Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Макаричев, Приближение периодических функций с помощью $\text{mur}_s(x)$, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 878–901

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:57:27

Приближение периодических функций с помощью $\text{up}_s(x)$

В. А. Макаричев

Рассмотрены пространства линейных комбинаций сдвигов финитного решения одного функционально-дифференциального уравнения. Доказана их асимптотическая экстремальность для приближения классов $\widetilde{W}_2^r$ по норме L_2 .

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm9288

1. Предварительные сведения. В работах [1]–[3] было проведено исследование аппроксимационных свойств UP_n и $\widetilde{\text{UP}}_n$ – пространств линейных комбинаций сдвигов функции

$$\text{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(t2^{-k})}{t2^{-k}} dt$$

класса C^∞ , которая является финитным решением уравнения $y'(x) = 2(y(2x+1) - y(2x-1))$. Пространство UP_n – это пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \cdot \text{up}\left(x - \frac{k}{2^n}\right), \quad (1.1)$$

а $\widetilde{\text{UP}}_n \subset C_{[-\pi, \pi]}$ – пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \cdot \text{up}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{2^n}\right)$$

таких, что для любого $l = 0, 1, 2, \dots$ выполняется $\varphi^{(l)}(-\pi) = \varphi^{(l)}(\pi)$. Согласно [2] справедливо

$$\dim \text{UP}_n = 2^{n+1} + n + 1 \quad \text{и} \quad \dim \widetilde{\text{UP}}_n = 2^{n+1}.$$

Было также установлено, что в этих пространствах есть базисы, состоящие из сдвигов финитной функции с носителем $[-(n+2)/2^{n+1}, (n+2)/2^{n+1}]$.

Пусть $\widetilde{W}_\infty^r$ – класс функций $f \in C_{[-\pi, \pi]}^r$ таких, что для любого $k = 0, 1, \dots, r-1$ выполняется равенство $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$, причем $\|f^{(r)}\|_{C_{[-\pi, \pi]}} \leq 1$. Пусть $\widetilde{W}_2^r$ – класс функций $f \in C_{[-\pi, \pi]}^{r-1}$ таких, что для любого $k = 0, 1, \dots, r-1$ выполняется

$f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и $\|f^{(r)}\|_{L_2[-\pi, \pi]} \leq 1$. Пусть также

$$E_X(A, L) = \sup_{\varphi \in A} \inf_{\psi \in L} \|\varphi - \psi\|_X.$$

В [2] доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_C(\widetilde{W}_\infty^r, \widetilde{\text{UP}}_n)}{d_{2^{n+1}}(\widetilde{W}_\infty^r, C)} = 1,$$

где $d_N(K, X) = \inf_{\dim L=N} E_X(K, L)$ – колмогоровский поперечник [4]. Другими словами, пространства $\widetilde{\text{UP}}_n$ асимптотически экстремальны для приближения классов $\widetilde{W}_\infty^r$ по норме C . Кроме того, согласно [3] при $n \geq n(r)$ справедливо равенство

$$E_{L_2[-\pi, \pi]}(\widetilde{W}_2^r, \widetilde{\text{UP}}_n) = d_{2^{n+1}}(\widetilde{W}_2^r, L_2).$$

Иными словами, при $n \geq n(r)$ пространство $\widetilde{\text{UP}}_n$ экстремально для приближения классов $\widetilde{W}_2^r$ по норме L_2 .

Функция $up(x)$ нашла свое применение в теории так называемых обобщенных рядов Тейлора.

Пусть H_α – класс функций $f \in C_{[-1, 1]}^\infty$ таких, что

$$|f^{(n)}(x)| \leq c(f) \cdot \alpha^n \cdot 2^{n(n+1)/2}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots$$

В [3], [5] для функций данного класса был предложен и исследован ряд, названный обобщенным рядом Тейлора. Согласно [3], [5] если функция $f(x)$ принадлежит классу H_α при $\alpha \in [1, 2)$, то

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \cdot \varphi_{n,k}^{(l)}(x),$$

где

$$N_0 = \{-1, 0, 1\}, \quad N_n = \{-2^{n-1}, -2^{n-1} + 1, \dots, 2^{n-1}\}, \quad n \neq 0, \\ x_{0,k} = k, \quad k \in N_0, \quad x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}}, \quad n \neq 0, \quad k \in N_n,$$

при этом ряд в правой части сходится равномерно на отрезке $[-1, 1]$ для любого $l = 0, 1, 2, \dots$. Базисные функции $\varphi_{n,k}(x)$ являются функциями вида (1.1) и однозначно определяются из условий $\varphi_{n,k} \in H_1$ и $\varphi_{n,k}^{(m)}(x_{m,j}) = \delta_n^m \cdot \delta_k^j$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, $k \in N_n$, $m = 0, 1, 2, \dots$ и $j \in N_m$, где δ_n^m – символ Кронекера.

В 1981 г. на семинаре Д. Е. Меньшова и П. Л. Ульянова по теории функций действительного переменного (механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова) был поставлен вопрос о возможности распространения результатов относительно обобщенных рядов Тейлора на более широкие классы функций.

В работах [6]–[8] были построены обобщенные ряды Тейлора для функций классов

$$H_{\alpha,s} = \{f \in C_{[-1, 1]}^\infty : |f^{(n)}(x)| \leq c(f) \cdot \alpha^n \cdot 2^n \cdot (2s)^{n(n-1)/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Установлено, что если $f(x)$ принадлежит классу $H_{\alpha,s}$ при $s = 2, 3, 4, \dots$ и $1 < \alpha < 2s$, то

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in N_{s,n}} a_{s,n,k} \cdot \varphi_{s,n,k}^{(l)}(x) + \sum_{p \in D_{s,n}} b_{s,n,p} \cdot \psi_{s,n,p}^{(l)}(x) \right),$$

где

$$\begin{aligned} N_{s,0} &= \{-1, 0, 1\}, \\ N_{s,n} &= \{-s \cdot (2s)^{n-1}, -s \cdot (2s)^{n-1} + 1, \dots, s \cdot (2s)^{n-1}\}, \quad n \neq 0, \\ x_{s,0,k} &= k, \quad k \in N_{s,0}, \quad x_{s,n,k} = \frac{k}{s \cdot (2s)^{n-1}}, \quad n \neq 0, \quad k \in N_{s,n}, \\ D_{s,n} &= \{1, 2, 3, \dots, (2s)^{n+1} - 1\} \setminus \{k \cdot s\}, \quad k \in N, \\ x_{s,n,p}^* &= -1 + \frac{p}{2(2s)^n}, \quad p \in D_{s,n}, \\ a_{s,n,k} &= f^{(n)}(x_{s,n,k}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k \in N_{s,n}, \\ b_{s,n,p} &= f^{(n)}\left(x_{s,n,p}^* + \frac{1}{s \cdot (2s)^n}\right) - 2 \cdot f^{(n)}\left(x_{s,n,p}^*\right) \\ &\quad + f^{(n)}\left(x_{s,n,p}^* - \frac{1}{s \cdot (2s)^n}\right) \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots, \quad p \in D_{s,n}; \end{aligned}$$

причем ряд в правой части равенства сходится равномерно на отрезке $[-1, 1]$ для любого $l = 0, 1, 2, \dots$. Базисные функции $\varphi_{s,n,k}(x)$ и $\psi_{s,n,p}(x)$ этого ряда были построены в [8], [9] (см. также [10]) с помощью функции

$$\text{mur}_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} F_s(t) dt, \quad \text{где } F_s(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(st/(2s)^k)}{s^2 \cdot t/(2s)^k \cdot \sin(t/(2s)^k)},$$

которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2 \cdot \sum_{k=1}^s (y(2sx + 2s - 2k + 1) - y(2sx - 2k + 1)), \quad (1.2)$$

при этом $\varphi_{s,n,k}(x)$ и $\psi_{s,n,p}(x)$ являются функциями вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \cdot \text{mur}\left(x - \frac{k}{(2s)^n}\right). \quad (1.3)$$

Таким образом, интерес представляет вопрос об аппроксимационных свойствах пространств линейных комбинаций сдвигов функции $\text{mur}_s(x)$. В частности, переносятся ли на такие пространства приведенные выше результаты относительно UP_n и $\widetilde{\text{UP}}_n$.

Изложим основные результаты настоящей статьи.

Далее мы будем считать, что $s = 2, 3, 4, \dots$.

Пусть $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]} \subset C_{[-\pi, \pi]}$ – пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \cdot \text{mur}_s\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n}\right)$$

таких, что для любого $l = 0, 1, 2, \dots$ выполняется равенство $\varphi^{(l)}(-\pi) = \varphi^{(l)}(\pi)$. Далее будет доказано, что размерность этого пространства равна $2(2s)^n$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{L_2}(\widetilde{W}_2^r, \widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]})}{d_{2(2s)^n}(\widetilde{W}_2^r, L_2)} = 1.$$

То есть пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$ являются асимптотически экстремальными для приближения классов $\widetilde{W}_2^r$ по норме L_2 .

