varepsilon), \quad j = 1, 2. \quad (3.25)$$

В заключение раздела отметим, что можно было бы построить асимптотику собственных значений $E_\varepsilon^{(j)}$ с точностью до степенного по ε остатка, просуммировав логарифмическую часть. Вместе с тем, подобная точность избыточна для целей нашей работы.

3.3. Исследование асимптотических формул. Проведем теперь качественное исследование зонных функций вблизи $k = k_0$, используя полученные асимптотики. Для этого вначале отыщем экстремумы функций f_j из (3.18).

Из неравенства (1.7a) следует, что числа β_1 и β_2 из (3.17) имеют одинаковый знак. Поэтому

$$|\beta_1 - \beta_2| = ||\beta_1| - |\beta_2||, \quad |\beta_1 + \beta_2| = |\beta_1| + |\beta_2|,$$

откуда вытекает $|\beta_1 - \beta_2| < |\beta_1 + \beta_2|$. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f_1(t, \zeta) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f_2(t, \zeta) = -\infty.$$

Отсюда и из непрерывности функций f_1 и f_2 по t следует, что они достигают соответственно глобального минимума и максимума в конечных точках. Стандартным образом отыскивая эти точки, получаем

$$\min_{t \in \mathbb{R}} f_1(t, \zeta) = f_1(t_{\min}, \zeta), \quad \max_{t \in \mathbb{R}} f_2(t, \zeta) = f_2(t_{\max}, \zeta),$$

$$t_{\min} = -\frac{2\beta}{\beta_1 + \beta_2} \sqrt{\frac{\zeta}{1 - \beta^2}} + \frac{1 - \zeta}{\beta_1 + \beta_2},$$

$$t_{\max} = \frac{2\beta}{\beta_1 + \beta_2} \sqrt{\frac{\zeta}{1 - \beta^2}} + \frac{1 - \zeta}{\beta_1 + \beta_2},$$

где

$$\beta := \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{\pi(m + n) + k_0}{\pi(n - m)}.$$

Значения глобального минимума функции f_1 и глобального максимума функции f_2 даются формулами

$$f_1(t_{\min}, \zeta) = 2\sqrt{\zeta(1 - \beta^2)} - \beta(\zeta - 1) - \zeta - 1 = \tau_+,$$

$$f_2(t_{\max}, \zeta) = -2\sqrt{\zeta(1 - \beta^2)} - \beta(\zeta - 1) - \zeta - 1 = \tau_-. \quad (3.26)$$

С учетом неравенства $\ln \varepsilon < 0$, из последних соотношений и равенств (3.18), (3.25), (3.3) следует

$$\begin{aligned}\max_{t \in [-t_0, t_0]} E_\varepsilon^{(1)} &= E_0 - \frac{1}{4h|\ln \varepsilon|} \min_{t \in [-t_0, t_0]} f_1(t, \zeta) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right) \\ &= E_0 - \frac{\tau_+}{4h|\ln \varepsilon|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right), \\ \min_{t \in [-t_0, t_0]} E_\varepsilon^{(2)} &= E_0 - \frac{1}{4h|\ln \varepsilon|} \max_{t \in [-t_0, t_0]} f_2(t, \zeta) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right) \\ &= E_0 - \frac{\tau_-}{4h|\ln \varepsilon|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right),\end{aligned}$$

где параметр t_0 при необходимости увеличим так, что $t_{\min} \in [-t_0, t_0]$, $t_{\max} \in [-t_0, t_0]$. Отсюда и из (3.26) вытекает, что при достаточно малых ε

$$\begin{aligned}\min_{t \in [-t_0, t_0]} E_\varepsilon^{(2)}(t) - \max_{t \in [-t_0, t_0]} E_\varepsilon^{(1)}(t) \\ = \frac{\tau_+ - \tau_-}{|\ln \varepsilon|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right) = \frac{\sqrt{z(1-\beta^2)}}{h|\ln \varepsilon|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right) > 0.\end{aligned}$$

Учитывая теперь неравенство (3.1) и выбирая в нем параметр A достаточно большим, заключаем, что в спектре оператора H^ε присутствует лагуна

$$\left(E_0 - \frac{\tau_+}{4h|\ln \varepsilon|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right), E_0 - \frac{\tau_-}{4h|\ln \varepsilon|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right)\right),$$

что доказывает (1.8) и (1.9). Остается только установить асимптотики (1.10).

Так как функция $f_1(t, \zeta)$ достигает своего глобального максимума только в точке $t_{\min}$, то при t , отстоящих от $t_{\min}$ на конечное расстояние, выполнено

$$f_1(t, \zeta) > f_1(t_{\min}, \zeta).$$

Значит, точка максимума функции $E_1^{(\varepsilon)}$ должна стремиться к $t_{\min}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Так как

$$f_1(t, \zeta) = f_1(t_{\min}, \zeta) + \mathcal{O}((t - t_{\min})^2), \quad t \rightarrow t_{\min},$$

то равенство

$$E_\varepsilon^{(1)}(t) = E_0 - \frac{\tau_+}{4h|\ln \varepsilon|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right)$$

может быть выполнено лишь при t , отстоящих от $t_{\min}$ на расстояние порядка не более $\mathcal{O}(|\ln \varepsilon|^{-1/2})$. Отсюда уже вытекает асимптотика (1.10) для $k_+^+(\varepsilon)$. Асимптотика для $k_-^+(\varepsilon)$ доказывается аналогично.

