Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Жаркова, Количество аттракторов в динамических системах, ассоциированных с циклами, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 4, 529–537

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9294>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:04:38

Количество аттракторов в динамических системах, ассоциированных с циклами

А. В. Жаркова

Подсчитывается количество аттракторов в динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с циклами.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm9294

1. Проблемы теории конечных динамических систем. Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S – конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta: S \rightarrow S$ – (однозначное) отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется *карта*, представляющая собой ориентированный граф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются ее *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур (т.е. цикл, все ребра которого ориентированы в одном направлении) с входящими в него деревьями. Контуры называются *предельными циклами*, или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания их эволюционных параметров без проведения динамики, т.е. задачи определения различных характеристик данной системы без построения всей карты этой системы. К числу таких параметров относятся *ветвление* состояния (количество его непосредственных предшественников), *индекс* состояния (его расстояние до аттрактора того бассейна, которому оно принадлежит), принадлежность состояния аттрактору и другие. Автором написаны программы для ЭВМ, позволяющие вычислять различные параметры динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями некоторых типов графов, в частности, [1].

Одной из главных задач в теории динамических систем является описание аттракторов. Так, в работе [2] Салий вводит конечную динамическую систему двоичных векторов. Состояниями системы являются двоичные векторы заданной размерности, а эволюционная функция представляет собой некоторые преобразования с отдельными компонентами вектора, в результате чего получается новый вектор, являющийся следующим состоянием системы. Рассматриваются аттракторы динамической системы и ставится задача определить, будет ли предъявленное состояние

циклическим, т.е. будет ли оно принадлежать аттрактору. В книге [3], в которой Барбоса рассматривает так называемую SER динамическую систему, где состояниями системы являются всевозможные ациклические (бесконтурные) ориентации связного графа, а эволюционная функция представляет собой процесс переориентирования всех дуг данного орграфа, входящих в стоки (вершины с нулевой степенью исхода), в результате чего получается новый бесконтурный орграф, который и является следующим состоянием системы, ставится задача охарактеризовать циклические состояния. В работе [4] охарактеризованы булевы мономиальные динамические системы с неподвижными точками, т.е. системы, у которых все аттракторы имеют единичную длину (под *длиной аттрактора* понимается количество образующих его состояний). Известная *проблема $3x + 1$* , или *проблема Коллатца* [5], заключается в следующем. Динамическая система, состояниями которой являются натуральные числа, эволюционирует по правилам: если число x нечетное, то следующее состояние системы равно $(3x + 1)/2$, а если же x четное, то за ним следует $x/2$. Вопрос проблемы $3x + 1$: верно ли, что, начиная с любого натурального числа, повторение данной процедуры (т.е. осуществление динамики) в конце концов приведет к 1 (т.е. является ли единственным аттрактором данной динамической системы цикл, образуемый состояниями 1 и 2, которые переходят друг в друга). Другой пример – система Капрекара [6] и ее различные обобщения. Состояниями динамической системы здесь являются k -значные натуральные числа и эволюционная функция определяется так: берутся две перестановки цифр данного числа – в порядке убывания и возрастания, находится их абсолютная разность, которая и является следующим состоянием системы. В итоге состояния при эволюции приходят в ноль, в какую-то константу или в цикл, что и является аттракторами данной системы, точный вид которых требуется определить.

Автором описаны аттракторы динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с цепями [7]; описаны состояния, принадлежащие аттракторам динамических систем, ассоциированных с циклами, и сам вид аттракторов этих систем [8]. В настоящем сообщении подсчитывается количество аттракторов в динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями циклов.

