Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 684–701

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 07:32:29

Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Предложен новый способ моделирования известного феномена “bursting behavior” в нейронных системах, основанный на привлечении уравнений с запаздыванием. А именно, введено в рассмотрение некоторое сингулярно возмущенное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями, описывающее функционирование отдельного нейрона. Установлено существование у этого уравнения при подходящем выборе параметров устойчивого периодического движения с любым наперед заданным количеством всплесков на отрезке времени длины периода.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9293

1. Введение. К настоящему времени проведена целая серия исследований (см. [1]–[6]), связанных с переносом на уравнения с запаздыванием известных асимптотических методов Дородницына, Понтрягина и Мищенко [7], [8]. К указанному циклу работ относится и данная статья. Объектом анализа в ней служит некоторое сингулярно возмущенное скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение, моделирующее электрическую активность отдельного нейрона. Рассматриваются вопросы о существовании и устойчивости у этого уравнения релаксационного цикла со специальными свойствами, о которых скажем ниже.

Как известно, для автоколебательных процессов в нейронных системах характерно чередование пакетов импульсов (наборов из нескольких подряд идущих интенсивных всплесков) с относительно спокойными участками изменения мембранных потенциалов. Указанный феномен в англоязычной литературе получил название “bursting behavior”, что дословно означает “взрывное поведение”. Мы же за неимением подходящего русского эквивалента будем использовать термин “bursting-эффект”.

Исследованию bursting-эффекта посвящена весьма обширная литература (см., например, работы [9]–[13] и имеющуюся в них библиографию). Как правило, для математического моделирования этого эффекта привлекаются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной медленной и двумя быстрыми переменными, в которых при определенных условиях могут

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00342а, 09-01-00614) и целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 02.740.11.0197).

существовать устойчивые bursting-циклы (периодические движения с bursting-эффектом). Мы же предлагаем принципиально иной подход к решению данной проблемы, связанный с введением запаздываний по времени.

Следуя методике из [14], в качестве математической модели отдельного нейрона возьмем дифференциально-разностное уравнение

$$\dot{u} = \lambda[f(u(t-h)) - g(u(t-1))]u. \quad (1.1)$$

Здесь $u(t) > 0$ – мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а параметр h фиксирован и принадлежит интервалу $(0, 1)$. Относительно фигурирующих в (1.1) функций $f(u), g(u) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, предполагаем, что они обладают свойствами

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, & g(0) &= 0, \\ f(u) &= -a_0 + O\left(\frac{1}{u}\right), & uf'(u) &= O\left(\frac{1}{u}\right) \\ g(u) &= b_0 + O\left(\frac{1}{u}\right), & ug'(u) &= O\left(\frac{1}{u}\right) \end{aligned} \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \quad (1.2)$$

где a_0, b_0 – положительные константы. Типовыми примерами таких функций являются

$$f(u) = \frac{1-u}{1+c_1u}, \quad g(u) = \frac{c_2u}{1+u}, \quad c_1, c_2 = \text{const} > 0. \quad (1.3)$$

Рис. 1

Наш основной результат состоит в следующем. По любому фиксированному натуральному n можно так подобрать фигурирующие в (1.1), (1.2) параметры h, a_0, b_0 , что при всех достаточно больших λ уравнение (1.1) будет иметь экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где $T_*(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к некоторому конечному пределу $T_* > 0$. Сама же функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени длины периода допускает ровно n подряд идущих асимптотически высоких (порядка $\exp(\lambda h)$) всплесков продолжительности $\Delta t = (1 + 1/a_0)h$, а все остальное время она асимптотически мала. Иными словами, при указанном выборе параметров h, a_0, b_0 реализуется bursting-эффект.

Наглядное представление о релаксационных свойствах bursting-цикла $u_*(t, \lambda)$ дает его график на плоскости (t, u) (см. рис. 1), построенный в масштабе 25 : 1 для случая $h = 1/26$, $\lambda = 130$ и для функций (1.3) при $c_1 = 0.5$, $c_2 = 4$.

2. Формулировка результата. При исследовании вопроса о существовании и устойчивости у уравнения (1.1) релаксационного bursting-цикла удобно сделать в (1.1) замену $u = \exp(\lambda x)$. Указанная замена преобразует интересующее нас уравнение к виду

$$\dot{x} = F(x(t-h), \varepsilon) - G(x(t-1), \varepsilon), \quad (2.1)$$

где

$$F(x, \varepsilon) = f\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right), \quad G(x, \varepsilon) = g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \ll 1.$$

Далее, из свойств (1.2) функций $f(u)$, $g(u)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) &= R(x), & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) &= H(x), \\ R(x) &= \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -a_0 & \text{при } x > 0, \end{cases} & H(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ b_0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Равенства (2.2), в свою очередь, позволяют перейти от (2.1) к рассмотрению предельного релейного уравнения с запаздываниями

$$\dot{x} = R(x(t-h)) - H(x(t-1)). \quad (2.3)$$

Как и в работах [2], [4], [6], понятие решения уравнения (2.3) определим конструктивно. С этой целью фиксируем произвольно натуральное n и предположим, что параметры h , a_0 , b_0 из (1.1), (1.2) удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{(n+1)(2+a_0+1/a_0)} < h < \frac{1}{n(2+a_0+1/a_0)+2+1/a_0}, \quad (2.4)$$

$$b_0 > 1 + a_0. \quad (2.5)$$

Далее, фиксируем некоторое достаточно малое $\sigma_0 > 0$ (оценка сверху на этот параметр будет уточнена в последующем), рассмотрим множество функций

$$\varphi(t) \in C[-1-\sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0, \quad t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0, \quad (2.6)$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (2.3) с произвольной начальной функцией (2.6).