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства функций $\text{mur}_s(x)$:

- 1) $\text{supp } \text{mur}_s = [-1, 1]$ [6];
- 2) $\text{mur}_s(x) \in C_{[-1,1]}^\infty$ [6];
- 3) $\int_{-\infty}^\infty \text{mur}_s(x) dx = 1$ [6];
- 4) $F_s(t)$ – целая функция экспоненциального типа 1 [2];
- 5) производная l -го порядка функции $\text{mur}_s(x)$ вычисляется по формуле

$$\text{mur}_s^{(l)}(x) = 2^l \cdot (2s)^{(l-1)l/2} \cdot \sum_{k=1}^{(2s)^l} \delta_k^{(s,l)} \cdot \text{mur}_s((2s)^l x + (2s)^l - 2k + 1),$$

где коэффициенты $\{\delta_k^{(s,l)}\}$ вычисляются следующим образом:

- если $l = 1$, то $\delta_1^{(s,1)} = \dots = \delta_s^{(s,1)} = 1$, $\delta_{s+1}^{(s,1)} = \dots = \delta_{2s}^{(s,1)} = -1$;
- если $l \geq 2$, то для любого $i = 1, \dots, (2s)^{l-1}$ справедливо

$$\begin{aligned} \delta_{i+j \cdot (2s)^{l-1}}^{(s,l)} &= \delta_i^{(s,l-1)}, & \text{где } j &= 0, 1, \dots, s-1, \\ \delta_{i+k \cdot (2s)^{l-1}}^{(s,l)} &= -\delta_i^{(s,l-1)}, & \text{где } k &= s, \dots, 2s-1. \end{aligned}$$

Справедливость последнего свойства может быть установлена непосредственно путем дифференцирования функционально-дифференциального уравнения (1.2).

Чтобы доказать теорему 1, нам понадобится специальный ортогональный базис линейного пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$. Используя результаты пп. 2–4, мы построим этот базис в п. 5.

2. Пространство $\text{MUP}_s^{[n]}$. Введем в рассмотрение $\text{MUP}_s^{[n]} \subset C_{[-1,1]}$ – пространство функций вида (1.3). Учитывая свойство 1) функции $\text{mur}_s(x)$, получаем, что

$$\text{MUP}_s^{[n]} = \left\{ \varphi(x) = \sum_{k=-2 \cdot (2s)^n + 1}^{2(2s)^n - 1} c_k \cdot \text{mur}_s\left(x - \frac{k}{(2s)^n}\right) \right\}.$$

Чтобы определить размерность данного пространства, нам понадобится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ существуют такие коэффициенты $\{v_i\}$, что*

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} v_i \cdot \text{mur}_s\left(x - \frac{i}{(2s)^n}\right) \equiv x^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки справедливости утверждения теоремы воспользуемся методом математической индукции.

1. Рассмотрим $n = 0$. В этом случае утверждение теоремы следует из того, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{mur}_s(x - k) \equiv 1. \quad (2.1)$$

Это свойство взято из [8]. Для полноты изложения приведем его доказательство.

Разложим функцию $\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{mur}_s(x - k)$ в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \cdot e^{ij2\pi x}, \quad \text{где} \quad c_j = \int_0^1 \varphi(x) \cdot e^{-ij2\pi x} dx = F_s(2\pi j).$$

Из определения функции $F_s(t)$ следует, что

$$F_s(2\pi j) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j \neq 0. \end{cases}$$

Значит, $\varphi(x) \equiv 1$.

2. Предположим, что существуют коэффициенты $\{d_i\}$ такие, что

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \cdot \text{mur}_s\left(x - \frac{i}{(2s)^{n-1}}\right) \equiv x^{n-1}.$$

3. Докажем, что существуют коэффициенты $\{c_i\}$ такие, что

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \cdot \text{mur}_s\left(x - \frac{i}{(2s)^n}\right) \equiv x^n.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \cdot \text{mur}_s\left(x - \frac{k}{(2s)^n}\right).$$

Используя свойство 5) функции $\text{mur}_s(x)$, получаем

$$\varphi'(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j \cdot \text{mur}_s\left(2s \cdot x - \frac{j}{(2s)^{n-1}}\right),$$

где

$$d_j = \sum_{l=1}^{2s} 2 \cdot \delta_l^{(s,1)} \cdot v_{j+(2s)^n+(-2l+1) \cdot (2s)^{n-1}}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Докажем, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.2) относительно коэффициентов $\{v_i\}$ имеет решение при любых $\{d_j\}$.

Обозначим

$$x_{p,m} = v_{m \cdot 2(2s)^{n-1} + p + (2s)^n + (2s)^{n-1}} \quad \text{и} \quad b_{p,m} = d_{2m \cdot (2s)^{n-1} + p}$$

для произвольных $p = 0, 1, \dots, 2(2s)^{n-1} - 1$ и $m \in \mathbb{Z}$. В этих обозначениях система (2.2) принимает следующий вид: для каждого $p = 0, 1, \dots, 2(2s)^{n-1} - 1$ имеет место

$$\sum_{l=1}^{2s} 2 \cdot \delta_l^{(s,1)} \cdot x_{p,m-l} = b_{p,m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Другими словами, вопрос о разрешимости системы уравнений (2.2) сводится к вопросу о разрешимости $2(2s)^{n-1}$ системы вида (2.3). Каждая такая система является совместной (достаточно положить, например, $x_{p,1} = x_{p,2} = \dots = x_{p,2s-1} = 0$ и затем последовательно найти неизвестные $x_{p,0}, x_{p,-1}, x_{p,-2}, \dots$ и $x_{p,2s}, x_{p,2s+1}, \dots$; важную роль при этом играет тот факт, что все коэффициенты $\delta_l^{(s,1)}$ не равны нулю). Значит, система уравнений (2.2) имеет решение при любых $\{d_j\}$.

Из предположения индукции следует существование коэффициентов $\{d_j\}$ таких, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j \cdot \text{mur}_s \left(2s \cdot x - \frac{j}{(2s)^{n-1}} \right) \equiv n \cdot x^{n-1}.$$

Значит, найдутся такие числа $\{v_k\}$, что $\varphi'(x) \equiv n \cdot x^{n-1}$. Из этого и формулы (2.1) следует существование $\{c_i\}$ таких, что

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \cdot \text{mur}_s \left(x - \frac{i}{(2s)^n} \right) \equiv x^n.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Размерность пространства $\text{MUP}_s^{[n]}$ равна*

$$2(2s)^n + n + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение линейный оператор

$$D^{n+1} : \text{MUP}_s^{[n]} \rightarrow L, \quad \text{где} \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Чтобы доказать теорему, найдем размерность ядра и образа D^{n+1} .

Из теоремы 2 следует, что пространство $\text{MUP}_s^{[n]}$ содержит многочлены степени не выше n . Значит, ядро линейного оператора D^{n+1} есть линейное пространство многочленов, степень которых не превышает n . Следовательно, размерность ядра D^{n+1} составляет $n + 1$.

Определим теперь размерность образа D^{n+1} . Для этого рассмотрим произвольную функцию

$$\varphi(x) = \sum_{p=-2(2s)^n+1}^{2(2s)^n-1} c_p \cdot \text{mur}_s \left(x - \frac{p}{(2s)^n} \right), \quad x \in [-1, 1].$$

Используя свойства 1) и 5) функции $\text{mur}_s(x)$, получаем

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \sum_{q=-s \cdot (2s)^n+1}^{s \cdot (2s)^n} d_q \cdot \text{mur}_s((2s)^{n+1}x - 2q + 1), \quad (2.4)$$

где

$$d_q = \sum_{p \in I_q} 2^{n+1} \cdot (2s)^{n(n+1)/2} \cdot \delta_{s \cdot (2s)^n - s \cdot p + q}^{(s, n+1)} \cdot c_p, \quad (2.5)$$

$$I_q = \left\{ p \in Z : |p| \leq 2(2s)^n - 1, - (2s)^n + \frac{q}{s} \leq p \leq (2s)^n + \frac{q-1}{s} \right\}.$$

Итак, образ линейного оператора D^{n+1} состоит из функций вида (2.4), причем на коэффициенты $\{d_q\}$ наложены некоторые ограничения.

Из свойства 1) функции $\text{mur}_s(x)$ следует линейная независимость системы функций

$$\{\text{mur}_s((2s)^{n+1}x - 2q + 1)\}_{q=-s(2s)^n+1}^{s(2s)^n}.$$

Значит, чтобы найти размерность образа оператора D^{n+1} , достаточно выяснить, при каких коэффициентах $\{d_q\}$ система линейных алгебраических уравнений (2.5) относительно $\{c_p\}$ имеет решение.

Докажем сначала, что некоторые коэффициенты $\{d_q\}$ в представлении $\varphi^{(n+1)}(x)$ являются одинаковыми.

Для этого положим

$$q_1 = -s \cdot (2s)^n + s \cdot r + l_1 \quad \text{и} \quad q_2 = -s \cdot (2s)^n + s \cdot r + l_2,$$

где $r = 1, 2, \dots, 2(2s)^n$, $l_1 = -s + 1, -s + 2, \dots, 0$ и $l_2 = -s + 1, -s + 2, \dots, 0$. Покажем, что $d_{q_1} = d_{q_2}$.

