Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Б. Сабитов, Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 262–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:57:08

Задача Дирихле

для уравнений с частными производными высоких порядков

К. Б. Сабитов

Для дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков от двух и трех переменных изучается задача Дирихле в прямоугольных областях. При построении решения задачи методом спектральных разложений возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость рядов. Установлен критерий единственности решения. В двумерном случае найдены оценки, позволяющие обосновать существование решения задачи Дирихле. В трехмерном случае, когда область является кубом, показано, что единственность решения задачи Дирихле равносильна великой проблеме Ферма.

Библиография: 21 название.

DOI: 10.4213/mzm9286

1. Введение

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} = 0 \quad (1.1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, t) \mid 0 < x < l, 0 < t < T\}$, где l, T – заданные положительные числа, $p \in \mathbb{N}$, и поставим следующую задачу.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ. Найти в области D функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям

$$u \in C^{2p-1}(\overline{D}) \cap C^{2p}(D), \quad (1.2)$$

$$Lu(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D, \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \right|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

$$\left. \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.5)$$

$$\left. \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \right|_{t=T} = \psi_k(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.6)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (р_Поволжье_a) (грант № 14-01-97003).

где $k = 0, \dots, p-1$, φ_k и ψ_k – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям (1.4) в точках $x = 0$ и $x = l$.

Уравнение (1.1) при $p = 1$ представляет собой известное уравнение струны. Задача Дирихле для уравнения струны изучалась во многих работах [1]–[13]. Более детальный обзор работ, посвященных данной тематике, можно найти в обзорной статье Арнольда [11] и монографии Березанского [12; гл. IV]. Из указанных работ следует, что если отношение сторон T/l прямоугольника D , где ищется решение задачи Дирихле для уравнения струны, является рациональным числом, то однородная задача Дирихле имеет нетривиальные решения. При построении решения неоднородной задачи Дирихле методом разделения переменных, т.е. с помощью ряда Фурье, возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость такого ряда. Если отношение сторон T/l является иррациональным числом с ограниченными элементами или алгебраическим числом степени $n \geq 2$, то при достаточно гладких граничных данных (функций) удастся доказать сходимость построенного ряда в классе гладких решений уравнения струны.

В данной работе показано, что иррациональность отношения T/l является необходимым и достаточным условием единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1.1) при любом $p \in \mathbb{N}$. При $p = 1$ решение задачи Дирихле построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Найдены достаточные условия гладкости относительно заданных функций $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$, которые обеспечивают принадлежность решения задачи (1.3)–(1.6) классу (1.2).

В общем случае задача (1.2)–(1.6) сводится к задаче Дирихле для неоднородного уравнения $Lu = f(x, t)$ с однородными граничными условиями. На основании теории двойных рядов Фурье при указанных выше условиях относительно числа T/l и некоторых требованиях на функцию $f(x, t)$ доказано существование и единственность решения в классе (1.2).

Отметим, что единственность решения задачи (1.2)–(1.6), в отличие от других работ при $p = 1$, доказывается только на основании свойства полноты построенной системы собственных функций соответствующей спектральной задачи. Ранее такой подход применялся в работе [14] при доказательстве единственности решения смешанной задачи для гиперболических уравнений второго порядка.

Далее для трехмерного аналога уравнения (1.1), т.е. для уравнения вида

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial y^{2p}} = f(x, y, t) \quad (1.7)$$

в прямоугольном параллелепипеде

$$Q = \{(x, y, t) \mid (x, y) \in D, t \in (0, T)\},$$

где $D = \{(x, y) \mid 0 < x < l, 0 < y < q\}$, l, q, T – заданные положительные числа, $f(x, y, t)$ – заданная в Q функция, $p \in \mathbb{N}$, исследуется следующая

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ. Найти в области Q функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u \in C^{2p-1}(\overline{Q}) \cap C^{2p}(Q), \quad (1.8)$$

$$Lu(x, y, t) \equiv f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \Big|_{x=l} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}} \Big|_{y=q} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \Big|_{t=T} = 0, \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (1.11)$$

где $k = 0, \dots, p-1$.

Здесь установлен следующий результат. Если существует решение задачи (1.8)–(1.11), то оно единственно только тогда, когда уравнение

$$\left(\frac{m}{l}\right)^{2p} + \left(\frac{n}{q}\right)^{2p} = \left(\frac{k}{T}\right)^{2p}, \quad m, n, k \in \mathbb{N}, \quad (1.12)$$

неразрешимо в множестве натуральных чисел.

Если $l = q = T$, т.е. Q является кубом, то (1.12) переходит в известное уравнение Ферма

$$m^{2p} + n^{2p} = k^{2p}. \quad (1.13)$$

Если $q = l \neq T$, $l/T \in \mathbb{Q}$ или $q = T \neq l$, $T/l \in \mathbb{Q}$, то уравнение (1.12) также сводится к уравнению типа (1.13). Следовательно, в этих случаях в силу полученного результата единственность решения задачи Дирихле для уравнения (1.7) при любом натуральном p равносильна великой проблеме Ферма.

