Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ветохин, О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 347–356

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:39:14

О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем

А. Н. Ветохин

В статье изучается характер зависимости от параметра топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра, с точки зрения бэровской классификации функций.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm9292

1. Постановка задачи. Напомним определение топологической энтропии динамической системы [1; с. 120]. Пусть (X, d) – компактное метрическое пространство и $f: X \rightarrow X$ – непрерывное отображение. На X определим систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $B_f(x, \varepsilon, n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x, y) < \varepsilon\}$. Множество $E \subset X$ называется (f, ε, n) -покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n).$$

Пусть $S_d(f, \varepsilon, n)$ обозначает минимальное количество элементов (f, ε, n) -покрытия. Топологической энтропией динамической системы, порожденной непрерывным отображением f , называется

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

Данная работа посвящена изучению свойств топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра. В книге [1; с. 501] установлено, что топологическая энтропия семейства непрерывных отображений из $[0; 1]$ в $[0; 1]$, непрерывно зависящих от параметра, является функцией, всюду полунепрерывной снизу для всех значений этого параметра. Вообще говоря, топологическая энтропия динамических систем, непрерывно зависящих от параметра, может и не быть полунепрерывной снизу функцией этого параметра. Рассмотрим зависящую от параметра $\mu \in [0; 1]$ динамическую систему (X, f_μ) , где $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$,

$f_\mu(z) = \mu|z| \exp(2i \arg(z))$. Пусть $\mu \in [0; 1)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется натуральное число $n(\mu, \varepsilon)$ такое, что для любого $i \geq n(\mu, \varepsilon)$ и любых точек $z, w \in X$ выполнено

$$d(f_\mu^i(z), f_\mu^i(w)) \leq d(f_\mu^i(z), 0) + d(0, f_\mu^i(w)) \leq 2\mu^i < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого натурального числа $n \geq n(\mu, \varepsilon)$ имеем

$$d_n^{f_\mu}(z, w) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f_\mu^i(z), f_\mu^i(w)) < \max\{d_n^{f_\mu}(z, w), \varepsilon\};$$

значит, при $n \geq n(\mu, \varepsilon)$ выполнено неравенство $S_d(f_\mu, \varepsilon, n) \leq S_d(f_\mu, \varepsilon, n(\mu, \varepsilon))$, откуда

$$0 \leq h_{\text{top}}(f_\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f_\mu, \varepsilon, n) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f_\mu, \varepsilon, n(\mu, \varepsilon)) = 0.$$

Таким образом, при $\mu \in [0; 1)$ выполнено равенство $h_{\text{top}}(f_\mu) = 0$.

Пусть $\mu = 1$ и натуральное число $k \geq 4$; положив

$$\varepsilon = \sqrt{2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{2^k} \right) \right)},$$

для натурального числа $n \geq 4$ рассмотрим множество точек

$$\mathcal{Z} = \left\{ z_m = \exp \left(\frac{2\pi m i}{2^{k+n}} \right) \right\}, \quad m = 0, \dots, 2^{k+n} - 1.$$

Если расстояние между двумя точками z_p и z_q множества $\mathcal{Z}$ удовлетворяет неравенству

$$d(z_p, z_q) \geq \sqrt{2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{2^k} \right) \right)},$$

то

$$d_n^{f_1}(z_p, z_q) \geq \sqrt{2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{2^k} \right) \right)}.$$

Если расстояние между двумя точками z_p и z_q этого множества удовлетворяет неравенству

$$d(z_p, z_q) < \sqrt{2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{2^k} \right) \right)},$$

то найдется $l \leq n - 1$ такое, что

$$d_n^{f_1}(z_p, z_q) \geq d(f_1^l(z_p), f_1^l(z_q)) \geq \sqrt{2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{2^k} \right) \right)}.$$

Таким образом, для любых двух точек выполнено неравенство

$$d_n^{f_1}(z_p, z_q) \geq \sqrt{2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{2^k} \right) \right)}.$$

Отсюда получаем $S_d(f_1, \sqrt{2(1 - \cos(2\pi/2^k))}, n) \geq 2^{k+n}$; следовательно,

$$h_{\text{top}}(f_1) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d\left(f_1, \sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{2^k}\right)\right)}, n\right) \geq \ln 2.$$

Таким образом, функция $h_{\text{top}}(f_\mu): [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ разрывна в точке $\mu = 1$. Более того, функция $h_{\text{top}}(f_\mu)$ не является полунепрерывной снизу в точке $\mu = 1$. Для описания зависимости различных характеристик асимптотического поведения траекторий динамических систем от параметров. Миллионщиков [2] предложил использовать классификацию Бэра [3] разрывных функций. Напомним, что функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей непрерывных функций, принадлежат первому классу Бэра, а функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций первого класса Бэра, принадлежат второму классу Бэра и т.д. С точки зрения этой классификации изучим свойства топологической энтропии.