При интегрировании уравнения (2.3) следует иметь в виду, что его правая часть представляет собой кусочно-постоянную функцию и меняется лишь тогда, когда $x(t-h)$ или $x(t-1)$ меняет знак. В частности, при $-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0 + h$ имеем одновременно $\varphi(t-h) < 0$ и $\varphi(t-1) < 0$. Поэтому на указанном промежутке времени согласно (2.3), (2.6) функция $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x(-\sigma_0) = -\sigma_0$, а значит, задается равенством

$$x_\varphi(t) = t. \quad (2.7)$$

Ясно также, что формула (2.7) сохраняется до тех пор, пока выполняются неравенства $x_\varphi(t-h) < 0$ и $x_\varphi(t-1) < 0$. Тем самым, она заведомо справедлива на отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq 0$.

При $0 \leq t < 1$ в силу уже проделанных построений имеем $x_\varphi(t-1) < 0$ и, следовательно, $H(x_\varphi(t-1)) = 0$. Таким образом, на данном промежутке времени интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ удовлетворяет вспомогательному уравнению

$$\dot{x} = R(x(t-h)). \quad (2.8)$$

Что же касается уравнения (2.8), то его свойства были изучены в статье [4]. В упомянутой работе, в частности, установлено, что любое решение $x(t)$ этого уравнения такое, что $x(t) < 0$ при $-h \leq t < 0$, $x(0) = 0$, при всех $t \geq 0$ совпадает с периодической функцией

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq h, \\ h - a_0(t-h) & \text{при } h \leq t \leq t_0 + h, \\ -a_0h + t - t_0 - h & \text{при } t_0 + h \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t+T_0) \equiv x_0(t), \quad (2.9)$$

где $t_0 = h(1 + 1/a_0)$, $T_0 = h(2 + a_0 + 1/a_0)$. График функции $x_0(t)$ при $a_0 = 2$, $h = 1/26$ представлен на рис. 2.

Рис. 2

Возвращаясь к исходному уравнению (2.3) и принимая во внимание все вышесказанное, приходим к равенству

$$x_\varphi(t) = x_0(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.10)$$

Для последующего анализа нам потребуется специальная функция $y_0(t)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - H(x_0(t)), \quad x|_{t=0} = 0. \quad (2.11)$$

Привлекая формулы (2.9), нетрудно увидеть, что при $t \geq 0$ она задается соотношениями

$$y_0(t) = \begin{cases} -(b_0 - 1)t & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ t - b_0 t_0 & \text{при } t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$y_0(t) = (k-1)(T_0 - b_0 t_0) + y_0(t - (k-1)T_0) \\ \text{при } (k-1)T_0 \leq t \leq kT_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2.$$

Перейдем к рассмотрению очередного отрезка времени $1 \leq t \leq 1 + h$ и заметим, что неравенства (2.4) обеспечивают принадлежность момента времени $t = 1$ интервалу $(nT_0 + t_0 + h, (n+1)T_0)$. Тем самым, в силу (2.9), (2.10) имеем $x_\varphi(t-h) < 0$ при $t \in [1, 1+h]$ и, следовательно, на указанном отрезке функция $x_\varphi(t)$ является решением аналогичной (2.11) задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - H(x_0(t-1)), \quad x|_{t=1} = x_0(1).$$

А отсюда заключаем, что при $1 \leq t \leq 1 + h$ справедлива формула

$$x_\varphi(t) = x_0(1) + y_0(t-1). \quad (2.13)$$

На следующем этапе обратим внимание, что при априорном условии

$$x_\varphi(t-h) < 0 \quad (2.14)$$

равенство (2.13) сохраняется на отрезке $1 \leq t \leq 2$. Но это условие действительно выполняется, поскольку согласно (2.4), (2.5), (2.9), (2.12)

$$x_0(1) = x_0(1 - nT_0) = 1 - (n+1)T_0 < 0, \quad y_0(t-1) < 0, \quad t > 1. \quad (2.15)$$

Таким образом, при $1 \leq t \leq 2$ соотношение (2.13) обретает законную силу.

При рассмотрении значений $t \geq 2$ будем предполагать, что наряду с (2.14) имеет место априорная оценка

$$x_\varphi(t-1) < 0. \quad (2.16)$$

В этом случае интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ определяется из задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x|_{t=2} = x_0(1) + y_0(1)$, а значит, задается вытекающей из (2.12), (2.15) формулой

$$x_\varphi(t) = t - T_*, \quad T_* = (n+1)(T_0 + b_0t_0). \quad (2.17)$$

Остается добавить, что согласно (2.13), (2.17) априорные требования (2.14), (2.16) заведомо выполняются на промежутке $2 \leq t \leq T_*$, длина которого в силу неравенства $T_* - 2 > 0$ (являющегося следствием оценок (2.4), (2.5)) положительна.