2. Задача Дирихле для двумерных уравнений с частными производными высоких порядков

2.1. Пусть $p = 1$. Для решения задачи (1.2)–(1.6) при $p = 1$ применим метод спектральных разложений. Разделяя переменные $u(x, t) = X(x)T(t)$ в уравнении (1.1), получим

$$X''(x) + dX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (2.1)$$

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (2.2)$$

где d – постоянная. Как известно, решение спектральной задачи (2.1), (2.2) имеет вид

$$X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_m x, \quad d_m = \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 = \mu_m^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Далее докажем единственность решения задачи (1.2)–(1.6) при $p = 1$. Пусть $u(x, t)$ – решение этой задачи. Рассмотрим функции

$$u_m(t) = \int_0^l u(x, t) X_m(x) dx, \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

На основании (2.4) введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$u_{m,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, t) X_m(x) dx, \quad (2.5)$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Дифференцируя (2.5) два раза по $t \in (0, T)$, с учетом уравнения (1.1) при $p = 1$ получим

$$u''_{m,\varepsilon}(t) = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(x, t) X_m(x) dx.$$

Интегрируя здесь по частям два раза и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом граничных условий (1.4) и (2.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''_m(t) + d_m u_m(t) = u''_m(t) + \mu_m^2 u_m(t) = 0,$$

общее решение которого определяется по формуле

$$u_m(t) = a_m \cos \mu_m t + b_m \sin \mu_m t, \quad (2.6)$$

где a_m и b_m – произвольные постоянные.

Для нахождения неизвестных постоянных a_m и b_m воспользуемся граничными условиями (1.5), (1.6) и формулой (2.4):

$$u_m(0) = \int_0^l u(x, 0) X_m(x) dx = \int_0^l \varphi_0(x) X_m(x) dx = \varphi_{0m}, \quad (2.7)$$

$$u_m(T) = \int_0^l u(x, T) X_m(x) dx = \int_0^l \psi_0(x) X_m(x) dx = \psi_{0m}. \quad (2.8)$$

Применяя к функции (2.6) граничные условия (2.7) и (2.8), найдем

$$a_m = \varphi_{0m}, \quad b_m = \frac{\psi_{0m} - \varphi_{0m} \cos \mu_m T}{\sin \mu_m T}, \quad (2.9)$$

когда при всех $m \in \mathbb{N}$

$$\sin \mu_m T = \sin \pi m \alpha \neq 0, \quad \alpha = \frac{T}{l}. \quad (2.10)$$

Последнее неравенство означает, что $\alpha \pi m \neq \pi n$ или $\alpha \neq n/m$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. отношение сторон T/l прямоугольника D является иррациональным числом.

Пусть теперь $\varphi_0(x) = \psi_0(x) \equiv 0$ и выполнено условие (2.10) при всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда в силу равенств (2.7) и (2.8) $\varphi_{0m} = \psi_{0m} \equiv 0$, поэтому из (2.9) при условии (2.10) следует, что $a_m = b_m \equiv 0$. Следовательно, в силу (2.6) и (2.4) при любом $t \in [0, T]$

$$\int_0^l u(x, t) X_m(x) dx = 0. \quad (2.11)$$

Отсюда в силу полноты системы (2.3) в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $u(x, t) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [0, T]$. В силу (1.2) функция $u(x, t)$ непрерывна на $\overline{D}$, поэтому функция $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть теперь нарушено условие (2.10), т.е. α является рациональным числом: $\alpha = s/q$, где s и q – взаимно простые натуральные числа. Тогда $\sin \alpha \pi m = \sin(sm\pi/q) = 0$, откуда получаем $m = qn$, $n \in \mathbb{N}$, и однородная задача (1.2)–(1.6) ($\varphi_0(x) = \psi_0(x) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения

$$u_{qn}(x, t) = \sin \frac{\pi q n x}{l} \sin \frac{\pi q n t}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности решения задачи.

ТЕОРЕМА 1. Если существует решение задачи (1.2)–(1.6) при $p = 1$, то оно единственно только тогда, когда $\sin \alpha \pi t \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{N}$, т.е. когда отношение сторон $T/l = \alpha$ прямоугольника D является иррациональным числом.