2. Точный класс Бэра топологической энтропии. Введем некоторые обозначения. Пусть $\text{Lip}_K(X)$ – множество непрерывных функций $f: X \rightarrow X$, удовлетворяющих условию Липшица с константой $K > 1$. На множестве

$$\text{Lip}(X) = \bigcup_{K>1} \text{Lip}_K(X)$$

определим топологию равномерной сходимости, введя метрику

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Определим точный класс Бэра функции $h_{\text{top}}: \text{Lip}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ на пространстве $(\text{Lip}(X), \rho)$.

ТЕОРЕМА 1. *Функция $h_{\text{top}}: \text{Lip}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $(\text{Lip}(X), \rho)$.*

Доказательство теоремы будет разбито на ряд лемм.

ЛЕММА 1. *Пусть $f \in \text{Lip}(X)$; тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство (X, d_n^f) является компактным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \in \text{Lip}(X)$, существует $K > 1$ такое, что для любых $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y),$$

из которого получаем

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)) \leq K^{n-1}d(x, y).$$

С другой стороны, $d_n^f(x, y) \geq d(x, y)$; следовательно, метрики $d_n^f(x, y)$ и $d(x, y)$ эквивалентны на пространстве X . Пространство (X, d) является компактным; следовательно, пространство (X, d_n^f) является компактным. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in \text{Lip}(X)$ и множество $E \subset X$ является (f, ε, n) -покрытием. Тогда существует натуральное число m : $\varepsilon - 1/m > 0$ такое, что множество E является $(f, \varepsilon - 1/m, n)$ -покрытием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть для любого натурального числа m : $\varepsilon - 1/m > 0$ найдется точка $x_m \in X$ такая, что $x_m \notin \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon - 1/m, n)$. В силу леммы 1 пространство (X, d_n^f) компактное; следовательно, последовательность $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset X$ имеет предельную точку $x^* \in X$. Из $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ выделим подпоследовательность $\{x_{m'}\}_{m'=1}^\infty$: $\lim_{m' \rightarrow \infty} x_{m'} = x^*$. Из включения

$$\begin{aligned} x^* \in X &\subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n) = \bigcup_{x \in E} \bigcup_{m: \varepsilon - 1/m > 0} B_f\left(x, \varepsilon - \frac{1}{m}, n\right) \\ &= \bigcup_{m: \varepsilon - 1/m > 0} \bigcup_{x \in E} B_f\left(x, \varepsilon - \frac{1}{m}, n\right) \end{aligned}$$

следует, что найдется натуральное число m_0 такое, что

$$x^* \in \bigcup_{x \in E} B_f\left(x, \varepsilon - \frac{1}{m_0}, n\right).$$

В силу открытости множества $B_f(x, \varepsilon - 1/m_0, n)$, начиная с некоторого m'_0 , все члены последовательности $\{x_{m'}\}_{m'=1}^\infty$ содержатся в $\bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon - 1/m_0, n)$. Следовательно,

$$x_{\max\{m_0, m'_0\}} \in \bigcup_{x \in E} B_f\left(x, \varepsilon - \frac{1}{m_0}, n\right) \subset \bigcup_{x \in E} B_f\left(x, \varepsilon - \frac{1}{\max\{m_0, m'_0\}}, n\right).$$

Получили противоречие с выбором элемента $x_{\max\{m_0, m'_0\}}$. Таким образом, $x^* \notin X$. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

ЛЕММА 3. Пусть $K > 1$, $f, g \in \text{Lip}_K(X)$ и $\rho(f, g) < \delta$. Тогда

$$d_g^n(x, y) \leq 2 \frac{K^n - 1}{K - 1} \delta + d_f^n(x, y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f, g \in \text{Lip}_K(X)$, для любого $i \in \{0, \dots, n-1\}$ и любого $x \in X$ получаем

$$\begin{aligned} d(f^i(x), g^i(x)) &\leq d(f(f^{i-1}(x)), f(g^{i-1}(x))) + d(f(g^{i-1}(x)), g(g^{i-1}(x))) \\ &\leq K d(f^{i-1}(x), g^{i-1}(x)) + \delta \leq (K^{i-1} + \dots + 1) \delta \leq \frac{K^i - 1}{K - 1} \delta; \end{aligned}$$

