Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Арналь, А. Н. Паршин, О неприводимых представлениях дискретных групп Гейзенберга, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 323–330

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 08:16:27

О неприводимых представлениях дискретных групп Гейзенберга

С. А. Арналь, А. Н. Паршин

Мы доказываем, что неприводимые представления с конечным весом дискретных нильпотентных групп класса 2, в том числе дискретных групп Гейзенберга, являются мономиальными, и получаем их классификацию для группы $\text{Heis}(3, \mathbb{Z})$.

Библиография: 8 названий.

Пусть G – произвольная дискретная группа и $\text{Rep}(G)$ – множество всех представлений $\pi: G \rightarrow \text{End}(V_\pi)$ группы G . Будем обозначать V_π (или просто π) представление $(V, \pi) \in \text{Rep}(G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть H – подгруппа группы G и $\sigma \in \text{Rep}(H)$ – представление группы H . Определим *индуцированное представление* $\pi = \text{ind}_H^G(\sigma)$ как пространство функций $f: G \rightarrow V_\sigma$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $f(gh) = \sigma(h)f(g)$ для всех $h \in H$;
- 2) носитель $\text{Supp}(f)$ содержится в конечном числе левых классов смежности подгруппы H .

Действие группы G определяется левыми сдвигами: $\pi(g)(f)(g') = f(g^{-1}g')$, для любых $f \in \text{ind}_H^G(\sigma)$, $g' \in G$.

Это определение является частным случаем определения (компактно) индуцированного представления в теории p -адических групп (см., например, [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Представление π группы G *мономиально*, если существуют такие $H \subset G$ и $\chi: H \rightarrow \mathbb{C}^*$, что $\pi = \text{ind}_H^G(\chi)$.

Пусть $(V, \pi) = \text{ind}_H^G(\chi)$, $\chi: H \rightarrow \mathbb{C}^*$. Выберем в каждом классе смежности gH представитель $g_i \in gH$. Рассмотрим такие функции f_i на G , что

$$f_i(g) = \begin{cases} 0, & g \notin g_iH, \\ \chi(h), & g = g_ih, h \in H. \end{cases}$$

Их совокупность будет базисом в пространстве V_π . Рассмотрим действие на нем элементов группы. Пусть элемент g переводит класс смежности $g_i H$ в $gg_i H = g_j H$, т.е. $gg_i = g_j h_0$, $h_0 \in H$, и пусть $f_j(g_j) = 1$ – соответствующий вектор базиса. Тогда

$$\pi(g)f_i(g_j) = f_i(g^{-1}g_j) = f_i(g_i h_0^{-1}) = \chi(h_0)^{-1}.$$

Следовательно, $\pi(g)f_i = \chi(h_0)^{-1}f_j$, т.е. элементы $\pi(g)$ переставляют одномерные подпространства, порожденные базисными векторами. Отсюда следует, что в этом базисе $\pi(g)$ – мономимальные матрицы, и $\dim \text{ind}_H^G(\chi) = [G : H]$, так как каждому элементу базиса однозначно соответствует класс смежности из G/H и наоборот.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть G – группа, $\pi: G \rightarrow \text{End}(V_\pi)$ – ее представление. Подпространство $V(H, \chi)$ пространства V назовем *весовым подпространством с весом (H, χ)* , если

$$V(H, \chi) = \{v \in V \mid \pi(h)v = \chi(h)v \text{ для всех } h \in H\},$$

где $H \subset G$ – подгруппа G и $\chi: H \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Будем говорить, что представление группы G $\pi: G \rightarrow \text{End}(V_\pi)$ с *конечным весом*, если существуют такие подгруппа $H \subset G$ и ее характер $\chi: H \rightarrow \mathbb{C}^*$, что

- 1) $V(H, \chi) \neq (0)$,
- 2) $\dim_{\mathbb{C}} V(H, \chi) < \infty$.

ГИПОТЕЗА.¹ Пусть G – дискретная, конечно порожденная нильпотентная группа и $\pi: G \rightarrow \text{End}(V_\pi)$ – ее неприводимое счетномерное представление с конечным весом. Тогда π мономимально, т.е. существуют такие $H' \subset G$, $\chi': H' \rightarrow \mathbb{C}^*$, что $\pi = \text{ind}_{H'}^G(\chi')$. И обратно: все неприводимые счетномерные мономимальные представления группы G имеют конечный вес.

