Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лапин, Гомотопические свойства дифференциальных модулей Ли над искривленными коалгебрами и двойственность по Кошулю, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 354–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:42:20

Гомотопические свойства дифференциальных модулей Ли над искривленными коалгебрами и двойственность по Кошулю

С. В. Лапин

В работе введено понятие дифференциального модуля Ли над искривленной коалгеброй. Доказана гомотопическая инвариантность структуры дифференциального модуля Ли над искривленной коалгеброй. Установлена связь гомотопической теории дифференциальных модулей Ли над искривленными коалгебрами с теорией двойственности Кошуля для квадратично-скалярных алгебр над коммутативными унитарными кольцами.

Библиография: 10 названий

DOI: 10.4213/mzm9295

В работе [1] при помощи понятия B -конструкции искривленной дифференциальной алгебры была построена теория двойственности Кошуля для неоднородных квадратичных алгебр и, в частности, квадратично-скалярных алгебр над полями. Эта теория, если квадратичные алгебры рассматривать как неоднородные квадратичные алгебры, обобщает теорию двойственности Кошуля для квадратичных алгебр [2]. В работе [3] на идейной основе конструкций и результатов из [1] была развита теория двойственности Кошуля для неоднородных квадратичных операд над полями нулевой характеристики. Эта теория, если квадратичные операды рассматривать как неоднородные квадратичные операды, обобщает теорию двойственности Кошуля для заданных над полями нулевой характеристики квадратичных операд [4]. Главным достоинством развитой в [3] теории является то, что ее методы позволяют в случае поля нулевой характеристики строить гомотопически инвариантные структуры алгебр над операдами, отправляясь от алгебр над неоднородными квадратичными кошулевыми операдами. Однако в силу того, что областью применения методов из [3] являются неоднородные квадратичные кошулевы операды над полями нулевой характеристики, эти методы, вообще говоря, не применимы к построению над произвольными коммутативными кольцами гомотопически инвариантных структур алгебр над операдами, например, структуры дифференциальной E_∞ -алгебры.

С другой стороны, в работе [5] была разработана гомотопическая теория дифференциальных модулей Ли над коалгебрами, которая дает метод гомотопически инвариантного перенесения структуры дифференциального модуля над ко- B -конструкцией произвольной коалгебры. В частности, эта теория из [5] позволяет при помощи

функтора двойственности Кошуля строить гомотопически инвариантные структуры дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами, исходя из структуры дифференциального модуля над произвольной квадратичной алгеброй. При этом от квадратичной алгебры не требуется, чтобы она была кошулевой и, кроме того, не требуется, чтобы коммутативное кольцо, над которым задана эта квадратичная алгебра, было полем нулевой характеристики. Таким образом, гомотопическая теория дифференциальных модулей Ли над коалгебрами из [5], примененная к произвольным квадратичным алгебрам, является первым шагом к развитию теории двойственности Кошуля для любых квадратичных операд над произвольными коммутативными кольцами. В связи с этим возникает задача построения гомотопической теории дифференциальных модулей Ли над искривленными коалгебрами, которая обобщала бы гомотопическую теорию из [5]. Интерес к решению этой задачи вызван, главным образом, проблемой построения теории двойственности Кошуля для любых квадратично-скалярных операд над произвольными коммутативными кольцами. Кроме того, большой интерес к решению указанной выше задачи определяется еще возможностью применения гомотопической теории дифференциальных модулей Ли над искривленными коалгебрами к построению гомотопического аналога $\Delta_\infty^{\text{op}}$ для квадратично-скалярной крашенной алгебры симплициальных граней и вырождений Δ^{op} , лежащей в основе большинства конструкций алгебраической топологии (см., например, [6], [7]).

В данной работе введено понятие дифференциального модуля Ли над искривленной коалгеброй, которое обобщает введенное в работе [5] понятие дифференциального модуля Ли над коалгеброй. Установлены основные гомотопические и категорные свойства дифференциальных модулей Ли над искривленными коалгебрами. Рассмотрены применения гомотопической техники дифференциальных модулей Ли над искривленными коалгебрами к изучению гомотопических свойств дифференциальных модулей над ко- B -конструкциями искривленных коалгебр, двойственных по Кошулю к квадратично-скалярным алгебрам. При этом от квадратично-скалярных алгебр не требуется, чтобы они были кошулевыми, и, кроме того, не требуется, чтобы коммутативное кольцо, над которым эти алгебры заданы, было полем нулевой характеристики. Приведены примеры применения разработанных в данной работе гомотопических конструкций к построению над любым коммутативным кольцом с единицей гомотопически инвариантных аналогов структур дифференциального модуля над алгеброй Клиффорда и дифференциального модуля над внешней алгеброй. Гомотопическая теория для построенного в данной работе гомотопически инвариантного аналога структуры дифференциального модуля над внешней алгеброй обобщает гомотопическую теорию D_∞ -дифференциальных модулей [8], которая применялась в работах [9] и [10] к исследованию A_∞ -структур и E_∞ -структур в спектральных последовательностях расслоений.

Перейдем теперь к точным определениям и формулировкам. Все рассматриваемые в этой работе модули и отображения модулей являются, если не оговорены дополнительные требования, соответственно K -модулями и K -линейными отображениями модулей, где K – произвольное коммутативное кольцо с единицей.

1. Двойственные по Кошулю искривленные коалгебры к квадратично-скалярным алгебрам. Напомним сначала, что *дифференциальным градуированным модулем* или, для краткости, просто *дифференциальным модулем* (X, d) назы-

вается градуированный модуль $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, снабженный дифференциалом $d: X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$, который является отображением градуированных модулей степени (-1) , и для которого выполнено условие $d^2 = 0$. *Отображением дифференциальных модулей* $f: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ называется отображение градуированных модулей $f: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ степени 0, удовлетворяющее условию $df = fd$. *Гомотопией* $h: X \rightarrow Y$ между отображениями $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ дифференциальных модулей называется отображение градуированных модулей $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ степени 1, для которого выполнено условие $dh + hd = f - g$.

