Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Петрова, Об условиях монотонности свободной границы в двухфазной задаче Стефана, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 798–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9285>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 09:45:01

Об условиях монотонности свободной границы в двухфазной задаче Стефана

А. Г. Петрова

Результаты о монотонности свободной границы в однофазной задаче Стефана (см., например, [1]) давно и хорошо известны. Широко используемый в приложениях процесс направленной кристаллизации в двухфазном случае реализуется лишь в случае монотонности фронта. Принадлежащая автору заметка, в которой были сформулированы достаточные условия монотонности свободной границы в двухфазной задаче и приведена схема доказательства, была опубликована в малодоступном издании Института гидродинамики СО РАН “Динамика сплошных сред” в 1984 г. [2]. В 2011 г. В. С. Белоносовым были высказаны сомнения в возможности доказать заявленный в [2] результат без дополнительных условий, обеспечивающих аналитичность свободной границы. В данной заметке приведено развернутое доказательство результата, не использующее аналитичности.

Рассмотрим одномерную двухфазную задачу Стефана нахождения функций $u_i(x, t)$, $i = s, l$, в областях

$$\Omega_s(t) = \{x : 0 < x < s(t)\}, \quad \Omega_l(t) = \{x : s(t) < x < 1\}$$

соответственно, а также функции $s(t)$, определяющей положение фазовой границы в момент времени t по следующим условиям:

$$\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad x \in \Omega_i(t), \quad t \in (0, T); \quad (1)$$

$$u_s = u_l = 0, \quad \gamma \dot{s}(t) = \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial u_l}{\partial x}, \quad x = s(t), \quad (2)$$

$$u_s(0, t) = f_s(t), \quad u_l(1, t) = f_l(t), \quad (3)$$

$$u_i(x, 0) = \phi_i(x), \quad x \in \bar{\Omega}_i(0), \quad i = s, l, \quad s(0) = s_0 \in (0, 1). \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что классическая двухфазная задача Стефана может быть приведена к виду (1), (2), в котором коэффициенты при производных по пространственной переменной как в уравнении теплопроводности, так и в условии Стефана равны единице. Здесь α_i , γ – положительные константы, $f_i(t)$ – непрерывно дифференцируемые, а $\phi_i(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции такие, что

$$\begin{aligned} \phi_s < 0, \quad x \in \Omega_s(0), \quad \phi_l \geq 0, \quad x \in \Omega_l(0), \\ \phi_i(s_0) = 0, \quad f_s(t) < 0, \quad f_l(t) > 0, \quad t \in [0, T], \quad f_s(0) = \phi_s(0), \quad f_l(0) = \phi_l(0), \\ \alpha_s f'_s(0) = \phi''_s(0), \quad \alpha_l f'_l(0) = \phi''_l(1), \quad \gamma \dot{s}(0) = \phi'_s(s_0) - \phi'_l(s_0), \\ \alpha_i \phi'_i(s_0) \dot{s}(0) + \phi''_i(s_0) = 0, \quad i = s, l. \end{aligned} \quad (5)$$

Вопросы существования классического решения одномерной двухфазной задачи Стефана давно исследованы [1], [3]; нас будет интересовать свойство классического решения – монотонность фазового фронта.

ТЕОРЕМА 1. Пусть данные задачи (1)–(4) помимо условий (5) удовлетворяют следующим требованиям:

$$\begin{aligned} \dot{s}(0) > 0, \quad \phi''_s(x) < 0, \quad x \in \bar{\Omega}_s(0), \quad \phi''_l(x) \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}_l(0), \\ f'_s(t) < 0, \quad f'_l(t) \leq 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Тогда функция $s(t)$ является строго возрастающей функцией на всем интервале существования классического решения $(0, T)$ и $\dot{s}(t) > 0$, $t \in (0, T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что $s(t)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(0, T)$, а функции $u_i(x, t)$ являются бесконечно дифференцируемыми внутри областей $Q_i(T) = \{(x, t) : x \in \Omega_i(t), t \in (0, T)\}$ [3] и в силу принципа максимума, примененного к функциям u_i , имеем

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x} \right|_{x=s(t)} \geq 0, \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

Предположим, что существует $t^* \in (0, T)$ такое, что $\dot{s}(t) > 0$ при $t < t^*$ и $\dot{s}(t^*) = 0$. Вследствие равенств