Из (2.5) следует, что

$$d_{q_1} = \sum_{p \in I_{q_1}} 2^{n+1} \cdot (2s)^{n(n+1)/2} \cdot c_p \cdot \delta_{s \cdot (r-p)+l_1}^{(s, n+1)},$$

$$d_{q_2} = \sum_{p \in I_{q_2}} 2^{n+1} \cdot (2s)^{n(n+1)/2} \cdot c_p \cdot \delta_{s \cdot (r-p)+l_2}^{(s, n+1)},$$

при этом

$$I_{q_1} = I_{q_2} = \{p \in Z : |p| \leq 2(2s)^n - 1, -2(2s)^n + r \leq p \leq r - 1\}.$$

Согласно свойству 5) функции $\text{mur}_s(x)$ справедливо $\delta_{s \cdot (r-p)+l_1}^{(s, l+1)} = \delta_{s \cdot (r-p)+l_2}^{(s, l+1)}$. Следовательно, $d_{q_1} = d_{q_2}$.

Таким образом, если выполнено условие $d_{-s \cdot (2s)^n + s \cdot r + l_1} = d_{-s \cdot (2s)^n + s \cdot r + l_2}$ для любых $r = 1, 2, \dots, 2(2s)^n$ и $l_1, l_2 \in \{-s + 1, -s + 2, \dots, 0\}$, то систему (2.5) можно записать следующим образом (учитывая то, что некоторые уравнения одинаковые): для $r = 1, 2, \dots, 2(2s)^n$

$$\sum_{p=-2(2s)^n+r}^{r-1} \delta_{s \cdot (r-p)}^{(s, n+1)} \cdot c_p = d_{-s \cdot (2s)^n + s \cdot r} \cdot 2^{-n-1} \cdot (2s)^{-n(n+1)/2}. \quad (2.6)$$

Поскольку $\delta_{s \cdot (r-p)}^{(s, n+1)} \neq 0$ для всех $r = 1, 2, \dots, 2(2s)^n$ и $p = -2(2s)^n + r, \dots, r - 1$, то система (2.6) имеет решение при любых $\{d_{-s \cdot (2s)^n + s \cdot r}\}$. Следовательно, размерность образа D^{n+1} равна $2(2s)^n$.

Итак,

$$\dim(\text{MUP}_s^{[n]}) = \dim(\text{Ker } D^{n+1}) + \dim(\text{Im } D^{n+1}) = 2(2s)^n + n + 1.$$

Теорема доказана.

Одним из следствий теоремы 3 является линейная зависимость системы функций

$$\left\{ \text{mur}_s \left(x - \frac{k}{(2s)^n} \right) \right\}_{k=-2(2s)^n+1}^{2(2s)^n-1} \quad \text{при } x \in [-1, 1] \quad \text{и } n \geq 1.$$

3. Функции $\text{Fmur}_s^{[n]}(x)$. Так как пространство $\text{MUP}_s^{[n]}$ состоит из сдвигов одной функции, то естественной является гипотеза о существовании некоторой функции, сдвиги которой образуют базис данного пространства. В настоящем пункте такая функция будет найдена.

Введем в рассмотрение функции

$$\text{Fmur}_s^{[n]}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} F_s^{[n]}(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$F_s^{[n]}(t) = \left(\frac{\sin(t/(2(2s)^n))}{t/(2(2s)^n)} \right)^n \cdot F_s \left(\frac{t}{(2s)^n} \right).$$

Следует сразу отметить, что $\text{Fmur}_s^{[0]}(x)$ совпадает с функцией $\text{mur}_s(x)$.

Поскольку для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ функция $F_s^{[n]}(t)$ является целой функцией экспоненциального типа, то по теореме Винера–Пэли [11] при $|x| > n + 2/(2(2s)^n)$ справедливо равенство $\text{Fmur}_s^{[n]}(x) = 0$.

Докажем, что в пространстве $\text{MUP}_s^{[n]}$ имеется базис, состоящий из сдвигов функции $\text{Fmur}_s^{[n]}(x)$. Для этого нужно сначала показать, что $\text{mur}_s(x)$ может быть представлена в виде линейной комбинации сдвигов $\text{Fmur}_s^{[n]}(x)$.

ЛЕММА 1. Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ существуют коэффициенты c_k такие, что

$$\text{Fmur}_s^{[n]}(x) = \sum_k c_k \cdot \text{Fmur}_s^{[n+1]} \left(x - \frac{2k - (n+1)}{2(2s)^{n+1}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения следует, что

$$F_s^{[n]}(t) = \left(\frac{\sin(t/(2(2s)^n))}{t/(2(2s)^n)} \right)^{n+1} \cdot \frac{\sin(s \cdot t/((2s)^{n+1}))}{s \cdot \sin(t/((2s)^{n+1}))} \cdot F_s \left(\frac{t}{(2s)^{n+1}} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{F_s^{[n]}(t)}{F_s^{[n+1]}(t)} &= \frac{1}{s \cdot (2s)^{n+1}} \cdot \left(\frac{\sin(t/(2(2s)^n))}{\sin(t/(2(2s)^{n+1}))} \right)^{n+1} \cdot \frac{\sin(s \cdot t/(2s)^{n+1})}{\sin(t/(2s)^{n+1})} \\ &= \frac{1}{s \cdot (2s)^{n+1}} \left(\exp \left(-it \cdot \frac{2s-1}{2(2s)^{n+1}} \right) \cdot \frac{(\exp(it/(2s)^{n+1}))^{2s}-1}{\exp(it/(2s)^{n+1})-1} \right)^{n+1} \\ &\quad \times \exp \left(-it \cdot \frac{s-1}{(2s)^{n+1}} \right) \cdot \frac{(\exp(it/(2s)^{n+1}))^s-1}{\exp(it/(2s)^{n+1})-1}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$F_s^{[n]}(t) = \exp\left(it \cdot \frac{n+1}{2(2s)^{n+1}}\right) \cdot \exp\left(-it \cdot \frac{s(n+2)-1}{(2s)^{n+1}}\right) \cdot P\left(\exp\left(\frac{it}{(2s)^{n+1}}\right)\right),$$

где $P(x)$ – некоторый многочлен. Из свойств преобразования Фурье следует существование коэффициентов $\{c_k\}$ таких, что

$$\text{Fmup}_s^{[n]}(x) = \sum_k c_k \cdot \text{Fmup}_s^{[n+1]}\left(x - \frac{2k - (n+1)}{2(2s)^{n+1}}\right).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ существуют коэффициенты c_k такие, что

$$\text{mup}_s(x) = \sum_k c_k \cdot \text{Fmup}_s^{[n]}\left(x - \frac{2k - n}{2(2s)^n}\right).$$

Справедливость утверждения этой леммы следует из леммы 1.

Пусть $L_s^{[n]}$ – пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \cdot \text{Fmup}_s^{[n]}\left(x - \frac{2k - n}{2(2s)^n}\right), \quad x \in [-1, 1].$$

Поскольку справедливо включение

$$\text{supp Fmup}_s^{[n]}(x) \subset \left[-\frac{n+2}{2(2s)^n}, \frac{n+2}{2(2s)^n}\right],$$

то для любой функции $\varphi \in L_s^{[n]}$ имеет место представление

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{s \cdot (2s)^n + n + 1} d_j \cdot \text{Fmup}_s^{[n]}\left(x - \frac{j}{(2s)^n} + 1 + \frac{n+2}{2(2s)^n}\right), \quad x \in [-1, 1],$$

из чего видно, что

$$\dim L_s^{[n]} \leq 2(2s)^n + n + 1.$$

Из леммы 2 следует, что для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ линейное пространство $\text{MUP}_s^{[n]}$ содержится в $L_s^{[n]}$. Так как по теореме 3 размерность $\text{MUP}_s^{[n]}$ равна $2(2s)^n + n + 1$, то $L_s^{[n]}$ является пространством размерности $2(2s)^n + n + 1$ и $\text{MUP}_s^{[n]} = L_s^{[n]}$. Кроме того, система функций

$$\left\{ \text{Fmup}_s^{[n]}\left(x - \frac{j}{(2s)^n} + 1 + \frac{n+2}{2(2s)^n}\right) \right\}_{j=1}^{2(2s)^n + n + 1}$$

является линейно независимой, так как в противном случае размерность пространства $L_s^{[n]}$ была бы строго меньше $2(2s)^n + n + 1$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4. Система функций

$$\left\{ \text{Fmup}_s^{[n]}\left(x - \frac{j}{(2s)^n} + 1 + \frac{n+2}{2(2s)^n}\right) \right\}_{j=1}^{2(2s)^n + n + 1}$$

образует базис пространства $\text{MUP}_s^{[n]}$.

4. Пространство $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$. В этом пункте мы найдем размерность и базис пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$.

Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3. *Размерность пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$ не превышает $2(2s)^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка справедливости утверждения леммы проводится с использованием тех же рассуждений, что и в теореме 3.