Для конечных групп справедливость этой гипотезы давно известна [3]. Также хорошо известен ее аналог для унитарных представлений нильпотентных групп Ли [4] и нильпотентных p -адических групп [5]. Вариант этой гипотезы для унитарных представлений в гильбертовом пространстве доказан Яном Брауном [6].

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – конечно порожденная нильпотентная группа, π – ее унитарное неприводимое представление; π имеет конечный вес тогда и только тогда, когда π мономимально.

Здесь индуцированное представление понимается, как обычно, в смысле теории унитарных представлений в гильбертовом пространстве [7].

Пусть теперь G – произвольная группа, $\pi: G \rightarrow \text{End}(V_\pi)$, $H \subset G$ – подгруппа, $\chi: H \rightarrow \mathbb{C}^*$. Тогда для всех $g \in G$ $\pi(g)$ действует как изоморфное отображение подпространств $\pi(g): V(H, \chi) \rightarrow V(H^g, \chi^g)$, где $H^g = gHg^{-1}$, $\chi^g: H^g \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\chi^g(ghg^{-1}) = \chi(h)$. В самом деле, возьмем произвольный вектор $v \in V(H, \chi)$. Тогда для всех $h \in H$

$$\pi(ghg^{-1})\pi(g)v = \pi(g)\pi(h)v = \chi(h)\pi(g)v = \chi^g(ghg^{-1})\pi(g)v.$$

Следовательно, если V – неприводимое представление и $V(H, \chi) \neq (0)$, то $V = \sum_{g \in G/H} \pi(g)V(H, \chi)$.

¹Эта гипотеза принадлежит второму автору (см. [2], где она была сформулирована в менее явной форме).

ЛЕММА 1. Пусть H – нормальный делитель группы G и $H(\chi) \supset H$ – подгруппа группы G , состоящая из всех $g \in G$, для которых $\chi^g = \chi$ на H . Тогда V разлагается в прямую сумму

$$V = \bigoplus_{g \in G/H(\chi)} \pi(g)V(H, \chi) = \bigoplus_{g \in G/H(\chi)} V(H, \chi^g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала покажем, что для всех $g \in G/H(\chi)$ выполнено $V(H, \chi) \cap V(H, \chi^g) = 0$. Пусть $v \in V(H, \chi) \cap \pi(g)V(H, \chi)$, $v \neq 0$. Тогда для всех $h \in H$ выполняется

$$\begin{cases} \pi(h)v = \chi(h)v, \\ \pi(h)v = \chi^g(h)v. \end{cases}$$

Следовательно, $\chi^g = \chi$ на H ; значит, $g \in H(\chi)$.

Далее нужно показать, что если $v_1 + \dots + v_m = 0$, где $v_i \in \pi(g_i)V(H, \chi)$, то либо все $\pi(g_i)V(H, \chi)$ совпадают с $\pi(g_m)V(H, \chi)$, либо все $v_i = 0$. Применим индукцию (для случая $m = 2$ нужное утверждение доказано выше). Пусть оно доказано для $m = k$.

Докажем его для $m = k + 1$. Пусть имеются такие $v_1 \neq 0, \dots, v_{k+1} \neq 0$, что

$$v_1 + \dots + v_k = v_{k+1}, \quad (1)$$

где $v_i \in V(H, \chi^{g_i})$.

Для произвольного $h \in H$ применим $\pi(h)$ и получим

$$\chi^{g_1}(h)v_1 + \dots + \chi^{g_k}(h)v_k = \chi^{g_{k+1}}(h)v_{k+1}.$$

Разделим это равенство на $\chi^{g_{k+1}}(h) \neq 0$ и вычтем из него (1):

$$\left(\frac{\chi^{g_1}(h)}{\chi^{g_{k+1}}(h)} - 1 \right) v_1 + \dots + \left(\frac{\chi^{g_k}(h)}{\chi^{g_{k+1}}(h)} - 1 \right) v_k = 0.$$

По предположению индукции все слагаемые в этой сумме нулевые, значит,

$$\chi^{g_1}(h) = \dots = \chi^{g_k}(h) = \chi^{g_{k+1}}(h) \quad \text{для любого } h \in H.$$

Следовательно, $g_i^{-1}g_{k+1} \in H(\chi)$, что влечет $\pi(g_i)V(H, \chi) = \pi(g_{k+1})V(H, \chi)$ для всех i .