Перейдем к обоснованию существования решения задачи (1.2)–(1.6). Пусть при всех $t \in \mathbb{N}$ выполнено условие (2.10). Тогда решение задачи Дирихле на основании частных решений (2.3), (2.6) и (2.9) можно определить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) \sin \mu_m x, \quad (2.13)$$

где

$$u_m(t) = \varphi_{0m} \cos \mu_m t + \frac{\psi_{0m} - \varphi_{0m} \cos \alpha \pi t}{\sin \alpha \pi t} \sin \mu_m t. \quad (2.14)$$

Для обоснования сходимости ряда (2.13) надо получить необходимые оценки коэффициентов $u_m(t)$ для достаточно больших m при любом фиксированном $t \in [0, T]$, которые существенным образом зависят от $\sin \alpha \pi t$. Отметим, что существуют последовательности натуральных чисел n_m такие, что $\sin \alpha \pi n_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$. Действительно, как известно из теории цепных дробей [15; § 8], иррациональное число α можно единственным образом разложить в бесконечную цепную дробь $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, при этом целое число a_0 и натуральные числа $a_1, a_2, \dots$ называются *элементами* числа α . Если теперь множество элементов $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ неограничено, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется бесконечное множество чисел $s, q \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\left| \alpha - \frac{s}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q^2}; \quad (2.15)$$

если же множество $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ ограничено, то существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $p, q \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left| \alpha - \frac{s}{q} \right| \geq \frac{\varepsilon_0}{q^2}. \quad (2.16)$$

Пусть α – такое иррациональное число, то для него выполняется оценка (2.15), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность s_m/q_m , где s_m и q_m – взаимно простые натуральные числа, такая, что

$$\left| \alpha - \frac{s_m}{q_m} \right| < \frac{\varepsilon}{q_m^2}. \quad (2.17)$$

Тогда на основании (2.17) имеем

$$|\sin \alpha \pi q_m| = |\sin(\alpha \pi q_m - s_m \pi)| = \left| \sin \pi q_m \left(\alpha - \frac{s_m}{q_m} \right) \right| \leq \pi q_m \left| \alpha - \frac{s_m}{q_m} \right| < \frac{\pi \varepsilon}{q_m}.$$

Отсюда следует, что для таких $\alpha > 0$ выражение $\sin \alpha \pi t$, которое является знаменателем дроби в правой части равенства (2.14), может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому для таких иррациональных чисел α решение задачи Дирихле в виде суммы ряда (2.13) не существует.

Теперь естественно возникает вопрос: какие из иррациональных чисел в разложении в цепную дробь имеют ограниченные элементы?

В силу теоремы Лиувилля [15; с. 60] для всякого алгебраического числа α^1 степени $n \geq 2$ существует положительное число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любых целых $s, q, q > 0$, справедливо неравенство

$$\left| \alpha - \frac{s}{q} \right| > \frac{\varepsilon_0}{q^n}.$$

Из теории чисел также известно (см. теорему Рота [16; с. 268]), что для любого алгебраического числа α степени $n \geq 2$ и произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\delta > 0$ такое, что при любых целых $s, q, q > 0$, будет иметь место неравенство

$$\left| \alpha - \frac{s}{q} \right| \geq \frac{\delta}{q^{2+\varepsilon}}. \quad (2.18)$$

Для алгебраических чисел степени большей, чем 2, этот результат значительно улучшает теорему Лиувилля. Однако при $n = 2$ теорема Лиувилля дает более точный результат.

Тогда справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha > 0$ такое, что множество его элементов ограничено. Тогда существует число $C_0 > 0$ такое, что при всех $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|\sin \alpha \pi m| > \frac{C_0}{m}. \quad (2.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого $m \in \mathbb{N}$ можно подобрать $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы имело место неравенство

$$\left| \alpha - \frac{n}{m} \right| < \frac{1}{2m}. \quad (2.20)$$

Для этого достаточно положить

$$n = \begin{cases} [\alpha m], & \text{если } \{\alpha m\} < \frac{1}{2}, \\ [\alpha m] + 1, & \text{если } \{\alpha m\} > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $[\alpha m]$ и $\{\alpha m\}$ – целая и дробная части иррационального числа αm соответственно. Пусть $n \in \mathbb{N}$ такое, что выполнено неравенство (2.20). Тогда в силу известного неравенства

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad (2.21)$$

и оценки (2.16) будем иметь

$$|\sin \alpha \pi m| = \left| \sin \pi m \left(\alpha - \frac{n}{m} \right) \right| > 2m \left| \alpha - \frac{n}{m} \right| \geq \frac{C_0}{m}.$$

Тем самым справедливость оценки (2.19) доказана.

¹Число α называется алгебраическим числом степени n , если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами только степени n .

ЛЕММА 2. Если $\alpha > 0$ является иррациональным алгебраическим числом степени $n \geq 2$, то существует число $C_1 > 0$ такое, что при всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|\sin \alpha \pi m| \geq \frac{C_1}{m}, \quad \text{когда } n = 2, \quad (2.22)$$

$$|\sin \alpha \pi m| \geq \frac{C_1}{m^{1+\varepsilon}}, \quad \text{когда } n > 2, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $n = 2$ множество элементов числа α ограничено, поэтому из леммы 1 на основании (2.19) следует справедливость оценки (2.22). Когда $n > 2$, рассуждая аналогично доказательству леммы 1, на основании неравенств (2.20), (2.21) и (2.18), получим оценку (2.23).

