Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Иванов, Нульмерное счетно компактное пространство, уплотняющееся на связный бикомпакт, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 143–145

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm929>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:24:44

НУЛЬМЕРНОЕ СЧЕТНО КОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО, УПЛОТНЯЮЩЕЕСЯ НА СВЯЗНЫЙ БИКОМПАКТ

А. В. Иванов

Широкому обсуждению проблемы уплотнения счетно компактных пространств на бикомпакты посвящена работа А. В. Архангельского и В. В. Федорчука [1]. В ней, в частности, поставлен вопрос о существовании нульмерного счетно компактного пространства, которое уплотняется на связный бикомпакт (вопрос 5). В настоящей работе этот вопрос решен положительно, а именно, построен пример счетно компактного индуктивно нульмерного пространства X с первой аксиомой счетности, которое уплотняется на связный упорядоченный бикомпакт Z веса ω_1 .

Искомый бикомпакт Z мы получим как предел непрерывного вполне упорядоченного обратного спектра $S = \{X_\alpha, p_\beta^\alpha: \alpha, \beta < \omega_1\}$ длины ω_1 из метризуемых упорядоченных компактов с вполне замкнутыми соседними проекциями.

Пусть X_0 – отрезок $[0, 1]$ с обычной интервальной топологией и A_0 – счетное всюду плотное множество в X_0 . Для каждой точки $x \in A_0$ определим непрерывное отображение $h_x: [0, 1] \setminus \{x\} \rightarrow [0, 1]$ по формуле: $h_x(t) = 0$ при $t < x$, $h_x(t) = 1$ при $t > x$. Далее, положим $X_1 = B(X_0, Y_x, h_x: x \in A_0)$, где $B(\dots)$ – пространство Федорчука (см. [2]), а $Y_x = [0, 1]_x$ ($x \in A_0$) – экземпляр отрезка $[0, 1]$. В качестве отображения $p_1^0: X_1 \rightarrow X_0$ возьмем каноническую проекцию π пространства $B = X_1$ на X_0 . Известно, что отображение π вполне замкнуто (см. [2]). Отметим, что в силу выбора отображений h_x пространство X_1 является лексикографическим произведением $X_0 \otimes_I \{Y_x: x \in X_0\}$ (см. [2]) компакта X_0 на семейство упорядоченных компактов $\{Y_x: x \in X_0\}$, где $Y_x = \{\cdot\}$ при $x \notin A_0$. Таким образом, X является упорядоченным компактом, который, как легко видеть, связан.

Пространство X_1 имеет счетную базу, поскольку A_0 счетно. Множество

$$C_1 = (p_1^0)^{-1}A_0 = \bigcup_{x \in A_0} Y_x$$

всюду плотно в X_1 . Возьмем в C_1 счетное всюду плотное множество A_1 так, чтобы A_1 не содержало концевых точек каждого отрезка $[0, 1]_x = Y_x \subset C_1$, но обязательно содержало его середину. Заметим, что $p_0^1 A_1 = A_0$.

Пусть α – некоторый счетный ординал. Предположим, что для всех $\beta < \alpha$ уже построены пространства X_β , отображения $p_\gamma^\beta: X_\beta \rightarrow X_\gamma$, $\gamma < \beta < \alpha$, и счетные всюду плотные множества $A_\beta \subset X_\beta$ так, что выполняются следующие условия.

- 1 α) X_β – связные упорядоченные компакты, $\beta < \alpha$.
 2 α) Спектр $S_\alpha = \{X_\beta, p_\gamma^\beta: \beta, \gamma < \alpha\}$ непрерывен.
 3 α) Отображения вида $p_{\beta+1}^{\beta+1}$ являются каноническими вполне замкнутыми проекциями лексикографического произведения

$$X_{\beta+1} = X_\beta \bigotimes_l \{Y_x: x \in X_\beta\}$$

на компакт X_β , где $Y_x = [0, 1]_x$ при $x \in A_\beta$ и $Y_x = \{\cdot\}$ при $x \notin A_\beta$.

4 α) $p_\gamma^\beta(A_\beta) = A_\gamma$ ($\gamma < \beta < \alpha$).

- 5 α) Множество $A_{\beta+1}$ содержит середину каждого отрезка $(p_{\beta+1}^{\beta+1})^{-1}x = [0, 1]_x$ ($x \in A_\beta$) и не содержит его концевых точек ($\beta + 1 < \alpha$).

Для формулировки условия 6 α) введем следующее техническое понятие отмеченной точки. Пусть β – предельный ординал и $\beta < \alpha$. Точку $x_\beta \in X_\beta$ будем называть *отмеченной*, если для любого $\gamma < \beta$ $p_\gamma^\beta(x_\beta) \in A_\gamma$ существует $\delta < \beta$ такое, что для любого γ , удовлетворяющего неравенствам $\delta \leq \gamma < \beta$, точка $p_{\gamma+1}^\beta(x_\beta)$ является серединой отрезка

$$(p_\gamma^{\gamma+1})^{-1}(p_\gamma^\beta(x_\beta)) = [0, 1]_{p_\gamma^\beta(x_\beta)}.$$

Множество отмеченных точек X_β обозначим через P_β . Поскольку все множества A_γ , $\gamma < \beta$, счетны, P_β также счетно.