Распорядимся теперь имеющимся в запасе свободным параметром σ_0 (см. (2.6)). Из проделанных выше построений следует, что при условии

$$\sigma_0 < T_0 - t_0 + (n+1)b_0t_0 - 1, \quad (2.18)$$

которое всюду ниже считаем выполненным, функция $x_\varphi(t+T_*)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ принадлежит введенному выше множеству (2.6). А это значит, что на промежутках $kT_* - \sigma_0 \leq t \leq (k+1)T_* - \sigma_0$, $k = 1, 2, \dots$, весь описанный выше процесс построения $x_\varphi(t)$ повторяется снова и снова. Следовательно, при всех $t \geq -\sigma_0$ каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (2.6) совпадает с одной и той же T_* -периодической функцией $x_*(t)$, задающейся равенствами

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ x_0(1) + y_0(t-1) & \text{при } 1 \leq t \leq 2, \\ t - T_* & \text{при } 2 \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad x_*(t+T_*) \equiv x_*(t). \quad (2.19)$$

Рис. 3

График этой функции при $a_0 = 2$, $b_0 = 4$, $h = 1/26$ показан на рис. 3 (при выбранных значениях параметров неравенства (2.4) выполняются для $n = 5$).

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (2.1) и (2.3). Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (2.1) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*. \quad (2.20)$$

Доказательство сформулированной теоремы опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания наряду с константой σ_0 , подчиненной условию (2.18), фиксируем постоянные $q_1 > \sigma_0$, $q_2 \in (0, \sigma_0)$ и обозначим через

$$S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$$

замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0. \quad (2.21)$$

Затем для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$ уравнения (2.1) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ с номером $2n + 2$ (в предположении, что данное уравнение имеет на полуоси $t > 0$ не менее $(2n + 2)$ -х корней, занумерованных в порядке возрастания). И наконец, зададим оператор последования Пуанкаре $\Pi_\varepsilon: S(\sigma_0, q_1, q_2) \rightarrow C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (2.22)$$

Дальнейший план действий стандартен (см. аналогичные места в работах [4], [6]). Сначала мы установим асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на различных промежутках изменения t , из которых будет следовать, что при подходящем выборе

параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (2.22) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$ и покажем, что Π_ε является сжимающим.

3. Доказательство существования bursting-цикла. Построение асимптотики функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Опираясь на неравенства из (2.21) и свойства функции $g(u)$ (см. (1.2)), замечаем, что равномерно по $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$G(\varphi(t-1), \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q_2}{\varepsilon}\right)\right). \quad (3.1)$$

Формула (3.1), в свою очередь, позволяет отбросить соответствующее слагаемое в правой части из (2.1) и перейти к исследованию аналогичного (2.8) вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = F(x(t-h), \varepsilon), \quad (3.2)$$

которое к настоящему времени уже изучено (см. [4]).

Для того чтобы воспользоваться асимптотическими равенствами, полученными в работе [4] для решений уравнения (3.2), сначала уточним выбор параметра σ_0 . Следуя [4], будем считать, что он удовлетворяет условию (более сильному, чем (2.18))

$$2\sigma_0 < \min(h, a_0 h). \quad (3.3)$$

Кроме того, предполагаем дополнительно, что

$$2\sigma_0 < \min(1 - nT_0 - t_0 - h, 2((n+1)T_0 - 1)). \quad (3.4)$$

Итак, обратимся непосредственно к асимптотическому анализу интересующего нас решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ уравнения (2.1). Объединяя равенство (3.1) с известными асимптотическими формулами из [4], приходим к следующим фактам.

1) На промежутках $-\sigma_0 + kT_0 \leq t \leq h - \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, справедливы асимптотические представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - kT_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (3.5)$$

где здесь и далее через Δ_φ обозначаются различные остатки, модули которых имеют экспоненциальный порядок малости (т.е. порядок $\exp(-q/\varepsilon)$, $q = \text{const} > 0$) равномерно по φ, t .

2) На отрезках времени $h - \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq h + \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$ решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ допускает представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = h + \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-h-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (3.6)$$

где функция $v_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, задается равенством

$$v_0(\tau) = \tau + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp s) - 1] ds \quad (3.7)$$

и обладает свойствами [4]:

$$\begin{aligned} v_0(\tau) &= \tau + O(\exp \tau), & \tau \rightarrow -\infty, \\ v_0(\tau) &= -a_0\tau + c_0 + O(\exp(-\tau)), & \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $c_0 = \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a_0}{u} du.$

3) При $h + \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq t_0 + h - \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, имеют место формулы

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = h - a_0(t - h - kT_0) + \varepsilon c_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon). \quad (3.9)$$

4) На отрезках $t_0 + h - \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq t_0 + h + \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, получаются аналогичные (3.6) асимптотические равенства

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -a_0h + \varepsilon w_0(\tau)|_{\tau=(t-t_0-h-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} w_0(\tau) &= -a_0\tau + c_0 + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp(-a_0s + c_0)) + a_0] ds, \\ w_0(\tau) &= -a_0\tau + c_0 + O(\exp(a_0\tau)), & \tau \rightarrow -\infty, \\ w_0(\tau) &= \tau + O(\exp(-a_0\tau)), & \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.11)$$

5) При $t_0 + h + \sigma_0 + kT_0 \leq t \leq (k+1)T_0 - \sigma_0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ задается соотношениями

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (k+1)T_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (3.12)$$

а на отрезке $t_0 + h + \sigma_0 + nT_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ (длина которого в силу (3.4) положительна) справедливо равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (n+1)T_0 + \Delta_\varphi(t, \varepsilon). \quad (3.13)$$

Следующий этап связан с рассмотрением отрезка $1 - \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$. Будем считать, что при указанных t выполняется априорная оценка

$$x_\varphi(t - h, \varepsilon) \leq -q, \quad (3.14)$$

где $q > 0$ – некоторая универсальная (не зависящая от t, ε, φ) постоянная. В этом случае в силу свойств (1.2) равномерно по t, φ

$$F(x_\varphi(t - h, \varepsilon), \varepsilon) - 1 = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0. \quad (3.15)$$

Что же касается функции $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$, то для нее при $t \in [1 - \sigma_0, 2 - \sigma_0]$ справедлива серия асимптотических равенств (3.5)–(3.13), в которых необходимо заменить t на $t - 1$.