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha > 0$ является иррациональным алгебраическим числом степени $n \geq 2$. Тогда при любом $t \in [0, T]$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |u_m(t)| &\leq \begin{cases} C_2 m (|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если } n = 2, \\ C_2 m^{1+\varepsilon} (|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если } n > 2, \end{cases} \\ |u'_m(t)| &\leq \begin{cases} C_3 m^2 (|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если } n = 2, \\ C_3 m^{2+\varepsilon} (|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если } n > 2, \end{cases} \\ |u''_m(t)| &\leq \begin{cases} C_4 m^3 (|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если } n = 2, \\ C_4 m^{3+\varepsilon} (|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если } n > 2, \end{cases} \end{aligned}$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формулы (2.14) на основании оценок (2.22) и (2.23).

Формально из (2.13) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_t(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u'_m(t) X_m(x), \quad u_x(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) X'_m(x), \quad (2.24)$$

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u''_m(t) X_m(x), \quad u_{xx}(x, t) = - \sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m^2 u_m(t) X_m(x). \quad (2.25)$$

Ряды (2.13), (2.24) и (2.25) при любых $(x, t) \in \overline{D}$ на основании леммы 3 мажорируются рядом

$$C_5 \sum_{m=1}^{+\infty} m^{3+\varepsilon} (|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|). \quad (2.26)$$

ЛЕММА 4. Если функции $\varphi_0(x), \psi_0(x) \in C^{4+d}[0, l]$,

$$\varphi_0^{(j)}(0) = \varphi_0^{(j)}(l) = 0, \quad \psi_0^{(j)}(0) = \psi_0^{(j)}(l) = 0, \quad j = 0, 2,$$

$\varepsilon < d < 1$, то справедливы оценки

$$|\varphi_{0m}| \leq \frac{C_6}{m^{4+d}}, \quad |\psi_{0m}| \leq \frac{C_6}{m^{4+d}}. \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В интегралах формул (2.7) и (2.8) интегрируя по частям четыре раза и применяя теорему о скорости убывания коэффициентов ряда Фурье функции, удовлетворяющей условию Гёльдера с показателем d [17; с. 80], получим оценки (2.27).

Тогда в силу леммы 4 ряд (2.26) оценивается сходящимся числовым рядом, поэтому на основании признака Вейерштрасса ряды (2.13), (2.24) и (2.25) сходятся равномерно на замкнутой области $\bar{D}$. Следовательно, функция $u(x, t)$, определяемая рядом (2.13), принадлежит классу $C^2(\bar{D})$.

Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. Если число $\alpha > 0$ является иррациональным алгебраическим числом степени $n \geq 2$ и функции $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.6) при $p = 1$ и оно определяется рядом (2.13).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что если число α является иррациональным алгебраическим числом степени $n = 2$, т.е. α – квадратичная иррациональность, то в силу оценки (2.22) в лемме 4 и соответственно в теореме 2 можно принять $\varepsilon = d = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Граничные условия (1.4) на боковых сторонах прямоугольника D только для простоты вычислений взяты нулевыми. В случае ненулевых граничных условий решение задачи Дирихле определяется в виде суммы двух решений типа (1.2)–(1.6) (см. [13]).

Отметим, что в работе [11; § 14] доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле для уравнения струны для всех чисел $\mu = T/(T + l)$, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \mu - \frac{m}{n} \right| > \frac{K}{n^3}$$

при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и некотором $K = \text{const} > 0$ методом теории отображений.

2.2. Пусть p – любое натуральное число. Из пункта 2.1 видно, что с ростом p построение решения задачи (1.2)–(1.6) приведенным подходом технически усложняется. В связи с чем далее рассмотрим неоднородное уравнение

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} = f(x, t) \quad (2.28)$$

с однородными граничными условиями, т.е. положим $\varphi_k(x) = \psi_k(x) \equiv 0$ при всех $k = 0, \dots, p - 1$, так как заменой функции u можно добиться для новой функции нулевых граничных условий.

Итак, в этом пункте изучим задачу Дирихле в следующей постановке: найти в области D функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям (1.2), (2.28), (1.4) и

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \Big|_{t=T} = 0, \quad k = 0, \dots, p - 1, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.29)$$

Рассмотрим следующие системы функций:

$$X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} x = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_m x, \quad \mu_m = \frac{\pi m}{l}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\pi n}{T} t = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \lambda_n t, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{T}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

каждая из них ортонормирована, полна и образует базис соответственно в $L_2[0, l]$ и $L_2[0, T]$.