2. Описание динамической системы. Через B^n , $n > 2$, обозначим множество всех двоичных векторов размерности n . На множестве B^n , $n > 2$, рассмотрим следующую динамическую систему (B^n, θ) [9], где θ – эволюционная функция системы. Пусть состоянием динамической системы (B^n, θ) в данный момент времени является вектор $v \in B^n$. Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\theta(v)$, полученном путем одновременного применения следующих правил:

- I) если первой компонентой в v является 0 и последней компонентой является 1, то первой компонентой в $\theta(v)$ будет 1, а последней компонентой – 0;
- II) если в составе v имеются диграммы вида 10, то в $\theta(v)$ каждая из них заменяется на 01;
- III) других отличий между v и $\theta(v)$ нет.

Пусть имеется n -звенный цикл c . Выберем в нем какую-либо вершину в качестве начальной, обозначим ее через c_0 , тогда цикл можно записать как $c = c_0 c_1 \cdots c_{n-1} c_n$, где c_n совпадает с c_0 . Придадим каждому ребру цикла произвольную ориентацию. Дуги, имеющие направление от вершины c_k к вершине c_{k+1} , $0 \leq k < n$, пометим символом 1, а дуги с противоположной ориентацией – символом 0.

Таким образом, каждой ориентации ребер цикла сопоставляется n -мерный двоичный вектор. С другой стороны, каждый такой вектор однозначно определяет некоторую ориентацию ребер цикла, так что между множеством C_n , $n > 2$, всевозможных ориентаций n -звенного цикла и множеством B^n , $n > 2$, устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Исходная динамическая система (B^n, θ) оказывается изоморфной динамической системе (C_n, θ) , $n > 2$, которая вводится следующим образом: если дан некоторый ориентированный цикл $c \in C_n$, то его динамическим образом $\theta(c)$ является цикл, получаемый из c одновременным превращением всех стоков в источники. *Источником* в ориентированном графе называется вершина с нулевой степенью захода. Для бесконтурных связных ориентированных графов данная динамика введена в [3].

Пусть $v \in B^n$, $n > 2$, тогда соответствующее состояние из C_n будем обозначать c_v , и наоборот, для $c \in C_n$ соответствующее состояние из B^n – через v_c .

3. Некоторые свойства рассматриваемой динамической системы. Множество источников ориентированного графа называется *допустимым*, если из него в каждый сток этого графа есть дуга.

ТЕОРЕМА 1 [9]. *Ветвление данного состояния с динамической системы, ассоциированной с циклом, равно количеству допустимых множеств источников в ориентации цикла, представляющей состояние c .*

Заметим, что оба контура в динамической системе (C_n, θ) , $n > 2$, образуют аттракторы единичной длины и каждый имеет одного непосредственного предшественника – самого себя.

Через $p_c(v)$ обозначим *циклическую плотность вектора v* , т.е. количество пар совпадающих соседних компонент в нем с учетом циклического сдвига. Например,

$$p_c(1110011) = 1 + 4 = 5.$$

Циклический блок – это максимальное по включению множество подряд стоящих нулей (0-блок) или единиц (1-блок) в количестве > 1 с учетом циклического сдвига. Состояния динамической системы, ассоциированной с циклом, будем рассматривать как циклические, поэтому под понятием “блок” далее будем подразумевать понятие “циклический блок”. *Длина блока* – число нулей (единиц) в блоке, уменьшенное на 1. Обозначим через p_c^0, p_c^1 суммы длин с учетом циклического сдвига рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков соответственно.

ТЕОРЕМА 2 [8]. *Вектор динамической системы (B^n, θ) , $n > 2$, тогда и только тогда принадлежит аттрактору, когда у него $p_c^0 = 0$ или $p_c^1 = 0$. При этом длины аттракторов равны делителям числа n и если $p_c^0 = 0$, то аттрактор представляет собой цикл, в котором следующее состояние получается из предыдущего циклическим сдвигом влево на одну компоненту, а при $p_c^1 = 0$ – вправо.*

Согласно теореме 2 можно провести классификацию аттракторов данной системы в зависимости от состояний, которые их образуют:

- 1) аттракторы, образуемые состояниями, для которых $p_c^0 = 0$ и $p_c^1 \neq 0$; т.е. это такие состояния, в которых нет 0-блоков и присутствует хотя бы один 1-блок; будем называть такие аттракторы *1-аттракторами*;

- 2) аттракторы, образуемые состояниями, для которых $p_c^0 \neq 0$ и $p_c^1 = 0$; т.е. это такие состояния, в которых присутствует хотя бы один 0-блок и нет 1-блоков; будем называть такие аттракторы *0-аттракторами*;
- 3) аттракторы, образуемые состояниями, для которых $p_c^0 = 0$ и $p_c^1 = 0$; т.е. это аттрактор, образуемый состояниями вида $(01)^n$ и $(10)^n$, где n – четное (при нечетном n последняя и первая компоненты образуют блок), которые при динамике переходят друг в друга; будем называть такие аттракторы *01-аттракторами*.

ТЕОРЕМА 3. *0- и 1-аттракторы динамической системы (B^n, θ) , $n > 2$, находятся во взаимно однозначном соответствии, а именно, каждому аттрактору динамической системы (B^n, θ) , $n > 2$, взаимно однозначно соответствует аттрактор, полученный из него путем одновременной замены в его состояниях нулей на единицы, единиц на нули и переориентации всех дуг между состояниями аттрактора на противоположные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что каждому 0-аттрактору динамической системы (B^n, θ) , $n > 2$, взаимно однозначно соответствует 1-аттрактор и наоборот, причем каждому такому аттрактору взаимно однозначно соответствует аттрактор, полученный из него путем одновременной замены в его состояниях нулей на единицы, единиц на нули и переориентации всех дуг между состояниями аттрактора на противоположные.

Рассмотрим 0- и 1-аттракторы в зависимости от количества и размерности 0- и 1-блоков в состояниях, их образующих.

I. $(p_c^0 = 0 \text{ и } p_c^1 = n)$ или $(p_c^0 = n \text{ и } p_c^1 = 0)$.

Это контуры, которые при динамике переходят сами в себя, тем самым образуя аттракторы единичной длины.

При замене у 0-контура нулей на единицы получаем 1-контур и при замене у 1-контура единиц на нули получаем 0-контур. Таким образом, 0- и 1-контуры находятся во взаимно однозначном соответствии.

II. $(p_c^0 = 0 \text{ и } p_c^1 \neq n)$ или $(p_c^0 \neq n \text{ и } p_c^1 = 0)$.

Рассмотрим аттракторы динамической системы (B^n, θ) , $n > 2$, на языке двоичных векторов и на языке ориентаций циклов.

Если в состоянии v , представленном на языке двоичных векторов, заменить нули на единицы и единицы на нули, то на языке ориентаций циклов это будет означать, что у состояния c_v переориентируются все дуги на противоположные, т.е. получим новую ориентацию ребер цикла, но при этом изоморфную c_v . Назовем полученное состояние *дополнением* состояния c и будем обозначать его c' , очевидно, что $(c')' = c$. При этом все источники состояния c в c' станут стоками и все стоки – источниками. Обозначим через θ' динамику, обратную динамике θ , т.е. при которой переориентируются все дуги, исходящие из источников. Таким образом, если у состояния c , принадлежащего аттрактору, переориентируем все дуги, исходящие из источника, т.е. применим динамику θ' , и также применим один шаг динамики θ к дополнению c' этого состояния, то получим состояния, которые будут в отношении “состояние и его дополнение”, т.е.

$$(\theta'(c))' = \theta(c') \quad \text{или} \quad \theta'(c) = (\theta(c'))'.$$

Это выполняется потому, что при обеих динамиках переориентируются дуги, входящие в стоки или источники, а все остальные дуги остаются прежними, поэтому получается, что стоки и источники взаимозаменяются, и если мы переориентируем и все остальные не задействованные при динамике дуги, то и получим дополнение состояния. И наоборот,

$$(\theta'(c'))' = \theta(c) \quad \text{или} \quad \theta'(c') = (\theta(c))'.$$