Пусть заданы отображения дифференциальных модулей $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана гомотопия $h: X \rightarrow X$ между отображениями дифференциальных модулей $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия $\eta h = 0$, $\xi h = 0$, $hh = 0$. Любая указанная выше тройка $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ называется *SDR-ситуацией дифференциальных модулей*.

Многочисленные примеры SDR-ситуаций дифференциальных модулей появляются при рассмотрении гомологий, заданных над полем дифференциальных модулей. Действительно, пусть $H(X) = \text{Ker } d / \text{Im } d$ – гомологический модуль любого заданного над полем дифференциального модуля (X, d) . Если градуированный модуль $H(X)$ рассмотреть как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом, то при помощи фиксированного разложения в прямую сумму $\text{Ker } d = H(X) \oplus \text{Im } d$ получим SDR-ситуацию $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$ дифференциальных модулей. Эту SDR-ситуацию дифференциальных модулей далее будем называть *гомологической SDR-ситуацией дифференциального модуля* (X, d) .

Тензорным произведением дифференциальных модулей (X, d) и (Y, d) называется дифференциальный модуль $(X \otimes Y, d)$, градуировка и дифференциал которого определяются следующими формулами:

$$(X \otimes Y)_n = \bigoplus_{p+q=n} X_p \otimes Y_q, \quad d(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d(y), \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Для любых дифференциальных модулей (X, d) и (Y, d) всегда определен дифференциальный модуль $(\text{Hom}(X; Y), d)$. Элементами модуля $\text{Hom}(X; Y)_n$, $n \in \mathbb{Z}$, являются произвольные отображения градуированных модулей $f: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$ степени n , и дифференциал $d: \text{Hom}(X; Y)_n \rightarrow \text{Hom}(X; Y)_{n-1}$ задается на элементах $f \in \text{Hom}(X; Y)_n$ следующей формулой:

$$d(f) = df + (-1)^{n+1} fd: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n-1}.$$

Дифференциальной алгеброй (A, d, π) называется дифференциальный модуль (A, d) , где $A = \{A_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, снабженный умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$, которое является отображением дифференциальных модулей и удовлетворяет условию ассоциативности $\pi(\pi \otimes 1) = \pi(1 \otimes \pi)$. *Отображением дифференциальных алгебр* называется отображение дифференциальных модулей $f: (A', d) \rightarrow (A'', d)$, для которого выполнено условие $\pi(f \otimes f) = f\pi$. В случае, когда $d = 0$, дифференциальная алгебра (A, d, π) обозначается (A, π) и называется *градуированной алгеброй*.

Примером дифференциальной алгебры является тройка $(\text{Hom}(X; X), d, \pi)$, где $(\text{Hom}(X; X), d)$ – рассмотренный выше дифференциальный модуль. Ассоциативное умножение $\pi: \text{Hom}(X; X) \otimes \text{Hom}(X; X) \rightarrow \text{Hom}(X; X)$ дифференциальной алгебры

$(\text{Hom}(X; X), d, \pi)$ определяется как композиция отображений. Единицей дифференциальной алгебры $(\text{Hom}(X, X), d, \pi)$ является тождественное отображение градуированного модуля X .

Градуированная алгебра A с единицей называется *квадратичной алгеброй*, если эта алгебра изоморфна градуированной фактор-алгебре $R = T(M)/(Q)$, где $T(M)$ – тензорная алгебра некоторого градуированного модуля $M = \{M_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, и (Q) – двусторонний идеал алгебры $T(M)$, порожденный некоторым подмодулем Q градуированного модуля $M \otimes M$.

Легко видеть, что для любой квадратичной алгебры $R = T(M)/(Q)$ композиция очевидных вложения $M \rightarrow T(M)$ и проекции $T(M) \rightarrow T(M)/(Q)$ является вложением $M \rightarrow R = T(M)/(Q)$ градуированных модулей. Далее, отождествляя образ этого вложения с модулем M , всегда будем считать, что M является подмодулем модуля R .

Градуированной коалгеброй (C, ∇) называется градуированный модуль $C = \{C_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, снабженный коумножением $\nabla: C \rightarrow C \otimes C$, которое является отображением градуированных модулей степени 0 и удовлетворяет условию ассоциативности $(\nabla \otimes 1)\nabla = (1 \otimes \nabla)\nabla$. Градуированная коалгебра (C, ∇) называется *связной*, если для этой коалгебры выполнено условие $C_0 = K$.

Коединицей градуированной коалгебры (C, ∇) называется отображение градуированных модулей $\varepsilon: C \rightarrow K$ степени 0, которое удовлетворяет условию $(1 \otimes \varepsilon)\nabla = 1 = (\varepsilon \otimes 1)\nabla$, где K рассматривается как градуированный модуль, сосредоточенный в размерности 0, и градуированные модули $C \otimes K$ и $K \otimes C$ стандартно отождествляются с градуированным модулем C .

Отображением градуированных коалгебр $f: (C', \nabla) \rightarrow (C'', \nabla)$ называется отображение градуированных модулей $f: C' \rightarrow C''$ степени 0, для которого выполнено условие $\nabla f = (f \otimes f)\nabla$. Коаугментацией градуированной коалгебры (C, ∇) называется отображение градуированных коалгебр $\nu: (K, \nabla) \rightarrow (C, \nabla)$, где $\nabla(1) = 1 \otimes 1$, $1 \in K$.