из этого неравенства следует

$$\begin{aligned} d_g^n(x, y) &= \max_{0 \leq i \leq n-1} d(g^i(x), g^i(y)) \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1} (d(g^i(x), f^i(x)) + d(f^i(x), f^i(y)) + d(f^i(y), g^i(y))) \\ &\leq \frac{K^n - 1}{K - 1} \delta + \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)) + \frac{K^n - 1}{K - 1} \delta = 2 \frac{K^n - 1}{K - 1} \delta + d_f^n(x, y). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Для любого натурального числа n и любого $\varepsilon > 0$ функция $S_d(\cdot, \varepsilon, n): \text{Lip}_K(X) \rightarrow \mathbb{N}$ полунепрерывна сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $E \subset X$ является (f, ε, n) -покрытием т.е. $X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n)$. По лемме 2 существует натуральное число m , удовлетворяющее неравенству $\varepsilon - 1/m < \varepsilon$, такое, что множество E является $(f, \varepsilon - 1/m, n)$ -покрытием. Пусть

$$0 < \delta < \frac{(K-1)}{2m(K^n-1)}$$

и $g \in \text{Lip}_K(X)$: $\rho(f, g) < \delta$. Тогда в силу леммы 3 для любого $x \in X$ и любого $y \in B_f(x, \varepsilon - 1/m, n)$ получаем

$$d_g^n(x, y) \leq \frac{1}{m} + d_f^n(x, y) < \varepsilon;$$

следовательно, точка y принадлежит шару $B_g(x, \varepsilon, n)$. Таким образом, выполнено включение $B_f(x, \varepsilon - 1/m, n) \subset B_g(x, \varepsilon, n)$, т.е. множество E является (g, ε, n) -покрытием. Следовательно, $S_d(g, \varepsilon, n) \leq S_d(f, \varepsilon, n)$ для любого g из некоторой окрестности f . Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $K > 1$. Тогда функция $h_{\text{top}}(\cdot): \text{Lip}_K(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $(\text{Lip}_K(X), \rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1; с. 122] установлено, что верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$ в определении топологической энтропии можно заменить на нижний предел $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$, т.е. справедливо равенство

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

По лемме 4 функция $S_d(\cdot, \varepsilon, n)$ полунепрерывна сверху; следовательно, (см. [4; с. 237]) существует последовательность непрерывных функций $\varphi_d^m(\cdot, \varepsilon, n)$ на пространстве $(\text{Lip}_K(X), \rho)$ такая, что

$$\frac{1}{n} \ln S_d(\cdot, \varepsilon, n) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \varphi_d^m(\cdot, \varepsilon, n).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \varphi_d^m\left(f, \frac{1}{k}, n\right) \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{l \geq n} \inf_{m \in \mathbb{N}} \varphi_d^m\left(f, \frac{1}{k}, l\right) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq p} \max_{1 \leq n \leq p} \lim_{q \rightarrow \infty} \min_{n \leq l \leq q} \min_{1 \leq m \leq q} \varphi_d^m\left(f, \frac{1}{k}, l\right). \end{aligned}$$

Из непрерывности функций $\varphi_d^m(\cdot, \varepsilon, n)$ следует непрерывность функций

$$\min_{n \leq l \leq q} \min_{1 \leq m \leq q} \varphi_d^m\left(\cdot, \frac{1}{k}, l\right)$$

(см. [4; с. 224]). Отсюда функции

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \min_{n \leq l \leq q} \min_{1 \leq m \leq q} \varphi_d^m \left(\cdot, \frac{1}{k}, l \right)$$

принадлежат первому классу Бэра; следовательно, функции

$$\Phi_p(f) = \max_{1 \leq k \leq p} \max_{1 \leq n \leq p} \lim_{q \rightarrow \infty} \min_{n \leq l \leq q} \min_{1 \leq m \leq q} \varphi_d^m \left(f, \frac{1}{k}, l \right).$$