Рассмотрим линейный оператор

$$D^{n+1}: \widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]} \rightarrow L, \quad \text{где } D = \frac{d}{dx}.$$

Найдем размерность ядра и образа D^{n+1} .

Так как пространство $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$ состоит из периодических функций, то ядро оператора D^{n+1} есть множество функций вида $\varphi(x) \equiv c$. Поэтому размерность ядра D^{n+1} равна 1.

Остается найти размерность образа D^{n+1} .

Аналогично тому, как это было проделано при доказательстве теоремы 3, можно установить, что образ линейного оператора D^{n+1} состоит из функций вида

$$\psi(x) = \sum_{q=-s \cdot (2s)^{n+1}}^{s \cdot (2s)^n} d_q \cdot \text{mur}_s \left((2s)^{n+1} \cdot \frac{x}{\pi} - 2q + 1 \right),$$

причем помимо связей вида $d_{-s \cdot (2s)^n + s \cdot r + l_1} = d_{-s \cdot (2s)^n + s \cdot r + l_2}$ при $r = 1, 2, \dots, 2(2s)^n$ и $l_1, l_2 \in \{-s + 1, -s + 2, \dots, 0\}$, на коэффициенты $\{d_q\}$ будут наложены некоторые дополнительные ограничения, являющиеся следствием периодичности функций пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$. Одним из таких ограничений является равенство

$$\sum_{q=-s \cdot (2s)^{n+1}}^{s \cdot (2s)^n - 1} d_q = 0,$$

которое следует из свойств 1) и 3) функции $\text{mur}_s(x)$ и периодичности функции $\varphi(x)$.

Значит, размерность образа линейного оператора D^{n+1} не превышает $2(2s)^n - 1$.

Итак,

$$\dim(\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}) = \dim(\text{Ker } D^{n+1}) + \dim(\text{Im } D^{n+1}) \leq 2(2s)^n.$$

Лемма доказана.

Приступим к построению базиса пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$. Для этого введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= \text{Fmur}_s^{[n]} \left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} - 1 \right) \\ &\quad + \text{Fmur}_s^{[n]} \left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} + 1 \right), \quad k = 1, \dots, n+1, \\ \psi_k(x) &= \text{Fmur}_s^{[n]} \left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} + 1 \right), \quad k = n+2, \dots, 2(2s)^n. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5. Система функций $\{\psi_1(x), \dots, \psi_{2(2s)^n}(x)\}$ образует базис пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L_s^{[n]}$ – линейное пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{2(2s)^n} b_k \cdot \psi_k(x).$$

Ранее нами было установлено, что система функций

$$\left\{ \text{Fmup}_s^{[n]} \left(x - \frac{j}{(2s)^n} + 1 + \frac{n+2}{2(2s)^n} \right) \right\}_{j=1}^{2(2s)^n + n + 1}$$

является линейно независимой. Значит, по построению система функций $\{\psi_1(x), \dots, \psi_{2(2s)^n}(x)\}$ также является линейно независимой. Следовательно, эта система образует базис пространства $L_s^{[n]}$ и $\dim L_s^{[n]} = 2(2s)^n$.

Докажем, что

$$L_s^{[n]} = \widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}.$$

Для этого установим сначала справедливость вложения $L_s^{[n]} \subseteq \widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$. Из результатов предыдущего пункта следует, что $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$ есть пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{s \cdot (2s)^n + n + 1} d_j \cdot \text{Fmup}_s^{[n]} \left(\frac{x}{\pi} - \frac{j}{(2s)^n} + 1 + \frac{n+2}{2(2s)^n} \right), \quad (4.1)$$

причем $\varphi^{(l)}(-\pi) = \varphi^{(l)}(\pi)$ для любого $l = 0, 1, 2, \dots$. Так как по построению $\psi_k(x)$ есть функция вида (4.1), то нам остается проверить выполнение условия

$$\psi_k^{(l)}(-\pi) = \psi_k^{(l)}(\pi) \quad \text{для любого } l = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $k = n + 2, \dots, 2(2s)^n$. В этом случае имеет место

$$\psi_k^{(l)}(\pi) = \frac{1}{\pi^l} \cdot \text{Fmup}_s^{[n](l)} \left(2 - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} \right), \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда с использованием свойства

$$\text{supp Fmup}_s^{[n]} \subseteq \left[-\frac{n+2}{2(2s)^n}, \frac{n+2}{2(2s)^n} \right] \quad (4.2)$$

и неравенства

$$2 - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} \geq \frac{n+2}{2(2s)^n}$$

получаем $\psi_k^{(l)}(\pi) = 0$. Аналогично получаем $\psi_k^{(l)}(-\pi) = 0$.

Если $k = 1, \dots, n + 1$, то выполняется равенство

$$\psi_k^{(l)}(\pi) = \frac{1}{\pi^l} \cdot \text{Fmup}_s^{[n](l)} \left(-\frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} \right) + \frac{1}{\pi^l} \cdot \text{Fmup}_s^{[n](l)} \left(2 - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} \right).$$

Так как

$$2 - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} \geq \frac{n+2}{2(2s)^n},$$

то с учетом (4.2) имеем

$$\psi_k^{(l)}(\pi) = \frac{1}{\pi^l} \cdot \text{Fmup}_s^{[n](l)} \left(-\frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} \right).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \psi_k^{(l)}(-\pi) &= \frac{1}{\pi^l} \cdot \text{Fmup}_s^{[n](l)} \left(-\frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi^l} \cdot \text{Fmup}_s^{[n](l)} \left(-2 - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$-2 - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} \leq -\frac{n+2}{2(2s)^n},$$

то из (4.2) следует, что

$$\psi_k^{(l)}(-\pi) = \frac{1}{\pi^l} \cdot \text{Fmup}_s^{[n](l)} \left(-\frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} \right).$$

Значит, $\psi_k^{(l)}(-\pi) = \psi_k^{(l)}(\pi)$ для всех $k = 1, \dots, 2(2s)^n$ и $l = 0, 1, 2, \dots$. Из этого следует, что для любого $k = 1, \dots, 2(2s)^n$ функция $\psi_k(x)$ принадлежит пространству $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$, откуда получаем $L_s^{[n]} \subseteq \widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$.

Итак, нами установлено, что $L_s^{[n]}$ есть $2(2s)^n$ -мерное подпространство пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$, размерность которого по лемме 3 не превышает $2(2s)^n$. Следовательно, пространство $L_s^{[n]}$ совпадает с $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$. Так как $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{2(2s)^n}$ – базис $L_s^{[n]}$, то эта система функций также является базисом пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы немедленно следует

ТЕОРЕМА 6. *Размерность пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$ равна $2(2s)^n$.*

Существенным недостатком построенного базиса является его неортогональность, что делает его неудобным в использовании при исследовании аппроксимационных свойств пространств $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$.

5. Ортогональный базис пространства $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$. Найдем разложение функций $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{2(2s)^n}$ в ряд Фурье.

1. Пусть $k = 1, \dots, n+1$. В этом случае $\psi_k(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \cdot e^{ijx}$, где

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Fmup}_s^{[n]} \left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} - 1 \right) \cdot e^{-ijx} dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Fmup}_s^{[n]} \left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} + 1 \right) \cdot e^{-ijx} dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Сделаем замену

$$z = \frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} - 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} + 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n}\right)\right) \\ &\times \int_{-2-k/(2s)^n + (n+2)/2(2s)^n}^{-k/(2s)^n + (n+2)/2(2s)^n} \text{Fmup}_s^{[n]}(z) \cdot \exp(-iz\pi j) dz. \end{aligned}$$

Аналогично, используя замену

$$z = \frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} + 1,$$

находим

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} - 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n}\right)\right) \\ &\times \int_{-k/(2s)^n + (n+2)/2(2s)^n}^{2-k/(2s)^n + (n+2)/2(2s)^n} \text{Fmup}_s^{[n]}(z) \cdot \exp(-iz\pi j) dz. \end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$\exp\left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} + 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n}\right)\right) = \exp\left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} - 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n}\right)\right),$$

то

$$\begin{aligned} c_j = I_1 + I_2 &= \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} - 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n}\right)\right) \\ &\times \int_{-2-k/(2s)^n + (n+2)/2(2s)^n}^{2-k/(2s)^n + (n+2)/2(2s)^n} \text{Fmup}_s^{[n]}(z) \cdot \exp(-iz\pi j) dz. \end{aligned}$$

Так как мы рассматриваем случай $k = 1, \dots, n+1$, то

$$-2 - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} < -\frac{n+2}{2(2s)^n}, \quad 2 - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} > \frac{n+2}{2(2s)^n},$$

что с учетом свойства

$$\text{supp Fmup}_s^{[n]} \subseteq \left[-\frac{n+2}{2(2s)^n}, \frac{n+2}{2(2s)^n}\right]$$

позволяет записать

$$c_j = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} - 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n}\right)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \text{Fmup}_s^{[n]}(z) \cdot \exp(-iz\pi j) dz.$$

Из этого следует, что

$$c_j = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} - 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n}\right)\right) \cdot F_s^{[n]}(\pi j).$$