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}(s(t), t)\dot{s}(t) + \frac{\partial u_i}{\partial t}(s(t), t) = 0 \quad (7)$$

и оценок (6) имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(s(t), t) \leq 0, \quad t \in [0, t^*].$$

Отметим, что в силу леммы о знаке производной [1] имеет место строгое неравенство

$$\left. \frac{\partial u_s}{\partial x} \right|_{x=s(t)} > 0, \quad t \in [0, T). \quad (8)$$

Из (7), (8) и предположения о точке t^* следует, что

$$\frac{\partial u_s}{\partial t}(s(t), t) < 0, \quad t \in [0, t^*), \quad \frac{\partial u_s}{\partial t}(s(t^*), t^*) = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание условия на граничные и начальные функции задачи, заключаем, что $\partial u_s / \partial t$ достигает в $\bar{Q}_s(t^*) = \{x : 0 \leq x \leq s(t), 0 \leq t \leq t^*\}$ своего строгого максимума, равного нулю, в точке $(s(t^*), t^*)$.

Покажем, что

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial t \partial x}(s(t^*), t^*) > 0.$$

Выберем $\bar{x} \in (0, s(t^*))$ так, чтобы замкнутое множество

$$\bar{B} = \left\{ (x, t) : (x - \bar{x})^2 + (t - t^*)^2 \leq R^2, t^* - \delta \leq t \leq t^*, \frac{\bar{x} + s(t^*)}{2} \leq x \leq s(t) \right\},$$

где $R = s(t^*) - \bar{x}$, $0 < \delta < R$, содержалось в $\bar{Q}_s(t^*)$. Существование такого множества $\bar{B}$ обеспечивается бесконечной дифференцируемостью функции $s(t)$ при $t \in (0, T)$ [3].

Введем функцию

$$v = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \epsilon h,$$

где

$$h(x, t) = \exp(-\alpha((x - \bar{x})^2 + (t - t^*)^2)) - \exp(-\alpha R^2).$$

Имеем $h = 0$ на криволинейной границе, представляющей собой дугу окружности радиуса R , и $h_{xx} - h_t > 0$ внутри области B , если α достаточно большое. Для любого достаточно малого $\epsilon > 0$ функция v будет меньше нуля на прямолинейных участках $x = (\bar{x} + s(t^*))/2$ и $t = t^* - \delta$ границы области $\bar{B}$. Таким образом, функция v достигает своего максимума в области $\bar{Q}_s(t^*)$ в точке границы с координатами $(s(t^*), t^*)$. Итак, $v_x(s(t^*), t^*) \geq 0$. Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial t \partial x}(s(t^*), t^*) = v_x(s(t^*), t^*) - \epsilon(-2\alpha(s(t^*) - \bar{x}) \exp(-\alpha(s(t^*) - \bar{x})^2)) > 0. \quad (9)$$

В силу неположительности функции $\partial u_l / \partial t$ в $\bar{Q}_l(t^*)$, вытекающей из принципа максимума, а также равенства ее нулю при $t = t^*$ имеем оценку

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial t \partial x}(s(t^*), t^*) \leq 0. \quad (10)$$

Рассмотрим $\ddot{s}(t^*)$. Из условия $\dot{s}(t^*) = 0$ и оценок (9), (10) следует, что

$$\gamma \ddot{s}(t^*) = \frac{\partial^2 u_s}{\partial t \partial x}(s(t^*), t^*) - \frac{\partial^2 u_l}{\partial t \partial x}(s(t^*), t^*) > 0,$$

что противоречит предположению о том, что $\dot{s}(t) > 0$ при $t \in [0, t^*)$ и $\dot{s}(t^*) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Автор благодарит профессоров Г. И. Бижанову, А. М. Мейрманова и Е. В. Радкевича за полезное обсуждение этого доказательства.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, М., Наука, 1968. [2] А. Г. Петрова, *Динамика сплошной среды*, **67** (1984), 97–99. [3] А. М. Мейрманов, *Задача Стефана*, Новосибирск, Наука, 1986.

А. Г. Петрова

Алтайский государственный университет,

г. Барнаул

E-mail: annapetrova07@mail.ru

Поступило

02.12.2011