То есть имеет место эволюция

$$c_1 \xrightarrow{\theta} c_2, \quad c'_1 \xrightarrow{\theta'} c'_2.$$

Заметим, что при динамике θ все стоки заменяются на источники, при обратной динамике θ' все источники заменяются на стоки, и по теореме 1 о ветвлении количество непосредственных предшественников ориентации цикла равно количеству допустимых множеств источников, которые и определяют предшественников. У состояния, принадлежащего аттрактору, существует по крайней мере один предшественник – состояние, также принадлежащее аттрактору. Нужно показать, что у состояний аттрактора предшественник, который также принадлежит аттрактору, определяется множеством допустимых источников, состоящим из всех источников состояния. Допустим, что это не так, т.е. существует по крайней мере один источник у состояния $\theta(c)$, который также является источником у состояния c . Но по теореме 2 состояния, принадлежащие аттрактору, получают друг из друга путем циклического сдвига на одну компоненту, значит, такое могло получиться, если бы в c стояли два источника рядом, а этого не может быть.

Таким образом, если мы в аттракторе переориентируем все дуги состояний (ориентаций циклов) и дуги, идущие от каждого состояния аттрактора к другому состоянию этого же аттрактора, то получим также аттрактор динамической системы (B^n, θ) , $n > 2$.

Рассмотрим часть аттрактора

$$\cdots \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow \cdots$$

и состояния c'_1, c'_2, c'_3 , полученные путем переориентации всех дуг состояний (ориентаций циклов) c_1, c_2, c_3 , соответственно. Часть аттрактора, соответствующая данной части аттрактора при переориентации, будет иметь вид

$$\cdots \rightarrow c'_3 \rightarrow c'_2 \rightarrow c'_1 \rightarrow \cdots.$$

На языке двоичных векторов заключаем, что каждому аттрактору динамической системы (B^n, θ) , $n > 2$, взаимно однозначно соответствует аттрактор, полученный из него путем одновременной замены в его состояниях нулей на единицы, единиц на нули, и переориентации всех дуг между состояниями аттрактора на противоположные. Тем самым доказано утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Количество аттракторов в динамической системе (B^n, θ) , $n > 2$, при нечетном n будет четным, а при четном n – нечетным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При нечетном n система имеет только 0- и 1-аттракторы и утверждение следует прямо из теоремы 3. При четном n система имеет один 01-аттрактор и четную сумму 0- и 1-аттракторов (что следует из теоремы 3), в итоге получаем нечетное количество аттракторов.

4. Подсчет количества аттракторов в динамической системе. Для того чтобы перейти непосредственно к подсчету количества аттракторов в (B^n, θ) , $n > 2$, приведем понятие ожерелья и некоторые его частные случаи.

Под *ожерельем* длины n понимается класс эквивалентности двоичных строк размерности n , совпадающих при циклическом сдвиге.

Апериодическим ожерельем длины n называется класс эквивалентности, состоящий из n состояний, т.е. образуемый такими совпадающими при циклическом сдвиге состояниями, для которых выполняется следующее свойство: циклически сдвигая вектор на одну компоненту, мы возвращаемся в исходное состояние ровно через n шагов.

Двоичное аperiодическое состояние, которое является наименьшим в лексикографическом смысле среди всех состояний, образуемых из него циклическим сдвигом, называется *словом Линдона*. Получается, что каждое аperiодическое ожерелье содержит единственное слово Линдона, таким образом, это слово Линдона является представителем аperiодического ожерелья.