Легко видеть, что для любой градуированной коалгебры (C, ∇) с коединицей $\varepsilon: C \rightarrow K$ и коаугментацией имеет место разложение в прямую сумму градуированных модулей $C = K \oplus \bar{C}$, где $\bar{C} = \ker(\varepsilon)$. Также легко видеть, что коумножение градуированной коалгебры (C, ∇) с коединицей и коаугментацией определяет на градуированном подмодуле $\bar{C}$ коумножение $\bar{\nabla}: \bar{C} \rightarrow \bar{C} \otimes \bar{C}$, которое определяется формулой $\bar{\nabla}(c) = \nabla(c) - (1 \otimes c + c \otimes 1)$. Таким образом, для каждой градуированной коалгебры (C, ∇) с коединицей и коаугментацией всегда определена градуированная коалгебра $(\bar{C}, \bar{\nabla})$ без коединицы.

Градуированная алгебра (A, π) с единицей называется *квадратично-скалярной алгеброй* [1], если эта алгебра изоморфна градуированной фактор-алгебре $R = T(M)/(Q)$, где $T(M)$ – тензорная алгебра некоторого градуированного модуля $M = \{M_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, и (Q) – двусторонний идеал алгебры $T(M)$, порожденный некоторым подмодулем Q градуированного модуля $M^{\otimes 2} \oplus K$, который удовлетворяет условию $Q \cap K = 0$.

Для любой квадратично-скалярной алгебры $R = T(M)/(Q)$ определена соответствующая ей квадратичная алгебра $qR = T(M)/(p(Q))$, где $p: T(M) \rightarrow M^{\otimes 2}$ – очевидная проекция и $p(Q) = \text{Im}(p: Q \subset T(M) \rightarrow M^{\otimes 2})$. Кроме того, для каждой

квадратично-скалярной алгебры $R = T(M)/(Q)$ определено отображение градуированных модулей $\vartheta: p(Q) \rightarrow K$, задаваемое равенством $\vartheta(x) = k$, где $x \in p(Q)$, $k \in K$ и $x - k \in Q$ – единственный элемент, для которого $p(x - k) = x$. Другими словами, все соотношения в алгебре (R, π) , которые содержат скалярные слагаемые из K , имеют вид $x + \vartheta(x) = 0$, где $x \in p(Q)_0$.

Легко видеть, что если квадратично-скалярная алгебра $R = T(M)/(Q)$ является квадратичной алгеброй, то $qR = R$ и $\vartheta = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Искривленной градуированной коалгеброй (C, ∇, ϑ) или, для краткости, градуированной ϑ -коалгеброй, будем называть градуированную коалгебру (C, ∇) , для которой задано отображение $\vartheta: C_2 \rightarrow K$, называемое *искривлением коалгебры (C, ∇)* , которое для каждого элемента $c_n \in C_n$, $n \geq 2$, удовлетворяет условию*

$$\vartheta(c'_2)c''_{n-2} = c'_{n-2}\vartheta(c''_2),$$

где элементы $c'_2, c''_2 \in C_2$ и $c'_{n-2}, c''_{n-2} \in C_{n-2}$ определяются при помощи элемента c_n следующим равенством:

$$\nabla(c_n) = \cdots + c'_2 \otimes c''_{n-2} + \cdots + c'_{n-2} \otimes c''_2 + \cdots \in (C \otimes C)_n.$$

Под коединицей и коаугментацией искривленной градуированной коалгебры (C, ∇, ϑ) далее будем соответственно понимать коединицу и коаугментацию градуированной коалгебры (C, ∇) . Градуированную ϑ -коалгебру (C, ∇, ϑ) будем называть *связной*, если градуированная коалгебра (C, ∇) является связной.

Отметим, что введенное выше понятие искривленной градуированной коалгебры является двойственным к градуированному варианту понятия искривленной дифференциальной алгебры из работы [1].

Надстройкой над градуированным модулем X называется градуированный модуль SX , градуировка которого задается правилом $(SX)_{n+1} = X_n$. Если элементы в SX обозначать через $[x]$, где $x \in X$, то размерность элемента $[x]$ равна $n + 1$, если размерность элемента x равна n . Для любого подмодуля Y градуированного модуля $X \otimes X$ обозначим через $S^{\otimes 2}Y$ соответствующий модулю Y подмодуль в градуированном модуле $SX \otimes SX$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Двойственной по Кошулю искривленной коалгеброй к квадратично-скалярной алгебре $(R = T(M)/(Q), \pi)$ будем называть градуированную ϑ -коалгебру $(R^!, \nabla, \vartheta)$ с коединицей ε и коаугментацией ν , задаваемую следующими формулами:*

$$R^! = \bigoplus_{k \geq 0} (R^!)^{(k)}, \quad (R^!)^{(0)} = K, \quad (R^!)^{(1)} = SM,$$

$$(R^!)^{(k)} = \bigcap_{i+2+j=k} (SM)^{\otimes i} \otimes S^{\otimes 2}p(Q) \otimes (SM)^{\otimes j}, \quad k \geq 2, \quad i \geq 0, \quad j \geq 0,$$

$$\nabla(1) = 1 \otimes 1,$$

$$\nabla([x_1 \otimes \cdots \otimes x_k]) = 1 \otimes [x_1, \dots, x_k] + [x_1, \dots, x_k] \otimes 1 + \sum_{i=1}^{k-1} [x_1, \dots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \dots, x_k],$$

$$1 \in K, \quad [x_1, \dots, x_k] \in (R^!)^{(k)},$$

$$\vartheta: R^!_2 \rightarrow K, \quad \vartheta([x_1, x_2]) = \vartheta(x_1 \otimes x_2), \quad [x_1, x_2] \in (R^!)^{(2)}_2 = (S^{\otimes 2}p(Q))_2,$$

$$\begin{aligned}\vartheta([x]) &= 0, & [x] &\in (R^1)_2^{(1)} = (SM)_2, \\ \varepsilon(1) &= 1, & \varepsilon([x_1, \dots, x_k]) &= 0, \quad k \geq 1, & \nu(1) &= 1,\end{aligned}$$

где отображение $\vartheta: p(Q) \rightarrow K$, определяемое квадратично-скалярной алгеброй $R = T(M)/(Q)$, было рассмотрено выше.