Настоящая работа была выполнена во время визита Д. И. Борисова в Южно-Парижский университет летом 2011 года в рамках проекта “Théorie des opérateurs et problèmes au bord en mécanique quantique”. Д. И. Борисов благодарен за гостеприимство и теплый прием, оказанные ему.

Авторы благодарны анонимному рецензенту за ряд полезных замечаний, позволивших существенно улучшить раздел 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Kuchment, “The mathematics of photonic crystals”, *Mathematical Modeling in Optical Science*, Frontiers Appl. Math., **22**, SIAM, Philadelphia, PA, 2001, 207–272.
- [2] P. Exner, P. Kuchment, B. Winn, “On the location of spectral edges in $\mathbb{Z}$ -periodic media”, *J. Phys. A. Math. Theor.*, **43**:47 (2010), 474022.
- [3] J. M. Harrison, P. Kuchment, A. Sobolev, B. Winn, “On occurrence of spectral edges for periodic operators inside the Brillouin zone”, *J. Phys. A. Math. Theor.*, **40**:27 (2007), 7597–7618.
- [4] A. Figotin, I. Vitebskiy, “Slow-wave resonance in periodic stacks of anisotropic layers”, *Phys. Rev. A*, **76**:5 (2007), 053839.
- [5] S. Mahmoodian, A. A. Sukhorukov, S. Ha, A. V. Lavrinenko, C. G. Poulton, K. B. Dossou, L. C. Botten, R. C. McPhedran, C. M. de Sterke, “Paired modes of heterostructure cavities in photonic crystal waveguides with split band edges”, *Optics Express*, **18**:25 (2010), 25693–25701.
- [6] G. Mumcu, K. Sertel, J. L. Volakis, I. Vitebskiy, A. Figotin, “RF propagation in finite thickness unidirectional magnetic photonic crystals”, *IEEE Trans. Antennas Propagation*, **53**:12 (2005), 4026–4034.
- [7] R. Hempel, O. Post, “Spectral gaps for periodic elliptic operators with high contrast: an overview”, *Progress in Analysis*, Vol. I (Berlin 2001), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003, 577–587.
- [8] K. Yoshitomi, “Band gap of the spectrum in periodically curved quantum waveguides”, *J. Differential Equations*, **142**:1 (1998), 123–166.
- [9] L. Friedlander, M. Solomyak, “On the spectrum of narrow periodic waveguides”, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 238–242.
- [10] С. А. Назаров, “Лакуна в существенном спектре задачи Неймана для эллиптической системы на периодической области”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:3 (2009), 92–95.
- [11] С. А. Назаров, “Пример множественности лакун в спектре периодического волновода”, *Матем. сб.*, **201**:4 (2010), 99–124.
- [12] K. Pankrashkin, “On the spectrum of a waveguide with periodic cracks”, *J. Phys. A. Math. Theor.*, **43**:47 (2010), 474030.
- [13] K. Yoshitomi, “Band spectrum of the Laplacian on a slab with the Dirichlet boundary condition on a grid”, *Kyushu J. Math.*, **57**:1 (2003), 87–116.
- [14] F. L. Bakharev, S. A. Nazarov, K. M. Ruotsalainen, *A Gap in the spectrum of the Neumann–Laplacian on a Periodic Waveguide*, [math.SP/1110.5990](https://arxiv.org/abs/math.SP/1110.5990).
- [15] G. Cardone, S. A. Nazarov, C. Perugia, “A gap in the essential spectrum of a cylindrical waveguide with a periodic perturbation of the surface”, *Math. Nachr.*, **283**:9 (2010), 1222–1244.
- [16] С. А. Назаров, “Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода”, *Матем. заметки*, **87**:5 (2010), 764–786.
- [17] О. П. Мельничук, И. Ю. Попов, “Квантовые волноводы, связанные через периодическую систему малых отверстий: оценка запрещенной зоны”, *Письма в ЖТФ*, **28**:8 (2002), 69–73.
- [18] И. Ю. Попов, А. И. Трифанов, Е. С. Трифанова, “Связанные диэлектрические волноводы со свойствами фотонного кристалла”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:11 (2010), 1931–1937.
- [19] I. Yu. Popov, “Asymptotics of bound states and bands for laterally coupled waveguides and layers”, *J. Math. Phys.*, **43**:1 (2002), 215–234.
- [20] V. Maz’ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains*, Vol. I, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000; Vol. II, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [21] В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 347–371.

- [22] Р. Р. Гадыльшин, “Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия”, *Матем. заметки*, **52**:4 (1992), 42–55.
- [23] L. Hillairet, C. Judge, “The eigenvalues of the Laplacian on domains with small slits”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:12 (2010), 6231–6259.
- [24] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4. Analysis of Operators*, Academic Press, New York, 1978.
- [25] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [26] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

Д. И. Борисов

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы, г. Уфа
E-mail: borisovdi@yandex.ru

Поступило

02.02.2012

К. В. Панкрашкин

Смешанное исследовательское подразделение
№ 8628
при Национальном центре научных исследований
и Южно-Парижском университете № 11,
Орсэ, Франция
E-mail: konstantin.pankrashkin@math.u-psud.fr