Ожерелья, в состав которых не входят определенные последовательности в качестве подстрок, известны как *ожерелья с запрещенными последовательностями*. Известно (см. [10], [11]), что количество аperiодических ожерелий длины n , в которых нет последовательности 00, исключая ожерелье “0” единичной длины, равно

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot (\text{Fib}(d-1) + \text{Fib}(d+1)), \quad (4.1)$$

где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса, $\text{Fib}(n)$ обозначает n -й элемент числовой последовательности Фибоначчи. Здесь *функция Мёбиуса* $\mu(n)$ определена для всех натуральных чисел n и принимает значения $-1, 0, 1$ в зависимости от характера разложения числа n на простые сомножители:

- $\mu(n) = 1$, если n свободно от квадратов (т.е. не делится на квадрат никакого простого числа) и разложение n на простые множители состоит из четного числа сомножителей;
- $\mu(n) = -1$, если n свободно от квадратов и разложение n на простые множители состоит из нечетного числа сомножителей;
- $\mu(n) = 0$, если n не свободно от квадратов.

По определению также полагают $\mu(1) = 1$.

Числа Фибоначчи – элементы числовой последовательности, в которой $\text{Fib}(0) = 0$, $\text{Fib}(1) = 1$, а далее $\text{Fib}(n) = \text{Fib}(n-2) + \text{Fib}(n-1)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть d – делитель числа n . Количество аттракторов длины d динамической системы (B^n, θ) , $n > 2$, равно

$$k(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } d = 2; \\ \frac{2}{d} \sum_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) \cdot (\text{Fib}(d'-1) + \text{Fib}(d'+1)), & \text{если } d \neq 2, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса, $\text{Fib}(n)$ обозначает n -й элемент числовой последовательности Фибоначчи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d – делитель числа n . Из теоремы 2 получаем, что фраза “аттрактор имеет длину d ” означает, что в состав аттрактора входят ровно d состояний, причем каждое из этих состояний в аттракторе получается путем циклического сдвига влево или вправо на одну компоненту из предыдущего состояния в этом аттракторе. Значит, вид аттрактора можно определить по одному из состояний, его образующих, и, не теряя общности, будем выбирать состояние, наименьшее в лексикографическом смысле. Рассмотрим аттракторы динамической системы (B^n, θ) , $n > 2$, в зависимости от их длины, в частности, какие именно состояния их образуют (см. доказательство теоремы 2 в [8]).

I. Длина аттрактора $d = 1$.

Это состояния вида 0^n и 1^n , которые при динамике переходят сами в себя, тем самым образуя аттракторы длины 1. Таким образом, количество аттракторов единичной длины динамической системы (B^n, θ) , $n > 2$, равно 2, т.е. $k(1) = 2$, что совпадает с формулой (4.2).

II. Длина аттрактора $d = 2$.

Аттракторы длины 2 образуют состояния вида $(10)^{n/2}$ и $(01)^{n/2}$, где n – четное, которые при динамике переходят друг в друга. Таким образом, существует единственный аттрактор длины 2 в динамической системе (B^n, θ) , $n > 2$, где n – четное, т.е. $k(2) = 1$, что совпадает с формулой (4.2).

III. Длина аттрактора равна d , где $2 < d \leq n$.

Из доказательства теоремы 2 (см. [8]) заключаем, что аттракторы такой длины образуют состояния, для которых $(p_c^0 = 0$ и $0 < p_c^1 < n)$ или $(0 < p_c^0 < n$ и $p_c^1 = 0)$.

Получается, что если состояние, образующее аттрактор длины d , циклически сдвинуть на d компонент, то получим опять это же состояние. Значит, данное состояние состоит из n/d одинаковых компонент (последовательностей из 0 и 1). Так как мы выбираем наименьшее в лексикографическом смысле из таких состояний, то получается, что компонента этого состояния является также лексикографически наименьшей из компонент других состояний, принадлежащих этому же аттрактору. Заметим, что эта компонента является апериодической. В результате получаем, что компонента состояния, образующего аттрактор, является словом Линдона длины d . Так как данные аттракторы образуют состояния, имеющие в своем составе только 0- и 1-блоки, то и в данной компоненте состояния, образующего аттрактор, будут присутствовать только 0- или только 1-блоки.