2. Рассмотрим $k = n + 2, \dots, 2(2s)^n$. Разложим функцию $\psi_k(x)$ в ряд Фурье:

$$\psi_k(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \cdot \exp(ijx),$$

где

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Fmup}_s^{[n]} \left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} + 1 \right) \cdot \exp(-ijx) dx.$$

Используя замену

$$z = \frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n} + \frac{n+2}{2(2s)^n} + 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{1}{2} \cdot \exp \left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} - \frac{n+2}{2(2s)^n} - 1 \right) \right) \\ &\quad \times \int_{-k/(2s)^n + (n+2)/2(2s)^n}^{2-k/(2s)^n + (n+2)/2(2s)^n} \text{Fmup}_s^{[n]}(z) \cdot \exp(-i\pi jz) dz. \end{aligned}$$

Из свойства

$$\text{supp Fmup}_s^{[n]} \subseteq \left[-\frac{n+2}{2(2s)^n}, \frac{n+2}{2(2s)^n} \right]$$

следует, что

$$c_j = \frac{1}{2} \cdot \exp \left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} - \frac{n+2}{2(2s)^n} - 1 \right) \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \text{Fmup}_s^{[n]}(z) \cdot \exp(-i\pi jz) dz.$$

Значит,

$$c_j = \frac{1}{2} \cdot \exp \left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} - 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n} \right) \right) \cdot F_s^{[n]}(\pi j).$$

Итак, для любого $k = 1, \dots, 2(2s)^n$ имеет место

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_s^{[n]}(\pi j) \cdot \exp \left(-ij\pi \cdot \left(\frac{k}{(2s)^n} - 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n} \right) \right) \cdot \exp(ijx). \quad (5.1)$$

Пусть

$$\xi_p(x) = \frac{1}{(2s)^n} \cdot \sum_{k=1}^{2(2s)^n} \psi_k(x) \cdot \exp \left(i\pi \left(\frac{k}{(2s)^n} - 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n} \right) p \right), \quad p = 1, \dots, 2(2s)^n.$$

Тогда из (5.1) следует, что

$$\xi_p(x) = \frac{1}{2(2s)^n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_s^{[n]}(\pi j) \sum_{k=1}^{2(2s)^n} \exp \left(i\pi \left(\frac{k}{(2s)^n} - 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n} \right) (p-j) \right) \cdot \exp(ijx).$$

Проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2(2s)^n} \exp\left(i\pi\left(\frac{k}{(2s)^n} - 1 - \frac{n+2}{2(2s)^n}\right)(p-j)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2(2s)^n} \exp\left(i\pi\left(\frac{k-1}{(2s)^n} - 1 - \frac{n}{2(2s)^n}\right)(p-j)\right) \\ &= \exp\left(i\pi(p-j)\left(1 + \frac{n}{2(2s)^n}\right)\right) \cdot \sum_{l=0}^{2(2s)^n-1} \left(\exp\left(i\pi\frac{p-j}{(2s)^n}\right)\right)^l = A. \end{aligned}$$

Если $p-j = 2(2s)^n \cdot m$, то

$$A = \exp(i\pi m(2(2s)^n + n)) \cdot \sum_{l=0}^{2(2s)^n-1} (\exp(2i\pi m))^l = 2(2s)^n \cdot (-1)^{mn}.$$

Если $p-j \neq j + 2(2s)^n \cdot m$, то

$$A = \exp\left(i\pi(p-j) \cdot \left(1 + \frac{n}{2 \cdot (2s)^n}\right)\right) \cdot \frac{1 - (\exp(i\pi(p-j)(2s)^{-n}))^{2(2s)^n}}{1 - \exp(i\pi(p-j)(2s)^n)} = 0.$$

Следовательно,

$$\xi_p(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{mn} \cdot F_s^{[n]}(\pi(p + 2(2s)^n m)) \cdot \exp(i(p + m \cdot 2(2s)^n)x).$$

Пусть n является четным. Рассмотрим такие функции:

$$\begin{aligned} \nu_p(x) &= \frac{1}{2}(\xi_p(x) + \xi_{2(2s)^n-p}(x)) && \text{при } p = 1, \dots, (2s)^n, \\ \nu_p(x) &= \frac{1}{2i}(\xi_{p-(2s)^n}(x) - \xi_{3 \cdot (2s)^n-p}(x)) && \text{при } p = (2s)^n + 1, \dots, 2(2s)^n - 1, \\ \nu_{2(2s)^n}(x) &= \xi_{2(2s)^n}(x). \end{aligned}$$

Так как

$$F_s^{[n]}((m+1) \cdot 2(2s)^n \cdot \pi) = \begin{cases} 1, & m = -1, \\ 0, & m \neq -1, \end{cases}$$

то $\nu_{2(2s)^n}(x) = 1$.

Далее,

$$\xi_{2(2s)^n-p}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_s^{[n]}(-(p - 2(2s)^n(m+1))\pi) \cdot e^{-i(p+m \cdot 2(2s)^n)x},$$

из чего, обозначив $l = -(m+1)$ и воспользовавшись четностью функции $F_s^{[n]}(t)$, получаем равенство

$$\xi_{2(2s)^n-p}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_s^{[n]}((p + 2(2s)^n)\pi) \cdot e^{-i(p+l \cdot 2(2s)^n)x}.$$

Следовательно,

$$\nu_p(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_s^{[n]}((p + 2(2s)^n \cdot m)\pi) \cdot \cos((p + 2(2s)^n \cdot m)x)$$

для любого $p = 1, \dots, (2s)^n$.

Аналогично,

$$\nu_p(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_s^{[n]}((p + (2m - 1) \cdot (2s)^n)\pi) \cdot \sin((p + (2m - 1) \cdot (2s)^n)\pi)$$

при $p = (2s)^n + 1, \dots, 2(2s)^n - 1$.

Введем в рассмотрение функции $\{v_p(x)\}_{p=0}^{(2s)^n}$ и $\{w_p(x)\}_{p=1}^{(2s)^n-1}$, которые определим следующим образом: $v_0(x) = \nu_{2(2s)^n}(x)$, для любого $p = 1, \dots, (2s)^n - 1$ положим

$$v_p(x) = \frac{\nu_p(x)}{F_s^{[n]}(\pi p)} \quad \text{и} \quad w_p(x) = \frac{\nu_{p+(2s)^n}(x)}{F_s^{[n]}(\pi p)},$$

$$v_{(2s)^n}(x) = \frac{\nu_{(2s)^n}(x)}{2 \cdot F_s^{[n]}((2s)^n \pi)}.$$

После проведения преобразований можно записать, что

$$v_0(x) = 1,$$

$$v_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_s^{[n]}((p + 2(2s)^n \cdot m)\pi)}{F_s^{[n]}(\pi p)} \cdot \cos((p + 2(2s)^n \cdot m)x) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_s^{[n]}((2(2s)^n(m+1) - p)\pi)}{F_s^{[n]}(\pi p)} \cdot \cos((2(2s)^n(m+1) - p)x),$$

$$w_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_s^{[n]}((p + 2(2s)^n \cdot m)\pi)}{F_s^{[n]}(\pi p)} \cdot \sin((p + 2(2s)^n \cdot m)x) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_s^{[n]}((2(2s)^n(m+1) - p)\pi)}{F_s^{[n]}(\pi p)} \cdot \sin((2(2s)^n(m+1) - p)x)$$

для $p = 1, \dots, (2s)^n - 1$,

$$v_{(2s)^n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_s^{[n]}(((2s)^n + m \cdot 2(2s)^n)\pi)}{F_s^{[n]}((2s)^n \pi)} \cdot \cos(((2s)^n + m \cdot 2(2s)^n)x).$$

Аналогичным образом можно построить ортогональный базис для случая, когда n является нечетным.

6. Аппроксимационные свойства пространств $\widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}$.

ТЕОРЕМА 7. Для любого r существуют числа $C \geq 0$ и $n(r)$ такие, что

$$E_{L_2}(\widetilde{W}_2^r, \widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}) \leq d_{2(2s)^n}(\widetilde{W}_2^r, L_2) \cdot \sqrt{1 + C \cdot 2^{-n}}$$

для любого $n \geq n(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем проверку справедливости утверждения теоремы для случая, когда n является четным. Для случая нечетного n рассуждения будут аналогичными.

Далее мы будем считать, что $\|f\| = \|f\|_{L_2[-\pi, \pi]}$ и $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$. Кроме того, для краткости обозначим $N = 2(2s)^n$.