Тогда, как известно, их произведение

$$X_m(x)T_n(t) = \frac{2}{\sqrt{lT}} \sin \mu_m x \sin \lambda_n t \quad (2.30)$$

образует систему, которая ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2(D)$, $D = (0, l) \times (0, T)$.

Решение задачи (1.2), (1.4), (2.28) и (2.29) будем искать в виде суммы двойного ряда

$$u(x, t) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} u_{mn} X_m(x) T_n(t). \quad (2.31)$$

Если существует решение $u(x, t)$ задачи (1.2), (1.4), (2.28) и (2.29), то коэффициенты ряда (2.31) можно однозначно найти по формуле

$$u_{mn} = \iint_D u(x, t) X_m(x) T_n(t) dx dt. \quad (2.32)$$

Предположим, что $f(x, t)$ – достаточно гладкая функция, обращающаяся в нуль на сторонах прямоугольника D со своими нужными производными. Тогда эту функцию можно единственным образом разложить в ряд по системе (2.30)

$$f(x, t) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} f_{mn} X_m(x) T_n(t), \quad (2.33)$$

где

$$f_{mn} = \iint_D f(x, t) X_m(x) T_n(t) dx dt. \quad (2.34)$$

Подставляя (2.31) и (2.33) в уравнение (2.28), найдем

$$u_{mn} = \frac{(-1)^p f_{mn}}{\lambda_n^{2p} - \mu_m^{2p}} \quad (2.35)$$

при условии, что при всех $m, n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{mn} = \lambda_n^{2p} - \mu_m^{2p} \neq 0. \quad (2.36)$$

Выражение для Δ_{mn} разложим на множители:

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} &= \left(\frac{\pi}{T}\right)^{2p} (n^{2p} - (\alpha m)^{2p}) \\ &= \left(\frac{\pi}{T}\right)^{2p} (n - \alpha m)(n^p + (\alpha m)^p)[n^{p-1} + n^{p-2}(\alpha m) + \dots + n(\alpha m)^{p-2} + (\alpha m)^{p-1}]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Из равенства (2.37) видно, что $\Delta_{mn} = 0$ только тогда, когда $\alpha = n/m$, т.е. когда α является рациональным числом всегда найдутся натуральные числа m и n такие, что $\Delta_{mn} = 0$.

Пусть теперь существует решение $u(x, t)$ однородной задачи (1.2), (1.4), (2.28) и (2.29), где $f(x, t) \equiv 0$ в D , и выполнено условие (2.36). Тогда из (2.34) следует, что $f_{mn} \equiv 0$ и поэтому на основании равенств (2.35) и (2.32) получим

$$\iint_D u(x, t) X_m(x) T_n(t) dx dt = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы (2.30) в пространстве $L_2(D)$ следует, что $u(x, t) = 0$ почти всюду в D . В силу (1.2) $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Если при некоторых $m = m_0$ и $n = n_0$ выполнено $\Delta_{m_0 n_0} = 0$, т.е. когда $\alpha = n_0/m_0$, то однородная задача Дирихле для уравнения (1.1) при любом p в области D имеет ненулевое решение

$$u_{m_0 n_0}(x, t) = \sin \mu_{m_0} x \sin \lambda_{n_0} t.$$

Таким образом, нами установлен критерий единственности решения задачи Дирихле при любом p .

ТЕОРЕМА 3. *Если существует решение задачи (1.2), (1.4), (2.28) и (2.29), то оно единственно только тогда, когда отношение сторон T/l прямоугольника D является иррациональным числом.*

ЛЕММА 5. *Если $\alpha > 0$ является иррациональным алгебраическим числом степени $n \geq 2$, то существует постоянная $L_0 > 0$ такая, что при всех $m, n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{mn}| \geq L_0 m^{-1-\varepsilon} (mn)^{p-1/2}. \quad (2.38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (2.37) на основании (2.18) имеем

$$|\Delta_{mn}| \geq \left(\frac{\pi}{T}\right)^{2p} \delta m^{-1-\varepsilon} 2\alpha^{p/2} (nm)^{p/2} p\alpha^{(p-1)/2} (mn)^{(p-1)/2} = L_0 m^{-1-\varepsilon} (mn)^{p-1/2}.$$

Формально из ряда (2.31) почленным дифференцированием составим ряд

$$\frac{\partial^{k+l} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^l} = \sum_{m, n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p f_{mn}}{\Delta_{mn}} X_m^{(k)}(x) T_n^{(l)}(t), \quad (2.39)$$

где $k, l \in \mathbb{N}_0$ и $k + l \leq 2p$, который в силу оценки (2.38) мажорируется числовым рядом

$$L_1 \sum_{m, n=1}^{+\infty} \frac{|f_{mn}| m^k n^l}{|\Delta_{mn}|} \leq L_2 \sum_{m, n=1}^{+\infty} |f_{mn}| m^{3/2+\varepsilon+k-p} n^{l+1/2-p}. \quad (2.40)$$

Здесь L_i , $i \in \mathbb{N}$, — положительные постоянные.