(см. [4; с. 224]) принадлежат первому классу Бэра на пространстве $(\text{Lip}_K(X), \rho)$; следовательно функция $h_{\text{top}}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $(\text{Lip}_K(X), \rho)$. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $K > 1$. Тогда пространство $\text{Lip}_K(X)$ является замкнутым множеством в пространстве $(\text{Lip}(X), \rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f_0 – предельная точка множества $\text{Lip}_K(X)$. Тогда существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in \text{Lip}_K(X)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_0$. Для любого отображения f_n и любых $x, y \in X$ справедливо неравенство

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq K d(x, y).$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $d(f_0(x), f_0(y)) \leq K d(x, y)$; следовательно $f_0 \in \text{Lip}_K(X)$. Таким образом, множество $\text{Lip}_K(X)$ является замкнутым в пространстве $(\text{Lip}(X), \rho)$. Лемма 6 доказана.

Завершение ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.

По лемме 5 для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ сужение функции $h_{\text{top}}(\cdot)$ на замкнутое множество $\text{Lip}_{n+1}(X)$ принадлежит второму классу Бэра и $\text{Lip}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Lip}_{n+1}$; следовательно, по теореме [5; с. 385] функция $h_{\text{top}}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $(\text{Lip}(X), \rho)$. Теорема 1 доказана.

Оказывается, в теореме 1 второй класс Бэра, вообще говоря, нельзя заменить на первый класс Бэра. Приведем соответствующее построение. На множестве последовательностей $\{x = (x_1, x_2, \dots) : x_k \in \{0, 1\}\}$ введем метрику

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ \frac{1}{\min\{k : x_k \neq y_k\}}, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство обозначим через $\mathfrak{B}$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $K > 1$ функция $h_{\text{top}} : \text{Lip}_K(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ не принадлежит первому классу Бэра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть натуральное число k_0 такое, что для любого $k \geq k_0$ выполнено неравенство $k/(k-1) < K$. Каждому элементу $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathfrak{B}$ поставим в соответствие отображение $f_\alpha : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ такое, что

$$f_\alpha(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0}, x_{k_0+1}, \dots) = (x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+\alpha_1}, x_{k_0+1+\alpha_2}, \dots).$$

Полученное соответствие из $\mathfrak{B}$ в множество отображений из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}$ обозначим φ . Отображение φ имеет следующие свойства.

ЛЕММА 7. Для любого $\alpha \in \mathfrak{B}$ выполнено $f_\alpha \in \text{Lip}_K \mathfrak{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in \mathfrak{B}$ и $x \neq y$. Если $d(x, y) > 1/k_0$, то

$$d(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) = d(x, y).$$

Если $d(x, y) \leq 1/k_0$, то

$$\begin{aligned} d(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) &\leq \frac{1}{\min\{k : x_k \neq y_k\} - 1} \\ &= \frac{\min\{k : x_k \neq y_k\}}{\min\{k : x_k \neq y_k\} - 1} \cdot \frac{1}{\min\{k : x_k \neq y_k\}} \\ &= \frac{\min\{k : x_k \neq y_k\}}{\min\{k : x_k \neq y_k\} - 1} \cdot d(x, y) \leq K \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем $f_\alpha \in \text{Lip}_K(\mathfrak{B})$. Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Отображение $\varphi(\cdot) : \mathfrak{B} \rightarrow \text{Lip}_K(\mathfrak{B})$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$ и $\alpha \neq \beta$; тогда для любого $x \in \mathfrak{B}$ расстояние между образами

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= (x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+\alpha_1}, x_{k_0+1+\alpha_2}, \dots), \\ f_\beta(x) &= (x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+\beta_1}, x_{k_0+1+\beta_2}, \dots) \end{aligned}$$

удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} d(f_\alpha(x), f_\beta(x)) &\leq \frac{1}{k_0 + \min\{k : \alpha_k \neq \beta_k\} - 1} \\ &= \frac{k_0 + \min\{k : \alpha_k \neq \beta_k\}}{k_0 + \min\{k : \alpha_k \neq \beta_k\} - 1} \cdot \frac{1}{k_0 + \min\{k : \alpha_k \neq \beta_k\}} \\ &\leq K \frac{1}{k_0 + \min\{k : \alpha_k \neq \beta_k\} - 1} \leq K \cdot d(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Из этого неравенства получаем непрерывность отображения $\varphi(\cdot) : \mathfrak{B} \rightarrow \text{Lip}_K(\mathfrak{B})$. Лемма 8 доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $L > 0$ такое, что для любых $x, y \in X$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено неравенство $d_f^n(x, y) \leq L \cdot d_g^n(x, y)$. Тогда $h_{\text{top}}(f) \leq h_{\text{top}}(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $E \in X$ является $(g, \varepsilon/L, n)$ -покрытием. Из неравенства $d_f^n(x, y) \leq L \cdot d_g^n(x, y)$ получаем включение $B_g(x, \varepsilon/L, n) \subset B_f(x, \varepsilon, n)$; следовательно, множество E является (f, ε, n) -покрытием. Таким образом, выполнено неравенство $S_d(f, \varepsilon, n) \leq S_d(g, \varepsilon/L, n)$; следовательно,