Чтобы установить справедливость утверждения теоремы, достаточно проверить выполнение неравенства

$$\inf_{\varphi \in \widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}} \|f - \varphi\| \leq d_N(\widetilde{W}_2^r, L_2) \cdot \sqrt{1 + C \cdot 2^{-n}} \quad (6.1)$$

для любой функции $f \in \widetilde{W}_2^r$ такой, что $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ и $\|f^{(r)}\| = 1$. Для всякой удовлетворяющей этим ограничениям функции $f(x)$ справедливо представление

$$f(x) = \sum_{k=1}^{(2s)^n} (c_k \cdot f_k(x) + d_k \cdot g_k(x)),$$

где

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{k+jN} \cos((k+jN)x) + a_{(j+1)N-k} \cos(((j+1)N-k)x)),$$

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (b_{k+jN} \sin((k+jN)x) - b_{(j+1)N-k} \sin(((j+1)N-k)x))$$

при $k = 1, \dots, (2s)^n - 1$;

$$f_{(2s)^n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{(2s)^n+jN} \cos(((2s)^n+jN)x),$$

$$g_{(2s)^n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{(2s)^n+jN} \sin(((2s)^n+jN)x),$$

причем $\|f_k^{(r)}\| = \|g_k^{(r)}\| = 1$ и $\sum_{k=1}^{(2s)^n} (c_k^2 + d_k^2) = 1$.

Пусть

$$\alpha_k = \left\| f_k - \frac{(f_k, v_k)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k \right\|, \quad \beta_k = \left\| g_k - \frac{(g_k, w_k)}{(w_k, w_k)} \cdot w_k \right\| \quad \text{для } k = 1, \dots, (2s)^n - 1,$$

$\alpha_{(2s)^n} = \|f_{(2s)^n}\|$ и $\beta_{(2s)^n} = \|g_{(2s)^n}\|$, где функции $v_k(x)$ и $w_k(x)$ были построены в предыдущем пункте.

Отметим, что для любых k и l имеет место равенство

$$(f_k, g_l) = (f_k, w_l) = (g_k, v_l) = (v_k, w_k) = 0.$$

Кроме того, при $n \neq l$ справедливо

$$(f_k, v_l) = (g_k, w_l) = (f_k, f_l) = (g_k, g_l) = (v_k, v_l) = (w_k, w_l) = 0.$$

Следовательно,

$$\inf_{\varphi \in \widetilde{\text{MUP}}_s^{[n]}} \|f - \varphi\| \leq \max_{k=1, \dots, (2s)^n} \{\alpha_k, \beta_k\}.$$

Значит, чтобы доказать (6.1), достаточно оценить величины $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^{(2s)^n}$.

Пусть $k = 1, \dots, (2s)^n - 1$. Оценим сверху величину α_k . Для этого представим функции f_k и g_k следующим образом:

$$f_k = l(x) + h(x) \quad \text{и} \quad v_k(x) = \delta(x) + \varepsilon(x),$$

где

$$\begin{aligned} l(x) &= a_k \cdot \cos(kx) + a_{N-k} \cdot \cos((N-k)x), \\ \delta(x) &= \cos(kx) + \frac{F_s^{[n]}((N-k)\pi)}{F_s^{[n]}(k\pi)} \cdot \cos((N-k)x). \end{aligned}$$

Функции $l(x)$ и $\delta(x)$ ортогональны функциям $h(x)$ и $\varepsilon(x)$. Поэтому

$$(l, h) = (l, \varepsilon) = (\delta, h) = (\delta, \varepsilon) = 0. \quad (6.2)$$

Из этого следует, что $(l + h, \varepsilon + \delta) = (l, \delta) + (l, \varepsilon) + (h, \delta) + (h, \varepsilon) = (l, \delta) + (h, \varepsilon)$. Значит,

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 &= \left\| f_k - \frac{(f_k, v_k)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k \right\|^2 = \left\| l + h - \frac{(l + h, \delta + \varepsilon)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k \right\|^2 \\ &= \left\| l - \frac{(l, \delta)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k \right\|^2 + \left\| h - \frac{(h, \varepsilon)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k \right\|^2 \\ &\quad + 2 \cdot \left(l - \frac{(l, \delta)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k, h - \frac{(h, \varepsilon)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k \right) = A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\| l - \frac{(l, \delta)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k \right\|^2 \\ &= \left\| l - \frac{(l, \delta)}{(v_k, v_k)} \cdot \delta \right\|^2 + \left(\frac{(l, \delta)}{(v_k, v_k)} \right)^2 \cdot \|\varepsilon\|^2 - 2 \cdot \left(l - \frac{(l, \delta)}{(v_k, v_k)} \cdot \delta, \varepsilon \right), \end{aligned}$$

откуда с учетом (6.2) следует

$$A_1 = \left\| l - \frac{(l, \delta)}{(v_k, v_k)} \cdot \delta \right\|^2 + \left(\frac{(l, \delta)}{(v_k, v_k)} \right)^2 \cdot \|\varepsilon\|^2 = A_{11} + A_{12}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left\| l - \frac{(l, \delta)}{(v_k, v_k)} \cdot \delta \right\|^2 = \left\| l - (l, \delta) \cdot \left(\frac{1}{(\delta, \delta)} + \left(\frac{1}{(v_k, v_k)} - \frac{1}{(\delta, \delta)} \right) \right) \cdot \delta \right\|^2 \\ &= (l, \delta)^2 \cdot \left(\frac{1}{(v_k, v_k)} - \frac{1}{(\delta, \delta)} \right)^2 \cdot \|\delta\|^2 \\ &\quad - 2 \cdot \left(l - \frac{(l, \delta)}{(\delta, \delta)} \cdot \delta; (l, \delta) \cdot \left(\frac{1}{(v_k, v_k)} - \frac{1}{(\delta, \delta)} \right) \cdot \delta \right) + \left\| l - \frac{(l, \delta)}{(\delta, \delta)} \cdot \delta \right\|^2 \\ &= \left\| l - \frac{(l, \delta)}{(\delta, \delta)} \cdot \delta \right\|^2 + (l, \delta)^2 \cdot \left(\frac{1}{(v_k, v_k)} - \frac{1}{(\delta, \delta)} \right)^2 \cdot \|\delta\|^2 \\ &= B_1 + B_2. \end{aligned}$$

Итак, нужно оценить величины B_1 , B_2 , A_{12} , A_2 , A_3 .

Обозначим $\|l^{(r)}\|^2$ через γ . Тогда $\|h^{(r)}\|^2 = 1 - \gamma$.

Дальнейшее доказательство разделим на несколько частей.

1. Докажем сначала, что

$$B_1 \leq \gamma \cdot (2s)^{-2nr} \cdot (1 - C(n) \cdot (2s)^{-n} + o((2s)^{-2n})),$$

где $C(n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $F_1 = F_s^{[n]}(k\pi)$ и $F_2 = F_s^{[n]}((N-k)\pi)$. Используя эти обозначения, получаем

$$(\delta, \delta) = \pi \cdot \left(1 + \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2\right) \quad \text{и} \quad (l, \delta) = \pi \cdot \left(a_k + a_{N-k} \cdot \frac{F_2}{F_1}\right).$$

Тогда

$$\frac{(l, \delta)}{(\delta, \delta)} = \frac{a_k + (F_2/F_1) \cdot a_{N-k}}{1 + (F_2/F_1)^2}$$

и

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(l(x) - \frac{(l, \delta)}{(\delta, \delta)} \cdot \delta(x) \right)^2 dx \\ &= \pi \cdot \left(\frac{a_k \cdot (F_2/F_1)^2 - a_{N-k} \cdot F_2/F_1}{1 + (F_2/F_1)^2} \right)^2 + \pi \left(\frac{a_{N-k} - a_k \cdot F_2/F_1}{1 + (F_2/F_1)^2} \right)^2 \\ &= \frac{\pi \cdot (a_k \cdot F_2 - a_{N-k} \cdot F_1)^2}{F_1^2 + F_2^2}. \end{aligned}$$

Чтобы оценить B_1 , найдем $\max B_1$ при условии $\|l^{(r)}\|^2 = \gamma$.

Поскольку $\|l^{(r)}\|^2 = \pi \cdot (a_k^2 \cdot k^{2r} + a_{N-k}^2 \cdot (N-k)^{2r}) = \gamma$, то нужно решить задачу

$$\begin{cases} (a_k \cdot F_2 - a_{N-k} \cdot F_1)^2 \rightarrow \max, \\ a_k^2 \cdot k^{2r} + a_{N-k}^2 \cdot (N-k)^{2r} = \gamma. \end{cases}$$

Решив эту задачу, мы получаем

$$\max_{\|l^{(r)}\|^2 = \gamma} B_1 = \frac{\gamma \cdot ((N-k)^{2r} \cdot F_2^2 + k^{2r} \cdot F_1^2)}{(F_1^2 + F_2^2) \cdot k^{2r} \cdot (N-k)^{2r}}.$$

Следовательно,

$$B_1 \leq \gamma \cdot k^{-2r} \cdot (N-k)^{-2r} \cdot \frac{k^{2r} + (N-k)^{2r} \cdot (F_2/F_1)^2}{1 + (F_2/F_1)^2}. \quad (6.3)$$

Из определения функций $F_s(t)$ и $F_s^{[n]}(t)$ следует, что

$$F_s^{[n]}(t) = \left(\frac{\sin(t/N)}{(t/N)} \right)^{n+1} \cdot \frac{\sin(t/N)}{s \cdot \sin(t/(sN))} \cdot F_s \left(\frac{t}{(2s)^{n+1}} \right). \quad (6.4)$$