ЛЕММА 6. *Если $f(x, t) \in C^{2p+5}(\overline{D})$,*

$$f_x^{(i)}(0, t) = f_x^{(i)}(l, t) = \begin{cases} 0, & i = 0, 2, \dots, p+1, \text{ когда } p+3 - \text{четное}, \\ 0, & i = 0, 2, \dots, p+2, \text{ когда } p+3 - \text{нечетное}, \end{cases}$$

$$f_t^{(j)}(x, 0) = f_t^{(j)}(x, T) = \begin{cases} 0, & j = 0, 2, \dots, p+1, \text{ когда } p+2 - \text{нечетное}, \\ 0, & j = 0, 2, \dots, p, \text{ когда } p+2 - \text{четное}, \end{cases}$$

то справедлива оценка

$$|f_{mn}| \leq \frac{L_3}{m^{p+3}n^{p+2}}. \quad (2.41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правую часть равенства (2.34) представим в виде

$$f_{mn} = \frac{2}{\sqrt{lT}} \int_0^T \sin \lambda_n t \, dt \int_0^l f(x, t) \sin \mu_m x \, dx = \frac{2}{\sqrt{lT}} \int_0^T P_m(t) \sin \lambda_n t \, dt, \quad (2.42)$$

где

$$P_m(t) = \int_0^l f(x, t) \sin \mu_m x \, dx. \quad (2.43)$$

В интеграле (2.43) интегрируя по частям $p+3$ раза с учетом условий леммы, получим

$$P_m(t) = \frac{L_4}{m^{p+3}} \int_0^l \frac{\partial^{p+3} f(x, t)}{\partial x^{p+3}} \tilde{X}_{mp}(x) \, dx, \quad (2.44)$$

где

$$\tilde{X}_{mp}(x) = \begin{cases} \sin \mu_m x, & \text{если } p+3 - \text{четное}, \\ \cos \mu_m x, & \text{если } p+3 - \text{нечетное}, \end{cases}$$

Подставляя (2.44) в (2.42) имеем

$$\begin{aligned} f_{mn} &= \frac{L_5}{m^{p+3}} \int_0^l \tilde{X}_{mp}(x) \, dx \int_0^T \frac{\partial^{p+3} f(x, t)}{\partial x^{p+3}} \sin \lambda_n t \, dt \\ &= \frac{L_5}{m^{p+3}} \int_0^l \tilde{X}_{mp}(x) \frac{\partial^{p+3}}{\partial x^{p+3}} q_n(x) \, dx, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где

$$Q_n(x) = \int_0^T f(x, t) \sin \lambda_n x \, dx. \quad (2.46)$$

Интегрируя по частям $p+2$ раза в интеграле равенства (2.46), имеем

$$Q_n(x) = \frac{L_6}{n^{p+2}} \int_0^T \frac{\partial^{p+2} f(x, t)}{\partial t^{p+2}} \tilde{T}_{np}(t) \, dt, \quad (2.47)$$

где

$$\tilde{T}_{np}(t) = \begin{cases} \sin \lambda_n t, & \text{если } p+2 - \text{четное}, \\ \cos \lambda_n t, & \text{если } p+2 - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Теперь подставляя (2.47) в равенство (2.45), получим

$$f_{mn} = \frac{L_7}{m^{p+3}n^{p+2}} \iint_D \frac{\partial^{2p+5} f(x, t)}{\partial x^{p+3} \partial t^{p+2}} \tilde{X}_{mp}(x) \tilde{T}_{np}(t) \, dx \, dt.$$

Отсюда уже следует справедливость (2.41).

Тогда в силу оценки (2.41) ряд (2.40) оценивается рядом

$$L_8 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2p-k+3/2-\varepsilon}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p-l+3/2}}. \quad (2.48)$$

В силу сходимости ряда (2.48) все ряды вида (2.39) сходятся равномерно в $\bar{D}$. Тем самым установлена справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4. *Если число α и функция $f(x, t)$ удовлетворяют условиям лемм 5 и 6, то существует единственное решение задачи (1.2), (1.4), (2.28), (2.30), которое определяется рядом (2.31).*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Сопоставляя теоремы 2 и 4, видим, что при доказательстве существования решения задачи Дирихле в случае $p = 1$ требуется меньшая гладкость от граничных функций $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$, чем в общем случае от правой части $f(x, t)$ уравнения (2.28). Поскольку случай $p = 1$ представляет практический интерес [6], [11], [12], то предложенный в п. 2.1 подход позволяет получить теоремы существования решения задачи Дирихле при более слабых условиях на граничные функции.

Отметим, что в работе [10] задача Дирихле изучена для более общего уравнения, чем (2.28), в прямоугольнике D , где $l = 1$, $T \leq 1$, и почти для всех T доказана разрешимость этой задачи. Из данного результата не ясно, для каких чисел $T \leq 1$ имеет место существование решения задачи Дирихле.