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d\left(g, \frac{\varepsilon}{L}, n\right) = h_{\text{top}}(g).$$

Лемма 9 доказана.

Обозначим через $\mathcal{P}_0$ множество последовательностей из $\mathfrak{B}$, у которых, начиная с некоторого номера, все члены равны нулю, и через $\mathcal{P}_1$ множество последовательностей из $\mathfrak{B}$, у которых, начиная с некоторого номера, все члены равны единице.

ЛЕММА 10. Если $\alpha \in \mathcal{P}_0$, то $h_{\text{top}}(f_\alpha) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathcal{P}_0$, существует k_1 такое, что для любого $k \geq k_1$ выполнено равенство $\alpha_k = 0$. Следовательно, начиная с номера $k_1 + k_0 - 1$, элементы последовательностей x и $f_\alpha(x)$ совпадают. Таким образом,

$$d_{f_\alpha}^n(x, y) \leq (k_0 + k_1)d(x, y),$$

т.е. $d_{f_\alpha}^n(x, y) \leq (k_0 + k_1)d_I^n(x, y)$, где $I: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ – тождественное отображение. Топологическая энтропия тождественного отображения равна нулю. Следовательно, в силу леммы 9 получаем $0 \leq h_{\text{top}}(f_\alpha) \leq h_{\text{top}}(I) = 0$. Лемма 10 доказана.

На пространстве $\mathfrak{B}$ определим отображение $\sigma: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ по формуле

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Оценим снизу топологическую энтропию этого отображения. Пусть $\varepsilon = 1/k$; рассмотрим множество точек $\mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{B} : d(x, 0) \geq 1/(n+k)\}$. Для любых двух точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ из $\mathcal{N}$ имеем $d_\sigma^n(x^{(1)}, x^{(2)}) > 1/k$. Мощность множества $\mathcal{N}$ равна 2^{n+k} ; следовательно, $S_d(\sigma, 1/k, n) \geq 2^{k+n}$. Таким образом, получаем

$$h_{\text{top}}(\sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d\left(\sigma, \frac{1}{k}, n\right) \geq \ln 2.$$

ЛЕММА 11. Если $\alpha \in \mathcal{P}_1$, то $h_{\text{top}}(f_\alpha) \geq \ln 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathcal{P}_1$, существует k_1 такое, что для любого $k \geq k_1$ выполнено равенство $\alpha_k = 1$. Следовательно, начиная с номера $k_1 + k_0$, элементы последовательностей $\sigma(x)$ и $f_\alpha(x)$ совпадают. Таким образом,

$$d_\sigma^n(x, y) \leq (k_0 + k_1)d_{f_\alpha}^n(x, y).$$

Следовательно, в силу леммы 9 получаем $h_{\text{top}}(f_\alpha) \geq h_{\text{top}}(\sigma) \geq \ln 2$. Лемма 11 доказана.

Завершение ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2.

Предположим, что функция $h_{\text{top}}(\cdot): \text{Lip}_K(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ принадлежит первому классу Бэра. Тогда сложная функция $h_{\text{top}}(\varphi(\cdot)): \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ в силу леммы 8 принадлежит первому классу Бэра на пространстве (см. [5; с. 385]). Следовательно, по теореме Бэра о функциях первого класса, в пространстве $\mathfrak{B}$ должны быть точки непрерывности функции $h_{\text{top}}(\varphi(\cdot))$ (см. [4; с. 247]). С другой стороны, множества $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_1$ всюду плотны в $\mathfrak{B}$; следовательно, в силу лемм 10 и 11 каждая точка пространства $\mathfrak{B}$ является точкой разрыва функции $h_{\text{top}}(\varphi(\cdot))$. Таким образом, функция $h_{\text{top}}(\cdot): \text{Lip}_K(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ не принадлежит первому классу Бэра. Теорема 2 доказана.