Используя формулу (4.1) и теорему 3 о взаимно однозначном соответствии между 0- и 1-аттракторами, получаем, что количество аттракторов длины d , где d является делителем числа n и $2 < d \leq n$, равно

$$k(d) = \frac{2}{d} \sum_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) \cdot (\text{Fib}(d' - 1) + \text{Fib}(d' + 1)). \quad (4.3)$$

Заметим, что при $d = 1$ значение k по формуле (4.3) будет равно

$$k(1) = 2 \cdot 1 \cdot (0 + 1) = 2.$$

ТЕОРЕМА 5. *Количество аттракторов в динамической системе (B^n, θ) , $n > 2$, равно*

$$\sum_{d|n} k(d),$$

где $k(d)$ есть (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 имеем, что длины аттракторов в динамической системе (B^n, θ) , $n > 2$, равны делителям числа n , а количество аттракторов соответствующей длины подсчитывается в теореме 4, таким образом, общее количество аттракторов в динамической системе (B^n, θ) есть

$$\sum_{d|n} k(d),$$

где $k(d)$ есть (4.2).

ТЕОРЕМА 6. *Общее количество состояний системы (B^n, θ) , $n > 2$, принадлежащих аттракторам, равно*

$$\sum_{d|n} d \cdot k(d),$$

где $k(d)$ есть (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 длины аттракторов в динамической системе (B^n, θ) , $n > 2$, равны делителям числа n , а из теоремы 4 имеем, что количество аттракторов длины d (т.е. в каждом таком аттракторе ровно d состояний) динамической системы (B^n, θ) , где $d | n$, равно $k(d)$, где $k(d)$ есть (4.2). Тогда получаем, что количество всех состояний, принадлежащих аттракторам динамической системы (B^n, θ) , есть

$$\sum_{d|n} d \cdot k(d).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Власова, *Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов*, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г..
- [2] В. Н. Салий, “Об одном классе конечных динамических систем”, *Вестн. Томск. гос. ун-та*, 2005, Приложение. Доклады IV Сибирской научной школы-семинара с международным участием “Проблемы компьютерной безопасности и криптография” – SIBECRYPT’05 (Томск, ТГУ, 6–9 сентября 2005 г.), № 14, 23–26.
- [3] V. C. Barbosa, *An Atlas of Edge-Reversal Dynamics*, Chapman Hall/CRC Res. Notes Math., **421**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [4] O. Colón-Reyes, R. Laubenbacher, B. Pareigis, “Boolean monomial dynamical systems”, *Ann. Comb.*, **8:4** (2004), 425–439.
- [5] *The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem*, ed. J. C. Lagarias, Amer. Math. Soc. Publ., Providence, RI, 2011.
- [6] D. R. Kaprekar, “An interesting property of the number 6174”, *Scripta Math.*, **15** (1955), 244–245.

- [7] А. В. Власова, *Аттракторы в динамических системах двоичных векторов*, Деп. в ВИНТИ 23.06.2010 № 392-В2010, Саратов. гос. ун-т, Саратов, 2010.
- [8] А. В. Власова, “Аттракторы динамических систем, ассоциированных с циклами”, *ПДМ*, 2011, № 2, 90–95.
- [9] А. В. Власова, “Ветвления в конечной динамической системе (B^n, θ) ”, *Научные исследования студентов Саратовского государственного университета*, Материалы итоговой студенческой научной конференции, Изд-во Саратов. гос. ун-та, Саратов, 2008, 57–58.
- [10] B.-S. Du, “A simple method which generates infinitely many congruence identities”, *Fibonacci Quart.*, **27**:2 (1989), 116–124.
- [11] *Sequence A006206*, Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей (дата обращения 30.03.2011), <http://oeis.org/A006206>.

А. В. Жаркова

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: VAnastasiyaV@gmail.com

Поступило

25.11.2011

Исправленный вариант

11.03.2013