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – дискретная нильпотентная группа, $V_\pi \in \text{Rep}(G)$ – ее неприводимое представление и существует такая пара (H, χ) , что H – нормальная подгруппа, $\chi: H \rightarrow \mathbb{C}^*$ – ее характер, и $V(H, \chi) \neq 0$. Тогда $V = \text{ind}_{H'}^G(W)$, где $W = V(H, \chi)$, $G \supset H' = H(\chi) = \{g \in G \mid \pi(g)W = W\}$. Если при этом $\dim V(H, \chi) < \infty$, то представление V мономимально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущей леммы следует, что $V = \text{ind}_{H'}^G(V(H, \chi))$. При этом $V(H, \chi)$ – неприводимое представление группы $H(\chi) \supset H$, иначе V_π было бы приводимым. Если $\dim V(H, \chi) < \infty$, то $V(H, \chi)$ мономимально как конечномерное неприводимое представление, т.е. $V(H, \chi) = \text{ind}_{H''}^{H'}(\chi'')$ (см. лемму 1 в [6]), а так как $V = \text{ind}_{H'}^G(V(H, \chi))$, то $V = \text{ind}_{H''}^G(\chi'')$.

Итак, мы показали, что представления с конечным весом (H, χ) при условии, что подгруппа H – нормальна, мономимальны. Рассмотрим теперь частные случаи – нильпотентные группы класса 1 и 2.

ЛЕММА 2 (аналог леммы Шура для счетномерного случая). Пусть G – счетная группа, $\pi: G \rightarrow \text{End}(V_\pi)$ – ее неприводимое представление. Тогда $\text{End}_G(V) = \mathbb{C} \cdot \text{Id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.² Возьмем вектор $v \in V$, $v \neq 0$. Тогда $\{\pi(g)v\}$ – счетное множество. Из неприводимости следует, что $\langle \pi(g)v \rangle = V$; следовательно, V счетномерно, а значит, и $\text{End}_G(V)$ счетномерно. Рассмотрим $f: V \rightarrow V$, $f \in \text{End}_G(V)$. Так как $\text{Ker } f$ и $\text{Im } f$ G -инвариантны, то они либо $= 0$, либо $= V$; следовательно, если $f \neq 0$, то f обратим и $\text{End}_G(V)$ является телом.

Далее, рассмотрим элементы $f - \lambda I$ с произвольным λ . Пусть $f \neq 0$; тогда существует обратный элемент $(f - \lambda I)^{-1}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ образуют несчетное множество. Значит, среди них найдется конечное число линейно зависимых $\sum_i c_i (f - \lambda_i I)^{-1} = 0$, и потому существует такой многочлен, что $p(f) = 0$, т.е. $\prod_i (f - \mu_i) = 0$. Так как в теле нет делителей нуля, то для некоторого i имеем $f = \mu_i$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если группа G абелева, то для любого $g \in G$ $\pi(g) \in \text{End}_G(V)$, т.е. группа G действует на пространстве V характером.

Далее рассмотрим нильпотентные группы класса 2. Это означает, что центральный ряд имеет длину 2, т.е. $G \supset [G, G] \supset e$, где коммутант $[G, G]$ равняется центру группы G .

ТЕОРЕМА 3. Пусть V – неприводимое представление группы G с условием конечности веса, т.е. существует такая пара (H, χ) , что выполнено $V(H, \chi) \neq 0$ и $\dim V(H, \chi) < \infty$. Тогда V мономимально, т.е. $V = \text{ind}_{H''}^G(\chi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По следствию из предыдущей леммы центр C действует на пространстве V характером χ_C . Рассмотрим $H \cap C$: $\chi|_{(H \cap C)} = \chi_C|_{(H \cap C)}$; значит, можно продолжить характер χ до такого характера $\chi': H' \rightarrow \mathbb{C}^*$ подгруппы $H' = HC$, что $\chi'|_C = \chi_C$ и $\chi'|_H = \chi$.