Пусть задано непрерывное отображение φ некоторого топологического пространства $\mathcal{M}$ в пространство $\text{Lip}(X)$. Из теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция $h_{\text{top}}(\varphi(\cdot)): \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ принадлежит второму классу Бэра.

Напомним, что *множеством типа G_δ* называется пересечение счетной совокупности открытых множеств. Из теоремы 2 в силу теоремы Бэра (см. [4; с. 250]) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть пространство $\mathcal{M}$ метризуемо и полно в некоторой метрике. Тогда в пространстве $\mathcal{M}$ имеется всюду плотное множество G типа G_δ такое, что функция $h_{\text{top}}(\varphi(\cdot)): G \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ непрерывна.

3. О типичности полунепрерывности снизу топологической энтропии. Перейдем к изучению вопроса о том, насколько часто встречаются разрывы топологической энтропии. Существует много, не эквивалентных друг другу, трактовок того, какие свойства являются типичными, а какие нетипичными. Здесь мы напомним понятие типичности, введенное и изученное Бэром [3]. Свойство точки топологического пространства называется *типичным по Бэру*, если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть пространство $\mathcal{M}$ метризуемо и полно в некоторой метрике. Тогда множество точек, в которых функция $h_{\text{top}}(\varphi(\cdot)): \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ полунепрерывна снизу, является типичным по Бэру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого натурального числа p функция

$$\Phi_p(f) = \sup_{1 \leq k \leq p} \sup_{1 \leq n \leq p} \lim_{q \rightarrow \infty} \inf_{n \leq l \leq q} \inf_{1 \leq m \leq q} \varphi_d^m \left(f, \frac{1}{k}, l \right).$$

принадлежит первому классу Бэра на пространстве $(\text{Lip}_{n+1}(X), \rho)$ и

$$\text{Lip}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_{n+1};$$

в силу теоремы (см. [5; с. 385]) функция $\Phi_p^n(\cdot)$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве $(\text{Lip}(X), \rho)$. Следовательно, функция $\Phi_p(\varphi(\cdot))$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$. По теореме Бэра (см. [4; с. 247]) множество точек непрерывности G_p каждой функции $\Phi_p(\varphi(\cdot))$ является всюду плотным множеством типа G_δ . Пересечение всех G_p снова является всюду плотным множеством типа G_δ (см. [5; с. 428]), каждая точка которого является точкой непрерывности всех функций $\Phi_p(\varphi(\cdot))$. Пусть $\mu_0 \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} G_p$, и пусть $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{\Phi_p(\varphi(\cdot))\}_{p=1}^\infty$ является неубывающей, при достаточно большом p окажется $\Phi_p(\varphi(\mu_0)) \geq h_{\text{top}}(\varphi(\mu_0)) - \varepsilon$. Зафиксируем такое p , найдем $\mathcal{O}(\mu_0)$ окрестность точки μ_0 такую, что для всякого $\mu \in \mathcal{O}(\mu_0)$ будет $\Phi_p(\varphi(\mu)) \geq \Phi_p(\varphi(\mu_0)) - \varepsilon$. Так как $h_{\text{top}}(\varphi(\mu)) \geq \Phi_p(\varphi(\mu))$, для $\mu \in \mathcal{O}(\mu_0)$ окажется $h_{\text{top}}(\varphi(\mu)) \geq h_{\text{top}}(\varphi(\mu_0)) - 2\varepsilon$. Следовательно, в каждой точке множества $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} M_p$ функция

$$h_{\text{top}}(\varphi(\cdot)) = \lim_{p \rightarrow \infty} (\Phi_p(\varphi(\cdot)))$$

полунепрерывна снизу. Теорема 3 доказана.

Автор благодарен профессору И. Н. Сергееву и доценту В. В. Быкову за оказанное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
- [2] В. М. Миллионщиков, “Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения”, *Матем. заметки*, **38:1** (1985), 92–109.
- [3] Р. Бэр, *Теория разрывных функций*, Гостехиздат, М., 1932.
- [4] Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, ОНТИ, М., 1937.
- [5] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966.

А. Н. Ветохин

Российский государственный университет
туризма и сервиса,
Московская обл., Пушкинский р-н, пос. Черкизово
E-mail: vetokhin@front.ru

Поступило

24.11.2011

Исправленный вариант

19.03.2012