3. Задача Дирихле для трехмерных уравнений с частными производными высоких порядков и проблема Ферма

Рассмотрим уравнение в частных производных (1.7) в прямоугольном параллелепипеде Q и поставим задачу (1.8)–(1.11). Введем следующие системы функций:

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} x = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_{1m} x, & \mu_{1m} &= \frac{\pi m}{l}, & m &= 1, 2, \dots, \\ Y_n(y) &= \sqrt{\frac{2}{q}} \sin \frac{\pi n}{q} y = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin \mu_{2n} y, & \mu_{2n} &= \frac{\pi n}{q}, & n &= 1, 2, \dots, \\ T_k(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\pi k}{T} t = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \lambda_k t, & \lambda_k &= \frac{\pi k}{T}, & k &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

каждая из них ортонормирована, полна и образует базис соответственно в пространствах $L_2[0, l]$, $L_2[0, q]$ и $L_2[0, T]$, и произведение

$$X_m(x)Y_n(y)T_k(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{lqT}} \sin \mu_{1m} x \sin \mu_{2n} y \sin \lambda_k t \quad (3.1)$$

образует систему, которая ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2(Q)$. Решение задачи (1.8)–(1.11) будем искать в виде суммы

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n,k=1}^{+\infty} u_{mnk} X_m(x) Y_n(y) T_k(t). \quad (3.2)$$

Предположим, что существует решение $u(x, y, t)$ задачи (1.8)–(1.11). Тогда коэффициенты ряда (3.2) однозначно находятся по формуле

$$u_{mnk} = \iiint_Q u(x, y, t) X_m(x) Y_n(y) T_k(t) dx dy dt. \quad (3.3)$$

Допустим, что $f(x, y, t)$ – достаточно гладкая функция, обращающаяся в нуль на боковых сторонах параллелепипеда Q со своими нужными производными. Тогда функцию f можно единственным образом разложить в ряд по системе (3.1):

$$f(x, y, t) = \sum_{m,n,k=1}^{+\infty} f_{mnk} X_m(x) Y_n(y) T_k(t), \quad (3.4)$$

где

$$f_{mnk} = \iiint_Q f(x, y, t) X_m(x) Y_n(y) T_k(t) dx dy dt. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.2) и (3.4) в исходное уравнение (1.8), найдем коэффициенты

$$u_{mnk} = \frac{(-1)^p f_{mnk}}{\lambda_k^{2p} - \mu_{1m}^{2p} - \mu_{2n}^{2p}}, \quad (3.6)$$

когда при всех $m, n, k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{mnk} = \lambda_k^{2p} - \mu_{1m}^{2p} - \mu_{2n}^{2p} = \pi^{2p} \left[\left(\frac{k}{T} \right)^{2p} - \left(\frac{m}{l} \right)^{2p} - \left(\frac{n}{q} \right)^{2p} \right] = \pi^{2p} \tilde{\Delta}_{mnk} \neq 0. \quad (3.7)$$

Мы теперь в состоянии доказать единственность решения задачи (1.8)–(1.11). Пусть функция $u(x, y, t)$ является решением однородной задачи (1.8)–(1.11), где $f(x, y, t) \equiv 0$ в Q , и выполнены условия (3.7) при всех m, n, k из $\mathbb{N}$, т.е. уравнение $\tilde{\Delta}_{mnk} = 0$ не разрешимо в множестве натуральных чисел относительно m, n, k . Тогда из (3.5) следует, что $f_{mnk} \equiv 0$. В силу этого из равенств (3.6) и (3.7) получим

$$\iiint_Q u(x, y, t) X_m(x) Y_n(y) T_k(t) dx dy dt = 0. \quad (3.8)$$

На основании (3.8) и полноты системы (3.1) в $L_2(Q)$ следует, что $u(x, y, t) = 0$ почти всюду в Q , а в силу (1.8) функция $u(x, y, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}$.

Если при некоторых $m = m_0$, $n = n_0$ и $k = k_0$ выражение $\Delta_{m_0 n_0 k_0} = 0$, то однородная задача Дирихле для уравнения (1.7) при $f(x, y, t) \equiv 0$ и любом p в области Q имеет ненулевое решение

$$u_{m_0 n_0 k_0}(x, y, t) = \sin \mu_{1m_0} x \sin \mu_{2n_0} y \sin \lambda_{k_0} t. \quad (3.9)$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Если существует решение задачи (1.8)–(1.11), то оно единственно только тогда, когда при всех m, n, k из $\mathbb{N}$ выполнены условия (3.7), т.е. когда уравнение $\tilde{\Delta}_{mnk} = 0$ не разрешимо в множестве натуральных чисел.*

Если $l = q = T$, т.е. Q – куб, то уравнение $\tilde{\Delta}_{mnk} = 0$ переходит в известное уравнение Ферма

$$m^{2p} + n^{2p} = k^{2p}. \quad (3.10)$$

Когда $q = l$, уравнение $\tilde{\Delta}_{mnk} = 0$ равносильно уравнению

$$m^{2p} + n^{2p} = \left(\frac{l}{T}k\right)^{2p}. \quad (3.11)$$

Отсюда видно, что если отношение l/T является рациональным числом, то уравнение (3.11) сводится к уравнению типа (3.10).