2) Рассмотрим отображение $\varphi: G \rightarrow G/C$. Тогда $\varphi^{-1}(\varphi(H')) = H'$, и так как группа G/C абелева, для всех $g \in G$, $h \in H'$

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) = \varphi(h),$$

т.е. $\varphi(ghg^{-1}) \in \varphi(H')$. Следовательно, $ghg^{-1} \in H'$. Таким образом, H' – нормальная подгруппа в G .

3) Рассмотрим

$$V(H', \chi') = \{v \in V \mid \text{для всех } h' \in H' \pi(h')v = \chi'(h')v\},$$

$V(H', \chi') \subset V(H, \chi)$; но если $v \in V(H, \chi)$, то для всех $h \in H$, $c \in C$

$$\pi(hc)v = \chi(h)\chi_C(c)v = \chi'(hc)v,$$

т.е. $v \in V(H', \chi')$, а значит, $V(H', \chi') = V(H, \chi)$.

²Оно хорошо известно и дано здесь для полноты изложения. Сама лемма связывается с именами Жаке и/или Диксмье.

Применим теперь результат теоремы 2. Получим, что $V = \text{ind}_{H''}^G(V(H, \chi))$ для $H'' = \{g \in G \mid \pi(g)V(H', \chi') \subset V(H', \chi')\}$. Тем самым задача свелась к конечномерным представлениям и индукция по размерности представления дает требуемое (см. [6; лемма 1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть H, P, C – конечно порожденные абелевы группы и определена билинейная операция $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times P \rightarrow C$. Дискретной группой Гейзенберга называется множество $H \times P \times C$ с операцией

$$(n, p, c)(m, q, a) = (n + m, p + q, c + a + \langle n, q \rangle),$$

где $n, m \in H, p, q \in P, c, a \in C$.

Рассмотрим в качестве примера нильпотентной группы класса 2 дискретную группу Гейзенберга $G = \text{Heis}(3, \mathbb{Z})$, т.е. $H = P = C = \mathbb{Z}$, и $\langle n, p \rangle = np$. Тогда группу можно представить как группу матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & n & c \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $n \in H, p \in P, c \in C$.

Рассмотрим фактор по центру: $G/C = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ni (n, p)$. Пусть H – подгруппа в G/C . Возможны следующие варианты:

- 1) $H \cong \mathbb{Z}$ и $\exists H'$, что $H \oplus H' = G/C$,
- 2) $H \cong \mathbb{Z}$ и $H \subsetneq H_1 \cong \mathbb{Z}$,
- 3) $H \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, т.е. $H = k_1\mathbb{Z} \oplus k_2\mathbb{Z}$.

Далее мы можем ограничиться рассмотрением случаев (1) и (3), так как если $V_\pi = \text{ind}_H^G(W)$, где H – абелева подгруппа, содержащаяся в большей абелевой группе, то представление V будет приводимо.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $G = \text{Heis}(3, \mathbb{Z})$, V – неприводимое представление группы G , $V = \text{ind}_{H(V)}^G(\chi)$, где $\chi: H(V) \rightarrow \mathbb{C}^*$, а $\chi_C: C \rightarrow \mathbb{C}^*$ – ограничение характера χ на центр группы G . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) V конечномерно размерности N ,
- 2) $\chi_C = \lambda^g$, где λ – конечного порядка N в $\mathbb{C}^*$,
- 3) $[G : H(V)] = N < \infty$,
- 4) $H(V) \cong N\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = N \cdot HPC$, где $N = \text{ord } \chi_C$, т.е. подгруппа индукции $H(V)$ едина для всех представлений размерности N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Leftrightarrow$ (3) следует из того, что $\dim \text{ind}_H^G(\chi) = [G : H]$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Представим группу $G = \text{Heis}(3, \mathbb{Z})$ в виде $G = \langle x, y, z \rangle$, где

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $[x, y] = z$, $[x^m, y^n] = z^{mn}$. Поскольку представление $V = \text{ind}_{H(V)}^G(\chi)$ мономиально, для всех $g \in G$ $\pi(g)$ – мономиальная матрица. Так как $[G : H(V)] < \infty$,