Проверим выполнение условия $\vartheta(c'_2)c''_{n-2} = c'_{n-2}\vartheta(c''_2)$ из определения 1.1 для искривления $\vartheta: R^1_2 \rightarrow K$ коалгебры (R^1, ∇) . Очевидно, что для элементов вида $[x_1, x_2] \in (R^1)^{(2)}$ требуемое условие выполнено. Рассмотрим теперь произвольный элемент $[x_1, x_2, x_3] \in (R^1)^{(3)}$. Из определения $(R^1)^{(3)}$ получаем, что $x_1 \otimes x_2 \in p(Q)$ и $x_2 \otimes x_3 \in p(Q)$ и, следовательно, имеют место равенства $\pi(x_1 \otimes x_2) + \vartheta(x_1 \otimes x_2) = 0$, $\pi(x_2 \otimes x_3) + \vartheta(x_2 \otimes x_3) = 0$, поскольку эти равенства являются соотношениями в квадратично-скалярной алгебре (R, π) . Домножая первое равенство справа на x_3 , а второе равенство слева на x_1 , получим в алгебре (R, π) равенства

$$\begin{aligned}\pi(\pi(x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) + \pi(\vartheta(x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) &= 0, \\ \pi(x_1 \otimes \pi(x_2 \otimes x_3)) + \pi(x_1 \otimes \vartheta(x_2 \otimes x_3)) &= 0,\end{aligned}$$

из которых следует равенство $\pi(\vartheta(x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) = \pi(x_1 \otimes \vartheta(x_2 \otimes x_3))$ или, что эквивалентно, равенство $\vartheta(x_1 \otimes x_2)x_3 = x_1\vartheta(x_2 \otimes x_3)$. Так, если алгебра $R = T(M)/(Q)$ является квадратично-скалярной, то из последнего равенства в (R, π) следует равенство $\vartheta(x_1 \otimes x_2)x_3 = x_1\vartheta(x_2 \otimes x_3)$ в M или, что эквивалентно, равенство $\vartheta([x_1, x_2])[x_3] = [x_1]\vartheta([x_2, x_3])$ в $SM = (R^1)^{(1)}$. Таким образом, для произвольных элементов $[x_1, x_2, x_3] \in (R^1)^{(3)}$ требуемое условие выполнено. Пусть теперь задан любой элемент $[x_1, x_2, x_3, x_4] \in (R^1)^{(4)}$. Рассмотрим для этого элемента элементы $[x_1, x_2, x_3] \in (R^1)^{(3)}$ и $[x_2, x_3, x_4] \in (R^1)^{(3)}$. Проводя для них рассуждения, аналогичные сделанным выше, получаем в $SM = (R^1)^{(1)}$ равенства $\vartheta([x_1, x_2])[x_3] = [x_1]\vartheta([x_2, x_3])$ и $\vartheta([x_2, x_3])[x_4] = [x_2]\vartheta([x_3, x_4])$. Домножая тензорно первое равенство справа на $[x_4] \in SM$, а второе равенство слева на $[x_1] \in SM$, получим в $(SM)^{\otimes 2}$ равенства

$$\begin{aligned}\vartheta([x_1, x_2])[x_3] \otimes [x_4] &= [x_1]\vartheta([x_2, x_3]) \otimes [x_4], \\ [x_1] \otimes \vartheta([x_2, x_3])[x_4] &= [x_1] \otimes [x_2]\vartheta([x_3, x_4]),\end{aligned}$$

из которых следует равенство $\vartheta([x_1, x_2])[x_3, x_4] = [x_1, x_2]\vartheta([x_3, x_4])$ в $(R^1)^{(2)}$. Таким образом, для произвольных элементов $[x_1, x_2, x_3, x_4] \in (R^1)^{(4)}$ требуемое условие выполнено. Продолжая по индукции указанный выше процесс рассмотрения произвольных элементов $[x_1, \dots, x_n] \in (R^1)^{(n)}$, $n \geq 5$, получим, что для любых элементов коалгебры (R^1, ∇) требуемое условие выполнено.

Введем теперь понятие ко- B -конструкции для искривленной градуированной коалгебры с коединицей и коаугментацией, которое является двойственным к градуированному варианту понятия B -конструкции для искривленной дифференциальной алгебры из работы [1].

Денадстройкой над градуированным модулем X называется градуированный модуль $S^{-1}X$, для которого $(S^{-1}X)_{n-1} = X_n$. Элементы в $S^{-1}X$ традиционно обозначаются через $[x]$, где $x \in X$, и имеют размерность $n-1$, если размерность элемента x равна n .

Пусть задана любая градуированная ϑ -коалгебра (C, ∇, ϑ) с коединицей и коаугментацией. Кроме того, пусть $(\bar{C}, \bar{\nabla})$ – градуированная коалгебра без коединицы,

определяемая градуированной коалгеброй (C, ∇) , и $\tilde{\vartheta}: C_{\bullet} \rightarrow K_{\bullet-2}$ – отображение градуированных модулей степени (-2) , задаваемое правилом

$$\tilde{\vartheta}(c) = \begin{cases} \vartheta(c), & c \in C_2, \\ 0, & c \in C_n, \quad n \neq 2, \end{cases}$$

где основное кольцо K рассматривается как градуированный модуль $K_{\bullet} = \{K_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $K_0 = K$, $K_n = 0$, $n \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Под *ко-В-конструкцией* для искривленной градуированной коалгебры (C, ∇, ϑ) понимается дифференциальная алгебра $(F(C, \vartheta), d, \pi)$, которая задается следующими формулами:

$$F(C, \vartheta) = \bigoplus_{k \geq 0} (S^{-1}\overline{C})^{\otimes k}, \quad (S^{-1}\overline{C})^{\otimes 0} = K, \quad d = d_1 + d_2,$$

$$d_1([c_1, \dots, c_k]) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+\mu_{i-1}+p'_i} [c_1, \dots, c_{i-1}, \overline{\nabla}(c_i), c_{i+1}, \dots, c_k],$$

$$\overline{\nabla}(c_i) = \sum_{(c_i)} c'_i \otimes c''_i \quad (\text{обозначение Свидлера}),$$

$$d_2([c_1, \dots, c_k]) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1+\mu_{i-1}} \tilde{\vartheta}(c_i) [c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_k],$$

$$\pi([c_1, \dots, c_q] \otimes [c_{q+1}, \dots, c_k]) = [c_1, \dots, c_q, c_{q+1}, \dots, c_k],$$