Таким образом, если $l = q = T$ или $q = l \neq T$, $l/T \in \mathbb{Q}$ или $q = T \neq l$, $T/l \in \mathbb{Q}$, то в силу доказанной теоремы 1 единственность решения задачи Дирихле для уравнения (1.7) при любом $p \in \mathbb{N}$ равносильна великой проблеме Ферма для уравнения типа (3.10).

В общем случае, т.е. когда l , q и T – любые положительные числа, вопрос об единственности решения задачи (1.8)–(1.11) равносильен тому, что уравнение

$$\left(\frac{m}{l}\right)^{2p} + \left(\frac{n}{q}\right)^{2p} = \left(\frac{k}{T}\right)^{2p}$$

не разрешимо в множестве $\mathbb{N}$. Вопросы обоснования сходимости ряда (3.2) в классе функций (1.8) остаются открытыми, так как не удается получить оценки для выражения Δ_{mnk} аналогично разделу 2.

Отметим, что задача (1.8)–(1.11) при $p = 1$ изучена в работе [18]. Полученные здесь результаты были апробированы автором докладами на международных конференциях [19]–[21].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Hadamard, “On some topics connected with linear partial differential equations”, *Proc. Benares Math. Soc.*, **3** (1921), 39–48.
- [2] A. Huber, “Die erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$ ”, *Monatsh. Math. Phys.*, **39** (1932), 79–100.
- [3] P. Mangeron, “Sopra un problem al contorno per un’equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche realidoppie”, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat.* (4), *Napoli*, **2** (1932), 29–40.
- [4] P. G. Bourgin, R. Duffin, “The Dirichlet problem for the vibrating string equation”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45**:12 (1939), 851–858.
- [5] F. John, “Diriclet problem for a hyperbolic equation”, *Amer. J. Math.*, **63**:1 (1941), 141–154.
- [6] С. Л. Соболев, “Пример корректной задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе”, *Докл. АН СССР*, **109** (1956), 707–709.
- [7] Р. А. Александрян, “О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге”, *Докл. АН СССР*, **73** (1950), 869–872.
- [8] Н. Н. Вахания, “Об одной краевой задаче с данными на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны”, *Докл. АН СССР*, **116** (1957), 906–909.
- [9] Ю. М. Березанский, “О задаче Дирихле для уравнения колебания струны”, *Укр. матем. журн.*, **12**:4 (1960), 363–372.

- [10] П. П. Мосолов, “О задаче Дирихле для уравнений в частных производных”, *Изв. вузов. Матем.*, 1960, № 3, 213–218.
- [11] В. И. Арнольд, “Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **25**:1 (1961), 21–86.
- [12] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.
- [13] К. Б. Сабитов, “О задаче Дирихле для уравнения струны”, Тр. Стерлитамакского филиала АН Респ. Башкортостан. Сер. Физ.-матем. и техн. науки”, **3**, Гилем, Уфа, 2006, 169–176.
- [14] В. А. Ильин, “Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения”, *Матем. заметки*, **17**:1 (1975), 91–101.
- [15] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Наука, М., 1978.
- [16] А. А. Бухштаб, *Теория чисел*, Просвещение, М., 1966.
- [17] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, Мир, М., 1965.
- [18] Р. Денчев, “О задаче Дирихле для волнового уравнения”, *Докл. АН СССР*, **127**:3 (1959), 501–504.
- [19] К. Б. Сабитов, “Малые знаменатели и задача Дирихле для уравнений в частных производных”, *Материалы международной конференции “Метрическая геометрия поверхностей и многогранников”*, посвященной 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова, М., 2010, 93–94.
- [20] К. Б. Сабитов, “Задача Дирихле для двумерных уравнений в частных производных”, *Материалы международного Российско-Болгарского симпозиума “Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики”*, Нальчик, 2010, 212–214.
- [21] К. Б. Сабитов, “Малые знаменатели в задачах Дирихле для дифференциальных уравнений в частных производных”, *Материалы международной конференции “Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел”*, Белгород, 2011, 107–108.

К. Б. Сабитов

Институт прикладных исследований АН
Республики Башкортостан, г. Стерлитамак
Новосибирский государственный университет
E-mail: Sabitov_fmfm@mail.ru

Поступило

30.11.2011

Исправленный вариант

26.06.2014