существуют такие $m, n \in \mathbb{Z}$, что $\pi(x^m)$ и $\pi(y^n)$ диагональные матрицы. Но тогда $\pi(x^m y^n x^{-m} y^{-n}) = I$, что дает $\chi_C^{mn} = 1$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Изучим неприводимые представления с $\chi_C^N = 1$ и $\chi_C^n \neq 1$, $n < N$. Рассмотрим группу

$$G' = G/NC, \quad G' = \begin{pmatrix} I & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_N \\ 0 & I & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Центр C' группы G' равен $N\mathbb{Z} \oplus N\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_N$, т.е. имеется точная последовательность:

$$1 \rightarrow C' = N\mathbb{Z} \times N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_N \rightarrow G' \rightarrow G'/C' = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \rightarrow 1.$$

Существуют такие $V', \pi': G' \rightarrow \text{End}(V')$, что $\pi' = \pi|_{G'}$.

На самом деле, $V' = V$, так как $NC \subset \text{Ker } \pi$. Следовательно, существует $\chi_{C'}: C' \rightarrow \mathbb{C}^*$ такой, что $\pi'|_{C'} = \chi_{C'}$.

Представим G' в виде $G' = HPC'$, где

$$H = \begin{pmatrix} I & \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cong \mathbb{Z}, \quad P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cong \mathbb{Z},$$

$C' \cong N\mathbb{Z} \times N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_N$; PC' – абелев нормальный делитель, $G'/PC' = H/H \cap C' \cong \mathbb{Z}_N$, $PC'/C' \cong \mathbb{Z}_N$. Поскольку $[G': C'] < \infty$, G' можно представить в виде объединения $G' = \bigcup_{i \in I} g_i C'$, где I – конечное множество.

Возьмем произвольный вектор $v \in V$, $v \neq 0$. Тогда $V_0 = \langle \pi'(g_i)v \rangle$ – конечномерное инвариантное подпространство. Следовательно, $V = V_0$ в силу неприводимости и, таким образом, V – конечномерное пространство.

(4) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(1) $\Rightarrow$ (4). Рассмотрим действие порождающего элемента p подгруппы P . Пусть

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или просто $(0, 1, 0)$. Из предыдущего пункта следует, что $\pi(p)$ – оператор в конечномерном пространстве V ; следовательно, у него есть ненулевой собственный вектор $v \in V$ такой, что $\pi(p)v = \mu v$, $\mu \in \mathbb{C}^*$. Введем на P характер $\chi_0(p^n) = \mu^n$. Пусть $p_1 \in P \cap C'$, т.е. $p_1 = p^{aN}$. Применяя $\pi(p_1)$ к вектору v , находим, что $\chi_0 = \chi_{C'}$ на $P \cap C'$ и, следовательно, характер χ_C можно продолжить на PC' до характера $\chi: \chi|_P = \chi_0$, $\chi|_{C'} = \chi_{C'}$.

Рассмотрим в V весовое подпространство $V(PC', \chi)$. Оно непусто, так как содержит вектор v . Рассмотрим действие на нем $H/H \cap C'$. Пусть $g \in H/H \cap C'$, т.е. $g^N = 0$.

Как и выше, находим, что $\pi(g)v \in V(PC', \chi^g)$, т.е. $\pi(g): V(PC', \chi) \mapsto V(PC', \chi^g)$. Из неприводимости V получаем, что $V = \sum_{g \in G'/PC'} V(PC', \chi^g)$.

Рассмотрим подгруппу $M = \{g \in G' \mid \chi^g = \chi \text{ на } PC'\}$. Покажем, что $M = PC'$. Очевидно, что $PC' \subset M$. Пусть $g \in H$, т.е. $g = (n, 0, 0)$, $h = (0, p, c) \in PC'$. Тогда

$ghg^{-1} = (0, p, c + np)$. Отсюда, чтобы выполнялось $\chi(0, p, c + np) = \chi(0, p, c)$ для всех $p \in P$, $c \in C'$, необходимо и достаточно, чтобы $N \mid np$ для всех $p \in P$, т.е. $N \mid n$, т.е. $g \in H \cap C'$.