Значит,

$$\begin{aligned} F_1 &= F_s^{[n]}(k\pi) = \left(\frac{\sin(k\pi/N)}{k\pi/N} \right)^{n+1} \cdot \frac{\sin(k\pi/N)}{s \cdot \sin(k\pi/(sN))} \cdot F_s \left(\frac{k\pi}{sN} \right), \\ F_2 &= F_s^{[n]}((N-k)\pi) \\ &= \left(\frac{\sin((1-k \cdot N^{-1})\pi)}{(1-k/N)\pi} \right)^{n+1} \cdot \frac{\sin(\pi - k\pi/N)}{s \cdot \sin((1-k/N)\pi/s)} \cdot F_s \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) \frac{\pi}{s} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 = \left(\frac{kN^{-1}}{1 - kN^{-1}}\right)^{2(n+1)} \cdot \left(\frac{\sin(k\pi/(sN))}{\sin((1 - k/N)\pi/s)}\right)^2 \cdot \left(\frac{F_s((1 - k/N)\pi/s)}{F_s(k\pi/(sN))}\right)^2.$$

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(x)$, которую на отрезке $[0, 1/2]$ определим формулой

$$\varphi(x) = \frac{\sin(x \cdot \pi/s)}{\sin((1 - x)\pi/s)} \cdot \frac{F_s((1 - x)\pi/s)}{F_s(x \cdot \pi/s)}.$$

Тогда из (6.3) получаем

$$\begin{aligned} B_1 &\leq \gamma \cdot k^{-2r} \cdot (N - k)^{-2r} \cdot \frac{k^{2r} + (N - k)^{2r} \cdot (k^{2n+1}/(N - k)^{2(n+1)}) \cdot \varphi^2(k/N)}{1 + (k^{2(n+1)}/(N - k)^{2(n+1)}) \cdot \varphi^2(k/N)} \\ &= \gamma \cdot N^{-2r} \cdot \frac{(1 - k/N)^{2n+2-2r} + (k/N)^{2n+2-2r} \cdot \varphi^2(k/N)}{(1 - k/N)^{2n+2} + (k/N)^{2n+2} \cdot \varphi^2(k/N)}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\psi(x) = \frac{(1 - x)^{2(n+1-r)} + x^{2(n+1-r)} \cdot \varphi^2(x)}{(1 - x)^{2(n+1)} + x^{2(n+1)} \cdot \varphi^2(x)}.$$

Используя это обозначение, получаем

$$B_1 \leq \gamma \cdot N^{-2r} \cdot \psi\left(\frac{k}{N}\right). \quad (6.5)$$

Докажем, что $\psi'(x) > 0$ при $x \in [0, 1/2]$. Действительно, дифференцируя, получаем

$$\psi'(x) = \frac{\xi(x)}{((1 - x)^{2(n+1)} + x^{2(n+1)} \cdot \varphi^2(x))^2},$$

где

$$\begin{aligned} \xi(x) &= 2 \cdot \varphi^2(x) \cdot (x \cdot (1 - x))^{2n+1-2r} \cdot ((1 - x)^{1+2r} - x^{1+2r}) \cdot (n + 1 + r) \\ &\quad + (1 - x)^{2r-1} - x^{2r-1}) \cdot (n + 1) \cdot x \cdot (1 - x) \\ &\quad + 2 \cdot \varphi'(x) \cdot \varphi(x)(1 - x)^{2(n+1-r)} \cdot x^{2(n+1-r)} \cdot ((1 - x)^{2r} - x^{2r}) \\ &\quad + 2 \cdot r \cdot ((1 - x)^{4n+3-2r} - \varphi^4(x) \cdot x^{4n+3-2r}). \end{aligned}$$

На отрезке $[0, 1/2]$ функции $\sin(x \cdot \pi/s)/\sin((1 - x) \cdot \pi/s)$ и $F_s((1 - x)\pi/s)$ возрастают, а функция $F_s(x\pi/s)$ убывает. Значит, $\varphi(x)$ возрастает на $[0, 1/2]$, причем на данном промежутке $\varphi(x) \geq 0$ и $\varphi(1/2) = 1$. Из этого получаем $\xi(x) > 0$ на $[0, 1/2]$. Следовательно, $\psi'(x) > 0$ для $x \in [0, 1/2]$.

Таким образом, $\psi(x)$ возрастает на $[0, 1/2]$, а так как $k = 1, \dots, (2s)^n - 1$, то выполняется неравенство $k/N \leq 1/2 - 1/N$, откуда следует оценка

$$\psi\left(\frac{k}{N}\right) \leq \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right). \quad (6.6)$$

По определению

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) &= 2^{2r} \cdot \left(1 + (C_{2(n+1-r)}^2 - C_{2(n+1)}^2) \cdot \left(\frac{2}{N}\right)^2 + \bar{o}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^2\right)\right) \\ &\quad - \frac{2r \cdot \frac{1 - \varphi^2(1/2 - 1/N)}{1 + \varphi^2(1/2 - 1/N)} \cdot \frac{2}{N}}{(1 + 2/N)^{2(n+1)} + (1 - 2/N)^{2(n+1)} \cdot \varphi^2(1/2 - 1/N)}. \end{aligned}$$

Так как $1 - \varphi^2(1/2 - 1/N) \geq 0$, то из (6.5) и (6.6) получаем

$$B_1 \leq \gamma \cdot N^{-2r} \cdot 2^{2r} \cdot \left(1 + (C_{2(n+1-r)}^2 - C_{2(n+1)}^2) \cdot \left(\frac{2}{N} \right)^2 + \bar{o} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^2 \right) \right),$$

из чего и следует справедливость требуемой оценки.

2. Докажем, что

$$B_2 \leq C_1 \cdot \gamma \cdot (2s)^{-2nr} \cdot 4^{-2n}.$$

Так как $(v_k, v_k) = (\delta, \delta) + (\varepsilon, \varepsilon)$, то

$$B_2 = (l, \delta)^2 \cdot \left(\frac{1}{(v_k, v_k)} - \frac{1}{(\delta, \delta)} \right)^2 \cdot \|\delta\|^2 \leq \tilde{c} \cdot (l, \delta)^2 \cdot (\varepsilon, \varepsilon)^2. \quad (6.7)$$

Из определения функций $l(x)$ и $\delta(x)$ следует, что

$$(l, \delta) = \pi \cdot \left(a_k + a_{N-k} \cdot \frac{F_2}{F_1} \right), \quad \text{где} \quad F_1 = F_s^{[n]}(k\pi), \quad F_2 = F_s^{[n]}((N-k)\pi).$$

Используя соображения предыдущего пункта, получаем

$$\left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 = \left(\frac{k}{N-k} \right)^{2(n+1)} \cdot \varphi^2 \left(\frac{k}{N} \right) \leq \varphi^2 \left(\frac{1}{2} \right) \leq 1.$$

Так как $\gamma = \|l^{(r)}\|^2 = \pi \cdot (a_k^2 \cdot k^{2r} + a_{N-k}^2 \cdot (N-k)^{2r})$, то с применением последнего неравенства получаем

$$\left(a_k + a_{N-k} \cdot \frac{F_2}{F_1} \right)^2 \leq 2 \cdot \left(a_k^2 + a_{N-k}^2 \cdot \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 \right) \leq \frac{2}{\pi} \cdot \gamma \cdot k^{-2r}.$$

Значит, $(a_k + a_{N-k} \cdot F_2/F_1)^2 \leq \gamma k^{-2r} 2/\pi$, из чего следует

$$(l, \delta)^2 \leq \bar{c} \cdot \gamma \cdot k^{-2r}. \quad (6.8)$$

Оценим теперь $(\varepsilon, \varepsilon)$. По построению

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_s^{[n]}((k+m \cdot N)\pi)}{F_s^{[n]}(k \cdot \pi)} \cdot \cos((k+m \cdot N)x) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_s^{[n]}(((m+1)N-k)\pi)}{F_s^{[n]}(k \cdot \pi)} \cos(((m+1)N-k)x). \end{aligned}$$

Найдем оценки коэффициентов

$$\frac{F_s^{[n]}((k+m \cdot N)\pi)}{F_s^{[n]}(k \cdot \pi)} \quad \text{и} \quad \frac{F_s^{[n]}(((m+1)N-k)\pi)}{F_s^{[n]}(k \cdot \pi)}.$$

Согласно (6.4) имеет место

$$\begin{aligned} F_s^{[n]}(k\pi) &= \left(\frac{\sin(k\pi/N)}{k\pi/N} \right)^{n+1} \cdot \frac{\sin(k\pi/N)}{s \cdot \sin(k\pi/sN)} \cdot F_s \left(\frac{k\pi}{sN} \right), \\ F_s^{[n]}((k+mN)\pi) &= \left(\frac{\sin((k+mN)\pi/N)}{(k+mN)\pi/N} \right)^{n+1} \cdot \frac{\sin((k+mN)\pi/N)}{s \cdot \sin((k+mN)\pi/(sN))} \\ &\quad \times F_s \left(\frac{k+mN}{sN} \pi \right). \end{aligned}$$