- 6 α) $P_\beta \subset A_\beta$ для любого предельного $\beta < \alpha$.

Если α – предельное число, положим $X_\alpha = \lim S_\alpha$, а проекции p_β^α определим как предельные проекции спектра S_α . В силу условий 1 α)–3 α) пространство X_α является связным метризуемым упорядоченным компактом (см. [2]).

Пусть P_α – множество отмеченных точек X_α . Покажем, что P_α всюду плотно в X_α . Пусть (x_α, y_α) – порядковый интервал в X_α ($x_\alpha < y_\alpha$). Существует $\beta < \alpha$ такое, что $p_\beta^\alpha(x_\alpha) \neq p_\beta^\alpha(y_\alpha)$, и тогда в интервале $(p_\beta^\alpha(x_\alpha), p_\beta^\alpha(y_\alpha))$ найдется точка $z_\beta \in A_\beta$. В силу определения отмеченной точки и выполнения условий 5 α), 6 α) в пространстве X_α найдется единственная отмеченная точка z_α , для которой $p_\beta^\alpha(z_\alpha) = z_\beta$ (эта точка z_α – нить спектра S_α – однозначно строится по рекурсии). Тогда $x_\alpha < z_\alpha < y_\alpha$.

Итак, P_α всюду плотно в X_α . Положим $A_\alpha = P_\alpha$. Очевидно, что условия 4 $\alpha+1$)–6 $\alpha+1$) при этом выполнены.

Пусть теперь $\alpha = \gamma + 1$. В этом случае построение пространства X_α , отображения p_γ^α и счетного всюду плотного множества $A_\alpha \subset X_\alpha$ проведем по схеме, использованной выше при построении X_1, p_0^1 и A_1 , с той лишь разницей, что вместо X_0 возьмем X_γ , а вместо A_0 – A_γ . Связность X_α вытекает из связности X_γ и монотонности p_γ^α . Проверка остальных условий 1 $\alpha+1$)–6 $\alpha+1$) тривиальна.

Продолжая рекурсивное построение, мы получим спектр

$$S = \{X_\alpha, p_\beta^\alpha: \alpha, \beta < \omega_1\},$$

удовлетворяющий условиям 1 ω_1)–6 ω_1). Его предел $\lim S$ является искомым связным упорядоченным бикompактом Z , имеющим вес ω_1 .

Обозначим через P множество отмеченных точек Z . (На $Z = X_{\omega_1}$ определены предельные проекции $p_\alpha = p_\alpha^{\omega_1}: Z \rightarrow X_\alpha$ спектра S , так что данное выше определение отмеченной точки фактически действует и в Z). Для любого $\alpha < \omega_1$ и любой точки $x_\alpha \in A_\alpha$ существует единственная точка $z \in P$, для которой $p_\alpha(z) = x_\alpha$ (как и выше, точка z однозначно строится по рекурсии). Следовательно, P всюду плотно в Z .

Положим

$$C = \bigcap_{\alpha < \omega_1} p_\alpha^{-1} A_\alpha.$$

Очевидно, что $C \supset P$; следовательно, C также всюду плотно в Z .

Для каждой точки $z \in Z \setminus C$ найдется такое α , что отображение $p_\alpha: Z \rightarrow X_\alpha$ взаимно однозначно в z . Следовательно, характер Z во всех точках $z \in Z \setminus C$ счетен.

Докажем теперь, что каждое счетное подмножество $K \subset Z$ имеет предельную точку в $Z \setminus C$. Фиксируем счетное $K \subset Z$ и такой индекс $\alpha < \omega_1$, что p_α взаимно однозначно отображает K на $K_\alpha = p_\alpha(K) \subset X_\alpha$. Пусть x_α – предельная точка K_α . Если $x_\alpha \notin A_\alpha$, то прообраз $p_\alpha^{-1}x_\alpha$ содержит единственную точку, которая и будет искомой предельной точкой K , лежащей в $Z \setminus C$. Если же $x_\alpha \in A_\alpha$, то хотя бы одна из конечных точек отрезка

$$[0, 1]_{x_\alpha} = (p_\alpha^{\alpha+1})^{-1}x_\alpha$$

является предельной для $K_{\alpha+1} = p_{\alpha+1}(K)$. Обозначим эту точку через $x_{\alpha+1}$. В силу условия 5_{ω_1}) $x_{\alpha+1} \notin A_{\alpha+1}$. Следовательно, $p_{\alpha+1}^{-1}x_{\alpha+1}$ является искомой предельной точкой K .

Усилим теперь топологию Z путем объявления всех точек множества C изолированными точками. В итоге получим искомое пространство X , которое уплотняется на Z .

Действительно, пространство X счетно компактно, поскольку любое счетное подмножество $K \subset Z$ имеет предельную точку в $Z \setminus C$. X индуктивно нульмерно, так как C всюду плотно в упорядоченном бикомпакте Z . Наконец, X удовлетворяет первой аксиоме счетности, поскольку во всех точках $z \in Z \setminus C$ характер Z счетен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построенный выше бикомпакт Z является F -бикомпактом в терминологии [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский А. В., Федорчук В. В. // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 4. С. 871–880.
2. Одинцов А. А. Введение в теорию континуумов. М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. Иванов А. В. // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 4. С. 606–611.