где $[c_1, \dots, c_k] = [c_1] \otimes \dots \otimes [c_k]$, $\mu_{i-1} = p_1 + \dots + p_{i-1}$, p_i – размерность элемента $c_i \in \overline{C}$, $1 \leq i \leq k$, p'_i – размерность элемента $c'_i \in \overline{C}$ и

$$[c_1, \dots, c_{i-1}, \overline{\nabla}(c_i), c_{i+1}, \dots, c_k] = \sum_{(c_i)} [c_1, \dots, c'_i, c''_i, \dots, c_k].$$

Легко видеть, что в случае, когда искривление ϑ равно нулю, определение ко-В-конструкции для искривленной градуированной коалгебры становится обычным определением ко-В-конструкции для градуированной коалгебры.

Рассмотрим теперь для любой градуированной ϑ -коалгебры (C, ∇, ϑ) и произвольной дифференциальной алгебры (A, d, π) с единицей указанное выше отображение $\tilde{\vartheta}: C_{\bullet} \rightarrow K_{\bullet-2}$ как отображение $\tilde{\vartheta}: C_{\bullet} \rightarrow K_{\bullet-2} \subset A_{\bullet-2}$, задаваемое следующим правилом:

$$\tilde{\vartheta}(c) = \begin{cases} \vartheta(c) \in K \subset A_0, & c \in C_2, \\ 0 \in A_{n-2}, & c \in C_n, \quad n \neq 2. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Искривленной скрещивающей коцепью* или более кратко *скрещивающей ϑ -коцепью* из градуированной ϑ -коалгебры (C, ∇, ϑ) в дифференциальную алгебру (A, d, π) с единицей называется отображение градуированных модулей $\varphi: C_{\bullet} \rightarrow A_{\bullet-1}$ степени (-1) , для которого выполнено условие скрещивающей ϑ -коцепи

$$d\varphi + \varphi \cup \varphi + \tilde{\vartheta} = 0,$$

где отображение $\varphi \cup \varphi: C_{\bullet} \rightarrow A_{\bullet-2}$ определяется формулой $\varphi \cup \varphi = \pi(\varphi \otimes \varphi)\nabla$.

Легко видеть, что в случае, когда искривление ϑ равно нулю, определение искривленной скрещивающей коцепи становится обычным определением скрещивающей коцепи.

Простейшим примером скрещивающей ϑ -коцепи из произвольной градуированной ϑ -коалгебры (C, ∇, ϑ) в дифференциальную алгебру $(F(C, \vartheta), d, \pi)$ является отображение $\varphi^F: C_\bullet \rightarrow F(C, \vartheta)_{\bullet-1}$, $\varphi^F(c) = [c]$, $c \in C$.

Без труда проверяется, что для каждой искривленной скрещивающей коцепи $\varphi: C_\bullet \rightarrow A_{\bullet-1}$ из градуированной ϑ -коалгебры (C, ∇, ϑ) с коединицей и коаугментацией в дифференциальную алгебру (A, d, π) определено отображение дифференциальных алгебр $F(\varphi): (F(C, \vartheta), d, \pi) \rightarrow (A, d, \pi)$, задаваемое на образующих $[c_1, \dots, c_k]$ градуированного модуля $F(C, \vartheta)$ следующей формулой:

$$F(\varphi)([c_1, \dots, c_k]) = \pi^{(k)}(\varphi(c_1) \otimes \dots \otimes \varphi(c_k)),$$

где $\pi^{(1)}$ – тождественное отображение алгебры A и $\pi^{(k)} = \pi(1 \otimes \pi^{(k-1)})$, $k \geq 2$, – итерированное умножение алгебры A .

Заметим теперь, что для любой квадратично-скалярной алгебры (R, π) имеется скрещивающая ϑ -коцепь $\varphi_\vartheta^!: R_\bullet^! \rightarrow R_{\bullet-1}$, определяемая следующим правилом:

$$\varphi_\vartheta^!([x_1, \dots, x_k]) = \begin{cases} x_1, & \text{если } k = 1, \\ 0, & \text{если } k > 0, \end{cases}$$

где $(R^!, \nabla, \vartheta)$ – двойственная по Кошулю ϑ -коалгебра к квадратично-скалярной алгебре (R, π) . Из этого следует, что для каждой квадратично-скалярной алгебры (R, π) определено, как было сказано выше, отображение дифференциальных алгебр

$$F(\varphi_\vartheta^!): (F(R^!, \vartheta), d, \pi) \rightarrow (R, d = 0, \pi),$$

позволяющее рассматривать любой дифференциальный R -модуль как дифференциальный $F(R^!, \vartheta)$ -модуль.

В заключение пункта стоит отметить, что для кошулевых [1] квадратично-скалярных алгебр (R, π) можно при помощи спектральной последовательности бикомплекса для ко- B -конструкции $(F(R^!, \vartheta))$ показать, что указанное выше отображение дифференциальных алгебр $F(\varphi_\vartheta^!): (F(R^!, \vartheta), d, \pi) \rightarrow (R, d = 0, \pi)$ является квази-изоморфизмом, т.е. индуцирует изоморфизм модулей гомотопий. Доказательство этого утверждения здесь проводить не будем, поскольку условие быть квази-изоморфизмом для отображения $F(\varphi_\vartheta^!)$ в этой работе далее нигде не потребуется.