Из этого следует неравенство

$$\left(\frac{F_s^{[n]}((k+mN)\pi)}{F_s^{[n]}(k\pi)} \right)^2 \leq \left(\frac{k}{k+mN} \right)^{2(n+1)} \cdot \left(\frac{\sin(k\pi/(sN))}{\sin((k+mN)\pi/(sN))} \right)^2 \times \left(\frac{F_s((k+mN)\pi/(sN))}{F_s(k\pi/(sN))} \right)^2.$$

Функция $F_s(t)$ убывает на отрезке $[0, \pi/(2s)]$. Значит, при $k = 1, \dots, (2s)^n - 1$ справедливо неравенство $F_s(k\pi/(sN)) \geq 1/m > 0$. Так как $|F_s(t)| \leq 1$ для любого $t \in \mathbb{R}$, то

$$\left(\frac{F_s((k+mN)\pi/(sN))}{F_s(k\pi/(sN))} \right)^2 \leq M_0$$

для любого $k = 1, \dots, (2s)^n - 1$ и любого $m = 0, 1, 2, \dots$. Значит,

$$\left(\frac{F_s^{[n]}((k+mN)\pi)}{F_s^{[n]}(k\pi)} \right)^2 \leq M_1 \cdot \left(\frac{k}{k+mN} \right)^{2(n+1)}.$$

Аналогично,

$$\left(\frac{F_s^{[n]}(((m+1)N-k)\pi)}{F_s^{[n]}(k\pi)} \right)^2 \leq M_2 \cdot \left(\frac{k}{(m+1)N-k} \right)^{2(n+1)}.$$

Следовательно,

$$(\varepsilon, \varepsilon)^2 \leq M_3 \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{k}{k+mN} \right)^{2(n+1)} + \left(\frac{k}{(m+1)N-k} \right)^{2(n+1)} \right) \right)^2,$$

что вместе с (6.7) и (6.8) влечет за собой неравенство

$$B_2 \leq M_4 \cdot \gamma \cdot k^{-2r} \cdot \left(\frac{k}{N} \right)^{4(n+1)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{m+k/N} \right)^{2(n+1)} + \left(\frac{1}{m+1-k/N} \right)^{2(n+1)} \right) \right)^2.$$

Учитывая $1 \leq k \leq (2s)^n - 1$, получаем

$$B_2 \leq C_1 \cdot \gamma \cdot (2s)^{-2nr} \cdot 4^{-2n}.$$

Применяя аналогичные рассуждения, можно доказать справедливость оценки

$$A_{12} \leq C_2 \cdot \gamma \cdot (2s)^{-2nr} \cdot 4^{-n}.$$

3. Покажем, что

$$A_2 \leq (1 - \gamma) \cdot (2s)^{-2nr} \cdot 2^{-2r}.$$

Для этого проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} A_2 &= \left\| h - \frac{(h, \varepsilon)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k \right\|^2 = \|h\|^2 + \left(\frac{(h, \varepsilon)}{(v_k, v_k)} \right)^2 \cdot \|v_k\|^2 - 2 \cdot \frac{(h, \varepsilon)}{(v_k, v_k)} \cdot (h, v_k) \\ &= \|h\|^2 + \frac{(h, \varepsilon)^2}{(v_k, v_k)} - 2 \cdot \frac{(h, \varepsilon)}{(v_k, v_k)} \cdot (h, \delta + \varepsilon) = \|h\|^2 - \frac{(h, \varepsilon)^2}{(v_k, v_k)} \leq \|h\|^2. \end{aligned}$$

Из этого и равенства $\|h^{(r)}\|^2 = 1 - \gamma$ получаем

$$A_2 \leq \|h\|^2 \leq (1 - \gamma) \cdot \frac{1}{N^{2r} \cdot (1 + k/N)^{2r}} \leq (1 - \gamma) \cdot (2s)^{-2nr} \cdot 2^{-2r}.$$

4. Установим, что

$$|A_3| \leq C_3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot (1 - \gamma)} \cdot (2s)^{-2nr} \cdot \frac{1}{2^{r+n+1}}.$$

Для этого воспользуемся ортогональностью $l(x)$, $\delta(x)$ функциям $h(x)$, $\varepsilon(x)$. Получаем

$$A_3 = 2 \cdot \left(l - \frac{(l, \delta)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k; h - \frac{(h, \varepsilon)}{(v_k, v_k)} \cdot v_k \right) = -2 \cdot \frac{(l, \delta) \cdot (h, \varepsilon)}{(v_k, v_k)}.$$

Значит, справедлива оценка $|A_3| \leq m_0 \cdot |(l, \delta) \cdot (h, \varepsilon)|$.

Выше нами было установлено, что $|(l, \delta)| \leq \pi \cdot \sqrt{\gamma} \cdot k^{-r}$, $\|h\| \leq \sqrt{1 - \gamma} \cdot (k + N)^{-r}$ и

$$\|\varepsilon\|^2 \leq m_1 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{k}{k + mN} \right)^{2(n+1)} + \left(\frac{k}{(m+1)N - k} \right)^{2(n+1)} \right) \leq m_2 \cdot \left(\frac{k}{N} \right)^{2(n+1)}.$$

Следовательно,

$$|A_3| \leq C_3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot (1 - \gamma)} \cdot k^{-r} \cdot \left(\frac{k}{N} \right)^{n+1} \cdot \frac{1}{(k + N)^r}.$$

Так как $1 \leq k \leq (2s)^n - 1$, то

$$|A_3| \leq C_3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot (1 - \gamma)} \cdot (2s)^{-2nr} \cdot \frac{1}{2^{r+n+1}}.$$

Используя полученные оценки величин B_1 , B_2 , A_{12} , A_2 и A_3 , получаем неравенство

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 &\leq \gamma \cdot (2s)^{-2nr} \cdot (1 - C(n) \cdot (2s)^{-n} + o((2s)^{-2n})) + C_1 \cdot \gamma \cdot (2s)^{-2nr} \cdot 4^{-2n} \\ &\quad + C_2 \cdot \gamma \cdot (2s)^{-2nr} \cdot 4^{-n} + (1 - \gamma) \cdot (2s)^{-2nr} \cdot 2^{-2r} + C_3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot (1 - \gamma)} \cdot \frac{(2s)^{-2nr}}{2^{r+n+1}}. \end{aligned}$$

Значит, при $n \geq n_1(r)$ справедлива оценка

$$\alpha_k^2 \leq (2s)^{-2nr} \cdot \left(1 + \frac{C_4}{2^n} \right).$$

Аналогично,

$$\beta_k^2 \leq (2s)^{-2nr} \cdot \left(1 + \frac{C_5}{2^n} \right), \quad n \geq n_2(r).$$

Так как $\|f_{(2s)^n}^{(r)}\|^2 = \|g_{(2s)^n}^{(r)}\|^2 = 1$, то

$$\alpha_{(2s)^2}^2 \leq (2s)^{-2nr}, \quad \beta_{(2s)^2}^2 \leq (2s)^{-2nr}.$$

Итак, при $n \geq n(r)$ выполняется неравенство

$$\max_k \{\alpha_k, \beta_k\} \leq (2s)^{-nr} \cdot \sqrt{1 + \frac{C}{2^n}}.$$

Согласно [4], имеет место $d_{2(2s)^n}(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi, \pi]) = (2s)^{-nr}$. Следовательно, неравенство (6.1) доказано.

Теорема доказана.

Из теоремы 7 следует справедливость утверждения теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Рвачев, “О приближении с помощью функции $\text{up}(x)$ ”, *ДАН СССР*, **233**:2 (1977), 295–296.
- [2] В. Л. Рвачев, В. А. Рвачев, *Неклассические методы теории приближений в краевых задачах*, Наукова думка, К., 1979.
- [3] В. А. Рвачев, “Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения”, *УМН*, **45**:1 (271) (1990), 77–103.
- [4] A. Kolmogoroff, “Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse”, *Ann. of Math.* (2), **37**:1 (1936), 107–110.
- [5] В. А. Рвачев, “Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций”, *Матем. методы анализа динамических систем*, **6** (1982), 99–102.
- [6] В. А. Рвачев, Г. А. Старец, “Некоторые атомарные функции и их применение”, *ДАН УССР. Сер. А*, 1983, № 11, 22–24.
- [7] Г. А. Старец, “Сходимость обобщенных рядов Тейлора классов $H_p(m)$ ”, *Матем. методы анализа динамических систем*, **9** (1985), 37–39.
- [8] Г. А. Старец, *Один класс атомарных функций и его применение*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Харьковский гос. ун-т, Харьков, 1985.
- [9] Г. А. Старец, “Построение базисных функций для обобщенных рядов Тейлора”, *Матем. методы анализа динамических систем*, **8** (1984), 16–19.
- [10] В. А. Макаричев, “Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора для некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 56–75.
- [11] Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости*, Наука, М., 1964.

В. А. Макаричев

Национальный аэрокосмический университет

им. Н. Е. Жуковского “Харьковский авиационный институт”

E-mail: victor.makarichev@gmail.com

Поступило

18.11.2011

Исправленный вариант

07.05.2012