Итак, на интересующем нас промежутке времени согласно (2.1), (3.15) исследованию подлежит дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = 1 - G(x_\varphi(t - 1, \varepsilon), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0, \quad (3.16)$$

правая часть которого фактически уже известна. Точнее говоря, добавка (3.15), естественно, обновляется по прошествии каждого отрезка времени длины h . Но поскольку при интегрировании уравнения (3.16) методом шагов мы последовательно рассматриваем именно такие промежутки, то при каждом конкретном t из отрезка $[1 - \sigma_0, 2 - \sigma_0]$ левая часть формулы (3.15) уже известна из предыдущего шага. Впрочем, ее явный вид несущественен. Важно лишь, что она экспоненциально мала.

Асимптотическое исследование уравнения (3.16) проведем с помощью метода математической индукции. Для этого нам понадобятся отрезки

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= [t_0 + h + nT_0 + \sigma_0, 1 - \sigma_0], \\ \Lambda_k &= [1 + t_0 + (k-1)T_0 + \sigma_0, 1 + kT_0 - \sigma_0], \quad k = 1, \dots, n, \\ \Lambda_{n+1} &= [1 + t_0 + nT_0 + \sigma_0, 2 - \sigma_0],\end{aligned}$$

а шаг индукции будет состоять в переходе с отрезка Λ_k на Λ_{k+1} .

Фиксируем некоторый номер k , $0 \leq k \leq n$, и предположим, что на отрезке Λ_k уже получено асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (n+1)T_0 - kb_0t_0 + \varepsilon\alpha_k + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad (3.17)$$

где α_k — некоторая константа. Подчеркнем, что при $k = 0$ равенство вида (3.17) имеет место (см. (3.13)) и в этом случае $\alpha_0 = 0$. Таким образом, остается убедиться в справедливости аналогичного (3.17) представления при $t \in \Lambda_{k+1}$.

Рассмотрим сначала отрезок $1 + kT_0 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + \sigma_0$, длина которого в силу (3.3) меньше h . А поскольку длина отрезка Λ_k больше h (что также следует из условия (3.3)), то согласно (3.17) функция $x_\varphi(t-h, \varepsilon)$ при указанных t нам известна. Известной является и функция $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ (для нее выполняется равенство (3.5) при замене t на $t-1$). Таким образом, в данном случае решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ определяется из задачи Коши

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - G(t-1-kT_0 + \omega_1(t, \varepsilon), \varepsilon) + \omega_2(t, \varepsilon), \\ x|_{t=1+kT_0-\sigma_0} &= 1 - (n+1)T_0 + k(T_0 - b_0t_0) - \sigma_0 + \varepsilon\alpha_k + \omega_3(\varepsilon),\end{aligned} \quad (3.18)$$

где ω_j , $j = 1, 2, 3$, — известные экспоненциально малые по модулю добавки.

Решение задачи (3.18) будем искать в виде

$$\begin{aligned}x_\varphi(t, \varepsilon) &= 1 - (n+1)T_0 + k(T_0 - b_0t_0) + \varepsilon\alpha_k + \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=(t-1-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \\ &\quad 1 + kT_0 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + \sigma_0,\end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$v_1(\tau) = \tau - \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds, \quad (3.20)$$

а Δ_φ — подлежащий определению остаток. Подставляя, далее, выражения (3.19), (3.20) в (3.18), для Δ_φ приходим к задаче Коши

$$\dot{\Delta}_\varphi = G_\varphi(t, \varepsilon), \quad \Delta_\varphi|_{t=1+kT_0-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \quad (3.21)$$

где

$$G_\varphi(t, \varepsilon) = g(x_1) - g(x_2) + \omega_2(t, \varepsilon) \quad (3.22)$$

$$\text{при } x_1 = \exp\left[\frac{(t-1-kT_0)}{\varepsilon}\right], \quad x_2 = \exp\left[\frac{(t-1-kT_0)}{\varepsilon} + \frac{\omega_1(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right],$$

$$g_\varphi(\varepsilon) = -\sigma_0 - \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(\varepsilon). \quad (3.23)$$

Таким образом, доказательство равномерной по φ , t экспоненциальной малости Δ_φ сводится к проверке аналогичных свойств для функции (3.22) и начального условия (3.23).

Обратимся сначала к анализу $g_\varphi(\varepsilon)$. Опираясь на свойства (1.2) функции $g(u)$, из (3.20) выводим, что

$$v_1(\tau) = \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad (3.24)$$

и, следовательно,

$$-\sigma_0 - \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O\left(\exp\left(-\frac{\sigma_0}{\varepsilon}\right)\right).$$

А отсюда и из известных свойств $\omega_3(\varepsilon)$ вытекает требуемая экспоненциальная малость величины (3.23).