Из предыдущих рассуждений с учетом нормальности подгруппы PC' следует, что $V = \bigoplus_{g \in G'/PC'} V(PC', \chi^g)$ (см. лемму 1).

В итоге мы получили, что $V = \text{ind}_{PC'}^{G'}(\chi)$, и если $\varphi: G \rightarrow G'$, то имеем $V = \text{ind}_{\varphi^{-1}(PC')}^G(\chi(\varphi))$.

Так как $NH \subset C'$, то $\varphi^{-1}(PC') = NH \cdot P \cdot C$, т.е. $V = \text{ind}_{N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}^G(\chi(\varphi))$. Получаем, что любое неприводимое представление с центральным характером χ_C конечного порядка N индуцировано одномерным представлением стандартной подгруппы $NH \cdot P \cdot C \cong N\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

Пусть теперь $\mathcal{M}_G^{\text{inf}}$, $\mathcal{M}_G^{\text{fin}}$ – пространства параметров, соответственно, бесконечномерных и конечномерных неприводимых представлений конечного веса группы $G = \text{Heis}(3, \mathbb{Z})^3$. Окончательно получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Имеем*

$$\mathcal{M}_G^{\text{inf}} = \coprod_{\substack{P \subset G/C, P \cong \mathbb{Z} \\ P - \text{прямое слагаемое}}} (\mathcal{M}_{G,P}^{\text{hol}} \coprod \mathcal{M}_{G,P}^{\text{non-hol}}), \quad (2)$$

где $\mathcal{M}_{G,P}^{\text{hol}}$ является расслоением на эллиптические кривые над объединением двух проколотых дисков, а множество $\mathcal{M}_{G,P}^{\text{non-hol}}$ отвечает унитарным центральным характерам χ_C бесконечного порядка и не имеет структуры комплексного многообразия. Кроме того,

$$\mathcal{M}_G^{\text{fin}} = \coprod_{N, \mu \in \mu_N} (\mathbb{C}^* / \mu_N \times \mathbb{C}^* \mu_N), \quad (3)$$

где μ_N – группа корней N -й степени из единицы.

Многообразие $\mathcal{M}_{G,P}^{\text{hol}}$ описано в [2], [8]. То, что пространство $\mathcal{M}_G^{\text{inf}}$ является объединением многообразий $\mathcal{M}_{G,P}$, вытекает из теоремы 3 и приведенного выше анализа подгрупп в группе G/C . Из формул Макки [1] следует, что это объединение является дизъюнктым. Второе утверждение следует из теоремы 4 и классификации индуцированных представлений, данной в [2], [8].

Заметим, что представления из множества $\mathcal{M}_{G,P}^{\text{non-hol}}$, пополненные до представления в гильбертовом пространстве, входят в классификацию Брауна [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M.-F. Vignéras, *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , Progr. Math., **137**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.
- [2] A. N. Parshin, "Representations of higher adelic groups and arithmetic", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. 1. Plenary Lectures and Ceremonies* (Hyderabad, India, 19–27 August 2010), Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, 362–392.

³Имеются в виду параметры, однозначно определяющие классы эквивалентности представлений. В алгебраической геометрии такие пространства называются грубыми многообразиями модулей.

- [3] J.-P. Serre, *Représentations lineaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967; Ж.-П. Серр, *Линейные представления конечных групп*, Мир, М., 1970.
- [4] А. А. Кириллов, “Унитарные представления нильпотентных групп Ли”, *УМН*, **17**:4 (1962), 57–110.
- [5] G. van Dijk, “Smooth and admissible representations of p-adic unipotent groups”, *Compositio Math.*, **37**:1 (1978), 77–101.
- [6] I. D. Brown, “Representations of finitely generated nilpotent groups”, *Pacific J. Math.*, **45** (1973), 13–26.
- [7] G. W. Mackey, “On induced representations of groups”, *Amer. J. Math.*, **73**:3 (1951), 576–592.
- [8] А. Н. Паршин, “О голоморфных представлениях дискретных групп Гейзенберга”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:2 (2010), 92–96.

С. А. Арналь

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

06.12.2012

А. Н. Паршин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: parshin@mi.ras.ru