2. Гомотопические свойства дифференциальных модулей Ли над искривленными коалгебрами. Напомним сначала, что *левым дифференциальным модулем* (X, d, μ) над дифференциальной алгеброй (A, d, π) или, более кратко, *дифференциальным A -модулем* называется дифференциальный модуль (X, d) , снабженный левым действием $\mu: A \otimes X \rightarrow X$, которое является отображением дифференциальных модулей и удовлетворяет условию $\mu(\pi \otimes 1) = \mu(1 \otimes \mu)$.

Легко видеть, что если для любого дифференциального модуля (X, d) рассмотреть соответствующую ему дифференциальную алгебру $(\text{Hom}(X; X), d, \pi)$, то введение на (X, d) структуры дифференциального модуля (X, d, μ) над дифференциальной алгеброй (A, π) эквивалентно заданию некоторого отображения дифференциальных алгебр $\check{\mu}: (A, d, \pi) \rightarrow (\text{Hom}(X; X), d, \pi)$. В самом деле, μ и $\check{\mu}$ однозначно определяют друг друга по формуле $(\check{\mu}(a))(x) = \mu(a \otimes x)$.

Пусть теперь заданы любые дифференциальные модули (X, d) , (Y, d) и градуированная коалгебра (C, ∇) . Рассмотрим соответствующий дифференциальным модулям $(C \otimes X, 1 \otimes d)$, (Y, d) дифференциальный модуль $(\text{Hom}(C \otimes X; Y), d)$ и определим для произвольных дифференциальных модулей (X, d) , (Y, d) и (Z, d) отображение градуированных модулей

$$\cup: (\text{Hom}(C \otimes Y; Z) \otimes \text{Hom}(C \otimes X; Y))_{\bullet} \rightarrow \text{Hom}(C \otimes X; Z)_{\bullet},$$

полагая $f \cup g = f(1 \otimes g)(\nabla \otimes 1)$, где $f \in \text{Hom}(C \otimes Y; Z)$, $g \in \text{Hom}(C \otimes X; Y)$. Легко проверяется, что $\cup$ является отображением дифференциальных модулей и обладает свойством ассоциативности, т.е. имеют место следующие равенства:

$$d(f \cup g) = d(f) \cup g + (-1)^{\deg(f)} f \cup d(g), \quad (f \cup g) \cup l = f \cup (g \cup l).$$

Для описания гомотопических свойств дифференциальных $F(R^!, \vartheta)$ -модулей введем понятие дифференциального модуля Ли над искривленной градуированной коалгеброй, которое обобщает соответствующее понятие из гомотопической теории дифференциальных модулей Ли над градуированными коалгебрами [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Дифференциальным модулем Ли (X, d, ψ) над искривленной градуированной коалгеброй (C, ∇, ϑ) с коаугментацией $\nu: K \rightarrow C$ и коединицей или, более кратко, дифференциальным (C, ϑ) -модулем Ли будем называть произвольный дифференциальный модуль (X, d) , рассматриваемый вместе с отображением $\psi: (C \otimes X)_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet-1}$, для которого выполнены следующие условия:*

$$d(\psi) + \psi \cup \psi + \widehat{\vartheta} = 0, \quad \psi(\nu \otimes 1) = 0,$$

где $\widehat{\vartheta}$ определяются формулой $\widehat{\vartheta} = \widetilde{\vartheta} \otimes 1: (C \otimes X)_{\bullet} \rightarrow (K \otimes X)_{\bullet-2} = X_{\bullet-2}$.

Отметим, что в случае, когда $\vartheta = 0$, данное выше определение дифференциального модуля Ли над градуированной ϑ -коалгеброй (C, ∇, ϑ) становится определением дифференциального модуля Ли над градуированной коалгеброй (C, ∇) из работы [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Морфизмом $f = (f', f''): (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли будем называть пару отображений $f': X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ и $f'': (C \otimes X)_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$, где f' является отображением дифференциальных модулей, и f'' удовлетворяет следующим условиям:*

$$d(f'') - f'' \cup \psi + \psi \cup f'' - f' \psi + \psi(1 \otimes f') = 0, \quad f''(\nu \otimes 1) = 0.$$

Отметим, что следствием условия $d(f'') - f'' \cup \psi + \psi \cup f'' - f' \psi + \psi(1 \otimes f') = 0$ из определения морфизма дифференциальных (C, ϑ) -модулей является равенство

$$f'' \cup \widehat{\vartheta} - \widehat{\vartheta} \cup f'' = \widehat{\vartheta}(1 \otimes f') - f' \widehat{\vartheta}.$$

Композиция $gf: X \rightarrow Z$ морфизмов дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $f = (f', f''): (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ и $g = (g', g''): (Y, d, \psi) \rightarrow (Z, d, \psi)$ определяется следующей формулой:

$$gf = (g', g'')(f', f'') = (g' f', g'' \cup f'' + g''(1 \otimes f') + g' f'').$$

Ясно, что операция композиции морфизмов дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли ассоциативна, и что для каждого дифференциального (C, ϑ) -модуля Ли (X, d, ψ) имеется тождественный морфизм $1_X = (1'_X, 1''_X): (X, d, \psi) \rightarrow (X, d, \psi)$, где $1'_X = \text{id}_X$ – тождественное отображение модуля X и $1''_X = 0$. Таким образом, класс всех дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли над любым коммутативным кольцом K с единицей и их морфизмов является категорией, которую обозначим через $L(C, \vartheta)(K)$.