Для оценки функции (3.22) снова привлечем свойства (1.2), из которых заключаем, что

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (1+x^2)|g'(x)| < \infty.$$

Далее, используя этот факт, нетрудно увидеть, что

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(x_1^2, x_2^2)} |x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+. \quad (3.25)$$

Применяя затем свойство (3.25) к правой части из (3.22), получаем неравенство

$$|G_\varphi(t, \varepsilon)| \leq \frac{M_2}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{|t-1-kT_0|}{\varepsilon}\right) |\omega_1(t, \varepsilon)| + |\omega_2(t, \varepsilon)|, \quad (3.26)$$

$$1 + kT_0 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + \sigma_0,$$

где M_2 – некоторая универсальная положительная константа. Остается заметить, что из (3.26) равномерная по t , φ экспоненциальная малость $G_\varphi(t, \varepsilon)$ следует уже очевидным образом.

Перейдем теперь к отрезку $1 + kT_0 + \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0$. Здесь имеем дело с уравнением (3.16), в котором $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ задается соответственно формулами (3.5), (3.6) или (3.9) (при замене в них t на $t-1$). Во всех случаях, однако, справедлива оценка вида

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \geq q, \quad (3.27)$$

где в качестве q можно взять любое число из интервала $(0, \min(\sigma_0, a_0\sigma_0))$.

Отмеченное выше неравенство (3.27) и свойства (1.2) приводят к асимптотическому представлению

$$G(x_\varphi(t-1, \varepsilon), \varepsilon) = b_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0, \quad (3.28)$$

которое, как и аналогичное ему соотношение (3.15), справедливо равномерно по φ, t . Последующий же способ действий стандартен: подставляем (3.28) в (3.16), дополняем получившееся уравнение начальным условием

$$x_\varphi(t, \varepsilon), \quad 1 + kT_0 + \sigma_0 - h \leq t \leq 1 + kT_0 + \sigma_0,$$

и применяем уже упоминавшийся выше метод шагов (т.е. рассматриваем последовательные отрезки времени длины h). В результате убеждаемся, что

$$\begin{aligned} x_\varphi(t, \varepsilon) &= 1 - (n+1)T_0 + k(T_0 - b_0 t_0) + \varepsilon \alpha_k + \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} \\ &\quad - (b_0 - 1)(t - 1 - kT_0 - \sigma_0) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ &\quad 1 + kT_0 + \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Для дальнейшего упрощения формулы (3.29) необходимо знать поведение функции (3.20) при $\tau \rightarrow +\infty$. Несложный подсчет показывает, что

$$v_1(\tau) = -(b_0 - 1)\tau - d_0 + O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (3.30)$$

где

$$d_0 = \int_0^1 \frac{g(u)}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - b_0}{u} du. \quad (3.31)$$

Учитывая затем соотношения (3.30), (3.31) в (3.29), окончательно получаем

$$\begin{aligned} x_\varphi(t, \varepsilon) &= 1 - (n+1)T_0 + k(T_0 - b_0 t_0) + \varepsilon(\alpha_k - d_0) - (b_0 - 1)(t - 1 - kT_0) + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \\ &\quad 1 + kT_0 + \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

На очередном отрезке $1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + t_0 + \sigma_0$ функция $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ задается формулой, получающейся из (3.9) при замене, как обычно, t на $t - 1$. А отсюда и из (3.16), (3.32) для нахождения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ приходим к аналогичной (3.18) задаче Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - G(-a_0(t - 1 - kT_0 - t_0) + \varepsilon c_0 + \omega_1(t, \varepsilon), \varepsilon) + \omega_2(t, \varepsilon), \\ x|_{t=1+kT_0+t_0-\sigma_0} &= 1 - (n+1)T_0 + k(T_0 - b_0 t_0) + \varepsilon(\alpha_k - d_0) - (b_0 - 1)(t_0 - \sigma_0) + \omega_3(\varepsilon), \end{aligned}$$

где, как и ранее, через ω_j , $j = 1, 2, 3$, обозначены некоторые уже известные экспоненциально малые добавки.

Решение получившейся задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_\varphi(t, \varepsilon) &= 1 - (n+1)T_0 + k(T_0 - b_0 t_0) \\ &\quad + \varepsilon(\alpha_k - d_0) - (b_0 - 1)t_0 + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-1-kT_0-t_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \\ &\quad 1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + kT_0 + t_0 + \sigma_0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где

$$w_1(\tau) = -(b_0 - 1)\tau - \int_{-\infty}^{\tau} [g(\exp(-a_0 s + c_0)) - b_0] ds. \quad (3.34)$$

В результате для фигурирующего в (3.33) остатка Δ_φ выходит аналогичная (3.21) задача Коши

$$\dot{\Delta}_\varphi = G_\varphi(t, \varepsilon), \quad \Delta_\varphi|_{t=1+kT_0+t_0-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \quad (3.35)$$

где теперь $G_\varphi(t, \varepsilon) = g(x_1) - g(x_2) + \omega_2(t, \varepsilon)$ при

$$\begin{aligned} x_1 &= \exp \left[-\frac{a_0(t-1-kT_0-t_0)}{\varepsilon} + c_0 \right], \\ x_2 &= \exp \left[-\frac{a_0(t-1-kT_0-t_0)}{\varepsilon} + c_0 + \frac{\omega_1(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \right], \\ g_\varphi(\varepsilon) &= (b_0 - 1)\sigma_0 - \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(\varepsilon). \end{aligned}$$

Оценка правых частей из (3.35) проводится по той же схеме, что и в случае (3.22), (3.23). Действительно, привлекая вытекающее из (3.34) асимптотическое равенство

$$w_1(\tau) = -(b_0 - 1)\tau + O(\exp(a_0\tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad (3.36)$$

приходим к выводу, что

$$(b_0 - 1)\sigma_0 - \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O\left(\exp\left(-\frac{a_0\sigma_0}{\varepsilon}\right)\right).$$

А отсюда следует экспоненциальная малость начального условия $g_\varphi(\varepsilon)$. Что же касается неоднородности $G_\varphi(t, \varepsilon)$, то проверка ее равномерной по t , φ экспоненциальной малости базируется на неравенстве (3.25) (см. аналогичное место выше).

Проделанные построения являются связующим звеном между отрезками Λ_k и Λ_{k+1} . Обратимся теперь непосредственно к Λ_{k+1} и заметим, что при $t \in \Lambda_{k+1}$ функция $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ определяется равенствами (3.9), (3.10), (3.12) или (3.13), в которых, как и во всех остальных подобных случаях, следует заменить t на $t-1$. Из упомянутых равенств, в свою очередь, заключаем, что при указанных t имеет место оценка

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \leq -q, \quad (3.37)$$

где $q = \text{const} \in (0, \min(a_0\sigma_0, (n+1)T_0 - 1))$. А отсюда и из свойств (1.2) вытекает справедливость равномерного по t , φ асимптотического представления

$$G(x_\varphi(t-1, \varepsilon), \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0. \quad (3.38)$$

Итак, подставим соотношение (3.38) в (3.16) и дополним получившееся дифференциально-разностное уравнение начальной функцией $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на промежутке времени $1+t_0+kT_0+\sigma_0-h \leq t \leq 1+t_0+kT_0+\sigma_0$, асимптотика которой уже построена (см. (3.32), (3.33), (3.34)). Далее, разобьем, как обычно, отрезок Λ_{k+1} на части длины, не большей h , и будем последовательно интегрировать упомянутое уравнение, имеющее вид

$$\dot{x} = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0, \quad (3.39)$$

на соответствующих промежутках. В результате приходим к выводу, что

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (n+1)T_0 - (k+1)b_0t_0 - \sigma_0 + \varepsilon(\alpha_k - d_0) + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad t \in \Lambda_{k+1}. \quad (3.40)$$

Как и в случае (3.29), формула (3.40) допускает дальнейшее упрощение. Для этого, однако, необходимо выяснить поведение при $\tau \rightarrow +\infty$ функции (3.34). Соответствующую асимптотическую формулу легко вывести, исходя из представления

$$w_1(\tau) = \tau - \frac{c_0b_0}{a_0} - \int_{c_0/a_0}^{+\infty} g(\exp(-a_0s + c_0)) ds - \int_{-\infty}^{c_0/a_0} [g(\exp(-a_0s + c_0)) - b_0] ds + \int_{\tau}^{+\infty} g(\exp(-a_0s + c_0)) ds. \quad (3.41)$$

Для этого достаточно заметить, что последнее слагаемое в (3.41) при $\tau \rightarrow +\infty$ имеет порядок $\exp(-a_0\tau)$, а сумма двух других интегралов преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{c_0/a_0} [g(\exp(-a_0s + c_0)) - b_0] ds + \int_{c_0/a_0}^{+\infty} g(\exp(-a_0s + c_0)) ds = \frac{d_0}{a_0},$$

где, напомним, d_0 – постоянная (3.31). Таким образом, окончательно получаем

$$w_1(\tau) = \tau - \frac{(c_0b_0 + d_0)}{a_0} + O(\exp(-a_0\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (3.42)$$

Возвратимся к равенству (3.40) и учтем в нем соотношение (3.42). В результате приходим к аналогичному (3.17) асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - (n+1)T - (k+1)b_0t_0 + \varepsilon\alpha_{k+1} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad t \in \Lambda_{k+1}, \quad (3.43)$$

где

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{c_0b_0}{a_0} - \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)d_0. \quad (3.44)$$

А это означает, что сделан шаг индукции, который состоял в переходе от отрезка Λ_k к Λ_{k+1} . Что же касается постоянных α_k , $k = 0, 1, \dots, n+1$, то для них из (3.44) и из того факта, что $\alpha_0 = 0$, вытекают явные формулы

$$\alpha_k = -k\left(\frac{c_0b_0}{a_0} + \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)d_0\right), \quad k = 0, 1, \dots, n+1. \quad (3.45)$$

Обоснованный выше индуктивный процесс позволяет за конечное число шагов добраться до последнего отрезка Λ_{n+1} и попутно установить требуемые асимптотические формулы для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на всем промежутке $1 - \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$. Следует, однако, напомнить, что пока наши построения, связанные с данным отрезком времени, носят условный характер, поскольку они были выполнены при априорном предположении (3.14). Но полученные на этом пути асимптотические формулы свидетельствуют о том, что при любом фиксированном $q \in (0, \min(a_0\sigma_0, (n+1)T_0 - 1))$

требуемое неравенство (3.14) действительно выполняется. Таким образом, все наши условные конструкции обретают законную силу.

На заключительном этапе построения асимптотики решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ рассмотрим отрезок времени $2 - \sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2$ и предположим, что на нем имеют место априорные оценки (3.14), (3.37). В этом случае в силу условий (1.2) уравнение (2.1) примет вид (3.39). Дополним его начальным условием $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $1 - \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$, известным из предыдущих построений. Интегрируя затем получившуюся задачу Коши методом шагов, приходим к асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - T_* + \varepsilon \alpha_{n+1} + \Delta_\varphi(t, \varepsilon), \quad 2 - \sigma_0 \leq t \leq T_* - \frac{\sigma_0}{2}, \quad (3.46)$$

где постоянная α_{n+1} задается формулой (3.45) при $k = n + 1$.