Рассмотрим вопрос о характеристизации изоморфизма $f: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ категории $L(C, \vartheta)(K)$ в терминах его компоненты $f': (X, d) \rightarrow (Y, d)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть задан морфизм $f = (f', f''): (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ категории $L(C, \vartheta)(K)$, где градуированная ϑ -коалгебра (C, ∇, ϑ) является связной, и пусть $f': (X, d) \rightarrow (Y, d)$ – изоморфизм дифференциальных модулей. Тогда морфизм $f = (f', f'')$ является изоморфизмом категории $L(C, \vartheta)(K)$, для которого обратный изоморфизм $g = (g', g''): (Y, d, \mu) \rightarrow (X, d, \mu)$ категории $L(C, \vartheta)(K)$ определяется следующими формулами:

$$g' = (f')^{-1}, \quad g'' = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \underbrace{((g' f'') \cup \dots \cup (g' f''))}_n (1 \otimes g').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что формула для g'' действительно определяет отображение. В самом деле, так как ϑ -коалгебра (C, ∇, ϑ) связная и имеет место равенство $\psi(\nu \otimes 1) = 0$, правая часть формулы для g'' , вычисленная на любом элементе, содержит лишь конечное число отличных от нуля слагаемых. Проверим теперь справедливость равенства $(g', g'')(f', f'') = (\text{id}_X, 0)$. Очевидно, что $g' f' = \text{id}_X$. Для отображения $g'' \cup f'' + g''(1 \otimes f') + g' f''$, пользуясь обозначением $(g' f'')^{\cup k} = (g' f'') \cup \dots \cup (g' f'')$ (k сомножителей), получаем

$$\begin{aligned} & g'' \cup f'' + g''(1 \otimes f') + g' f'' \\ &= \sum_{n \geq 1} (-1)^n (g' f'')^{\cup n} (1 \otimes g') (1 \otimes f'') (\nabla \otimes 1) \\ & \quad + \sum_{n \geq 1} (-1)^n (g' f'')^{\cup n} (1 \otimes g') (1 \otimes f') + g' f'' \\ &= \sum_{n \geq 1} (-1)^n (g' f'')^{\cup (n+1)} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n (g' f'')^{\cup n} + g' f'' = -g' f'' + g' f'' = 0. \end{aligned}$$

Равенство $(f', f'')(g', g'') = (\text{id}_Y, 0)$ проверяется аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Гомотопией $h = (h', h''): (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ между морфизмами дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $f = (f', f''): (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ и $g = (g', g''): (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ назовем пару отображений $h': X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ и $h'': (C \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$, где h' является гомотопией между отображениями дифференциальных модулей f' и g' , а h'' удовлетворяет следующим условиям:

$$d(h'') + h'' \cup \psi + \psi \cup h'' + h' \psi + \psi(1 \otimes h') = f'' - g'', \quad h''(\nu \otimes 1) = 0.$$

Отметим, что из условия $d(h'') + h'' \cup \psi + \psi \cup h'' + h' \psi + \psi(1 \otimes h') = f'' - g''$, указанного в определении гомотопии между морфизмами дифференциальных (C, ϑ) -модулей, следует справедливость равенства

$$h'' \cup \hat{\vartheta} - \hat{\vartheta} \cup h'' + h' \hat{\vartheta} - \hat{\vartheta}(1 \otimes h') = \psi \cup (f'' - g'') - (f'' - g'') \cup \psi.$$

Пусть заданы произвольные морфизмы $\eta: (X, d, \psi) \rightrightarrows (Y, d, \psi) : \xi$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и пусть задана гомотопия $h: (X, d, \psi) \rightarrow (X, d, \psi)$ между морфизмами дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия

$$\begin{aligned}\eta h &= (\eta', \eta'')(h', h'') = (\eta' h', \eta'' \cup h'' + \eta''(1 \otimes h') + \eta' h'') = (0, 0), \\ h\xi &= (h', h'')(\xi', \xi'') = (h' \xi', h'' \cup \xi'' + h''(1 \otimes \xi') + h' \xi'') = (0, 0), \\ hh &= (h', h'')(h', h'') = (h' h', h'' \cup h'' + h''(1 \otimes h') + h' h'') = (0, 0).\end{aligned}$$

Каждую указанную выше тройку $(\eta: (X, d, \psi) \rightrightarrows (Y, d, \psi) : \xi, h)$ будем называть SDR-ситуацией дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли.

В следующем утверждении устанавливается гомотопическая инвариантность структуры дифференциального модуля Ли над искривленной градуированной коалгеброй при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных модулей.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть задан любой дифференциальный модуль Ли (X, d, ψ) над связной градуированной ϑ -коалгеброй (C, ∇, ϑ) с коединицей и коаугментацией. Кроме того, пусть задана произвольная SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta: (X, d) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$. Тогда на дифференциальном модуле (Y, d) имеется структура дифференциального (C, ϑ) -модуля Ли $(Y, d, \bar{\psi})$, которая задается формулой

$$\bar{\psi} = \eta \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes \xi). \quad (2.1)$$

Более того, определена SDR-ситуация $(\bar{\eta}: (X, d, \psi) \rightrightarrows (Y, d, \bar{\psi}) : \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли, определяемая следующими формулами:

$$\bar{\xi}' = \xi, \quad \bar{\xi}'' = h \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes \xi), \quad (2.2)$$

$$\bar{\eta}' = \eta, \quad \bar{\eta}'' = \eta \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes h), \quad (2.3)$$

$$\bar{h}' = h, \quad \bar{h}'' = h \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes h). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что формула (2.1) действительно определяет отображение. В самом деле, так как ϑ -коалгебра (C, ∇, ϑ) связная и имеет место равенство $\psi(\nu \otimes 1) = 0$, правая часть равенства (2.1), вычисленная на произвольном элементе, всегда содержит лишь конечное число отличных от нуля слагаемых. Аналогичные рассуждения справедливы и для формул (2.2)–(2.4). Покажем теперь, что для отображения $\bar{\psi}$ выполнено соотношение $d(\bar{\psi}) + \bar{\psi} \cup \bar{\psi} + \bar{\vartheta} = 0$. Пользуясь, для краткости, обозначением $(h\psi)^{\cup k} = (h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)$ (k сомножителей), получаем

$$\begin{aligned}d(\bar{\psi}) &= \eta \left(\sum_{n \geq 0} d(\psi) \cup (h\psi)^{\cup n} \right) (1 \otimes \xi) \\ &\quad - \eta \left(\sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n \psi \cup (h\psi)^{\cup(i-1)} \cup (d(h\psi)) \cup (h\psi)^{\cup(n-i)} \right) (1 \otimes \xi).\end{aligned}$$