Для придания изложенным построениям необходимой строгости заметим, что из самого равенства (3.46) и из установленных ранее асимптотических формул для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $1 - \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$ вытекает справедливость априорных предположений (3.14), (3.37). А именно, несложная проверка показывает, что эти неравенства действительно выполняются на отрезке $2 - \sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2$, если в качестве константы q в них взять любое число из интервала $(0, \sigma_0/2)$.

Подведем некоторый итог. Из полученных выше асимптотических представлений для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (3.5)–(3.13), (3.17), (3.19), (3.20), (3.24), (3.30)–(3.34), (3.36), (3.42)–(3.46)) заключаем, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon), \quad (3.47)$$

где $x_*(t)$ – функция (2.19), а остаток равномерен по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Далее, опираясь на (3.47) и учитывая оценки (3.3), (3.4), наложенные на параметр σ_0 , приходим к выводу, что интересующий нас $(2n + 2)$ -й по счету положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ принадлежит отрезку $2 - \sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0/2$. А отсюда из формул (3.39), (3.46) очевидным образом следует, что T_φ определяется однозначно, причем равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$T_\varphi = T_* - \varepsilon \alpha_{n+1} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0. \quad (3.48)$$

Формулы (3.47), (3.48) свидетельствуют о том, что оператор (2.22) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и равномерно по φ

$$\max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon). \quad (3.49)$$

Что же касается требуемого включения $\Pi_\varepsilon(S(\sigma_0, q_1, q_2)) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2)$, то в силу (3.49) оно будет заведомо выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_*(t) \in \widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \quad (3.50)$$

где $\widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ – множество функций, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (2.21) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что на параметр σ_0 нами уже наложено ограничение (2.18), которое обеспечивает выполнение свойств

$x_*(-\sigma_0) = -\sigma_0$, $x_*(t) < 0$ при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Поэтому справедливости включения (3.50) добиваемся за счет имеющихся в запасе параметров q_1 , q_2 , предполагая, что

$$q_1 > -\min_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_*(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_*(t). \quad (3.51)$$

Итак, оператор Π_ε , являющийся очевидным образом компактным, при выполнении условий (2.18), (3.3), (3.4), (3.51) на параметры σ_0 , q_1 , q_2 преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. А отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Ясно также, что решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (2.1) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (3.47)–(3.49) удовлетворяет требуемым свойствам (2.20).

4. Анализ свойств устойчивости. Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 1, т.е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t, \varepsilon)$ с нулевым приближением (2.19). Из явной формулы (2.22) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ , а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)g_0 = g(t + T_\varphi, \varepsilon) - \frac{g(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)} \dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (4.1)$$

Здесь функция $g_0(t)$ представляет собой произвольный элемент пространства

$$C_0 = \{g_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], g_0(-\sigma_0) = 0\},$$

а через $g(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$, обозначено решение линейного уравнения

$$\begin{aligned} \dot{g} &= A(t, \varepsilon)g(t - h) + B(t, \varepsilon)g(t - 1), \\ A(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon}(f'(\exp x) \exp x)|_{x=x_\varphi(t-h, \varepsilon)/\varepsilon}, \\ B(t, \varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon}(g'(\exp x) \exp x)|_{x=x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.2)$$

с начальной функцией $g_0(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$.

Из явной формулы (4.1) следует, что проблема оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ в пространстве C_0 с нормой

$$\|g_0\| = \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |g_0(t)|$$

сводится к анализу введенного выше решения $g(t, \varepsilon)$ уравнения (4.2). Покажем, что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |g(t, \varepsilon)| \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right) \|g_0\| \quad (4.3)$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от ε , φ , g_0) постоянными M , $q > 0$.

Обратимся сначала к отрезку $-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$, на котором из (4.2) для $g(t, \varepsilon)$ имеем явную формулу

$$g(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t A(s, \varepsilon) g_0(s - h) ds + \int_{-\sigma_0}^t B(s, \varepsilon) g_0(s - 1) ds, \quad -\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0. \quad (4.4)$$

Напомним, далее, что при рассматриваемых t функция $x_\varphi(t - h, \varepsilon)$ совпадает с функцией $\varphi(t - h)$, а для $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ равенство $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = \varphi(t - 1)$ имеет место даже на более широком отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Объединяя эти соотношения с фигурирующими в (2.21) оценками и свойствами функций $f(u)$, $g(u)$ (см. (1.2)), приходим к выводу, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0} |A(t, \varepsilon)| \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right), \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0} |B(t, \varepsilon)| \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right). \quad (4.5)$$

И наконец, учитывая (4.5) в (4.4), убеждаемся, что при $-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$

$$\max_t |g(t, \varepsilon)| \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right) \|g_0\|. \quad (4.6)$$

Для распространения оценки (4.6) на оставшийся отрезок $[h - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно, разобьем указанный промежуток времени на отрезки

$$[(k + 1)h - \sigma_0, (k + 2)h - \sigma_0], \quad k = 0, 1, \dots, k_0, \quad \text{и} \quad [(k_0 + 2)h - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0],$$

где $k_0 = \lfloor (T_\varphi - 2h)/h \rfloor$, $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть. Опираясь, далее, на равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические формулы

$$\max_{h - \sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |A(t, \varepsilon)| = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \max_{1 - \sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |B(t, \varepsilon)| = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

и свойства (4.5), замечаем, что из неравенства

$$\begin{aligned} |g(t, \varepsilon)| &\leq |g((k + 1)h - \sigma_0, \varepsilon)| + \int_{(k + 1)h - \sigma_0}^t |A(s, \varepsilon)| \cdot |g(s - h, \varepsilon)| ds \\ &\quad + \int_{(k + 1)h - \sigma_0}^t |B(s, \varepsilon)| \cdot |g(s - 1, \varepsilon)| ds, \quad t \geq (k + 1)h - \sigma_0, \end{aligned}$$

и из уже полученных оценок вида (4.6) на отрезках с номерами $j = 0, 1, \dots, k - 1$ вытекает требуемая оценка на k -м отрезке изменения t .

Возвращаясь к оператору Π_ε и учитывая установленное выше неравенство (4.3) в (4.1), приходим к оценке

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\|_{C_0 \rightarrow C_0} \leq M \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right).$$

Остается добавить, что эта оценка обеспечивает как сжимаемость оператора последования Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ в множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t, \varepsilon)$. Теорема 1 полностью доказана.

В дополнение к установленной теореме отметим, что релаксационный цикл

$$u_*(t, \lambda) = \exp\left(\frac{x_*(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \Big|_{\varepsilon=1/\lambda} \quad (4.7)$$

исходного уравнения (1.1) обладает требуемыми асимптотическими характеристиками, т.е. является bursting-циклом. Действительно, для его периода $T_*(\lambda)$ справедлива вытекающая из (3.48) формула

$$T_*(\lambda) = T_0 - \frac{\alpha_{n+1}}{\lambda} + O(\exp(-q\lambda)), \quad q = \text{const} > 0, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Кроме того, на отрезке времени $0 \leq t \leq T_*(\lambda)$ цикл (4.7) допускает $n + 1$ подряд идущих асимптотически высоких (порядка $\exp(\lambda h)$) всплесков. Этим всплескам соответствуют интервалы $kT_0 < t < t_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, положительно-сти функции (2.19). Если же t фиксировано и принадлежит множеству $[0, T_*) \setminus \bigcup_{k=0}^n [kT_0, t_0 + kT_0]$, то в указанный момент времени функция $u_*(t, \lambda)$ имеет порядок малости $\exp(-\lambda q)$, где $q = \text{const} > 0$.

В заключение добавим, что при уменьшении запаздывания h для справедливости теоремы 1 необходимо надлежащим образом увеличивать параметр λ (связано это с тем, что в рамках нашей асимптотической теории должно выполняться условие $\lambda h \gg 1$). Если же, напротив, $h = h_0/\lambda$, $h_0 = \text{const} > 0$, то ситуация принципиально меняется. Например, в этом случае может оказаться устойчивым состояние равновесия $u = u_0 > 0$ уравнения (1.1) (существование такого состояния равновесия обеспечивают условия (1.2), а при вполне естественных требованиях $f'(u) < 0$, $g'(u) > 0$, $u \in \mathbb{R}_+$, оно единственно). Кроме того, используя так называемый метод квазинормальных форм (см. [15], [16]), можно показать, что при некоторых дополнительных предположениях из состояния равновесия $u = u_0$ бифурцирует любое наперед заданное число сосуществующих устойчивых циклов, т.е. реализуется хорошо известный феномен бифуркации. Соответствующий анализ будет изложен в отдельной статье.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, *Релаксационные колебания в математических моделях экологии*, Тр. МИАН, **199**, Наука, М., 1993.
- [2] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация”, *Динамические системы и смежные вопросы*, Сб. статей. К 60-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 126–153.
- [3] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Дискретные автоволны в системах с запаздыванием из экологии”, *ДАН*, **434**:6 (2010), 735–738.
- [4] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Об одной модификации уравнения Хатчинсона”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:12 (2010), 2099–2112.
- [5] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона”, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 51–82.
- [6] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференц. уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932.
- [7] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975.

- [8] Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Физматлит, М., 1995.
- [9] T. R. Chay, J. Rinzel, “Bursting, beating, and chaos in an excitable membrane model”, *Biophys. J.*, **47**:3 (1985), 357–366.
- [10] G. B. Ermentrout, N. Kopell, “Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation”, *SIAM J. Appl. Math.*, **46**:2 (1986), 233–253.
- [11] E. M. Izhikevich, “Neural excitability, spiking and bursting”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **10**:6 (2000), 1171–1266.
- [12] M. I. Rabinovich, P. Varona, A. I. Selverston, H. D. I. Abarbanel, “Dynamical principles in neuroscience”, *Rev. Mod. Phys.*, **78**:4 (2006), 1213–1265.
- [13] *Bursting. The Genesis of Rhythm in the Nervous System*, eds. S. Coombes, P. C. Bressloff, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.
- [14] С. А. Кащенко, В. В. Майоров, *Модели волновой памяти*, Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, М., 2009.
- [15] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Новые методы доказательства существования и устойчивости периодических решений в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием”, *Анализ и особенности. Часть 2*, Сб. статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН, **259**, Наука, М., 2007, 106–133.
- [16] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **49**:1 (2009), 76–89.

С. Д. Глызин

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Поступило

01.12.2011

А. Ю. Колесов

Ярославский государственный университет им.

П. Г. Демидова

E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Н. Х. Розов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: fpo.mgu@mail.ru