Так как $d(\psi) = -\psi \cup \psi - \widehat{\vartheta}$, $d(h) = \xi\eta - 1$ и $d(h\psi) = d(h)\psi - hd(\psi)$, имеем равенство

$$d(h\psi) = \xi\eta\psi - \psi + h(\psi \cup \psi) + h\widehat{\vartheta}.$$

При помощи этого равенства, а также пользуясь формулами

$$\begin{aligned} h(\psi \cup \psi) &= (h\psi) \cup \psi, & \psi \cup (\xi\eta\psi) &= (\psi(1 \otimes \xi)) \cup (\eta\psi), \\ (h\psi) \cup (\xi\eta\psi) &= ((h\psi)(1 \otimes \xi)) \cup (\eta\psi), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} d(\overline{\psi}) &= -\overline{\psi} \cup \overline{\psi} - \eta \left(\sum_{n \geq 0} \widehat{\vartheta} \cup (h\psi)^{\cup n} \right) (1 \otimes \xi) \\ &\quad - \eta \left(\sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n \psi \cup (h\psi)^{\cup(i-1)} \cup (h\widehat{\vartheta}) \cup (h\psi)^{\cup(n-i)} \right) (1 \otimes \xi). \end{aligned}$$

Так как $\widehat{\vartheta} = \widetilde{\vartheta} \otimes 1$, справедливо равенство $h\widehat{\vartheta} \cup h\psi = (h\widehat{\vartheta}(1 \otimes h)) \cup \psi = 0$, поскольку

$$h\widehat{\vartheta}(1 \otimes h) = (1_K \otimes h)(\widetilde{\vartheta} \otimes 1)(1 \otimes h) = hh\widehat{\vartheta} = 0.$$

Кроме того, имеют место равенства $h\widehat{\vartheta}(1 \otimes \xi) = h\xi\widehat{\vartheta} = 0$ и

$$\eta(\widehat{\vartheta} \cup (h\psi)) = (\eta\widehat{\vartheta}(1 \otimes h)) \cup \psi = (\eta h\widehat{\vartheta}) \cup \psi = 0.$$

Из этого получаем требуемое соотношение $d(\overline{\psi}) + \overline{\psi} \cup \overline{\psi} + \widehat{\vartheta} = 0$, поскольку справедливо равенство $\eta\widehat{\vartheta}(1 \otimes \xi) = \eta\xi\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}$. Легко видеть, что для $\overline{\psi}$ выполнено соотношение $\overline{\psi}(\nu \otimes 1) = 0$. Действительно, из равенства $\psi(\nu \otimes 1) = 0$ следует равенство $(h\psi)(1 \otimes \xi)(\nu \otimes 1) = h\psi(\nu \otimes 1)(1 \otimes \xi) = 0$, при помощи которого получаем искомое соотношение $\overline{\psi}(\nu \otimes 1) = 0$. Аналогично проверяется, что для морфизмов ξ , $\bar{\eta}$ и гомотопии $\bar{h}$ выполнены требуемые соотношения, и имеет место SDR-ситуация $(\bar{\eta}: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \overline{\psi}) : \xi, \bar{h})$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли.

Покажем теперь, что гомотопические свойства произвольного морфизма дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $f = (f', f'') : (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ полностью определяются гомотопическими свойствами его компоненты $f' : (X, d) \rightarrow (Y, d)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть (C, ∇, ϑ) – любая связная градуированная ϑ -коалгебра с коединицей и коаугментацией. Морфизм $f = (f', f'') : (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли определяет SDR-ситуацию дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $(f : (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \psi) : g, s)$ тогда и только тогда, когда отображение дифференциальных модулей $f' : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ определяет SDR-ситуацию дифференциальных модулей $(f' : (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : g', s')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если имеется SDR-ситуация дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $(f : (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \psi) : g, s)$, то определена и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(f' : (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : g', s')$. Пусть теперь заданы морфизм дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $f = (f', f'') : (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(f' : (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : g', s')$. По формулам (2.1)–(2.4) определим SDR-ситуацию $(\bar{\eta} : (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \overline{\psi}) : \xi, \bar{h})$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли, где $\bar{\eta}' = f'$, $\bar{\xi}' = g'$, $\bar{h}' = s'$. Рассмотрим морфизм диф-

ференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $\gamma = f\bar{\xi}: (Y, d, \bar{\psi}) \rightarrow (Y, d, \psi)$. Так как $\gamma' = f'\bar{\xi}' = f'g' = 1_Y$, то из предложения 2.1 следует, что морфизм γ является изоморфизмом дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли. Обозначим через $\zeta: (Y, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \bar{\psi})$ обратный изоморфизм дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли к изоморфизму γ . Если рассмотреть теперь морфизм дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $g = \bar{\xi}\zeta: (Y, d, \psi) \rightarrow (X, d, \psi)$ и положить $s = (1_X - gf)\bar{h}$, то прямые вычисления показывают, что определена SDR-ситуация дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $(f: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \psi) : g, s)$, которая и является искомой.

Следующее утверждение устанавливает единственность структуры дифференциального (C, ϑ) -модуля Ли $(Y, d, \bar{\psi})$, которая была определена в теореме 2.1 на дифференциальном модуле (Y, d) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Введенная в теореме 2.1 структура дифференциального (C, ϑ) -модуля Ли $(Y, d, \bar{\psi})$ на дифференциальном модуле (Y, d) определена однозначно с точностью до изоморфизма дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана произвольная SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$, и пусть $(\bar{\eta}: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \bar{\psi}) : \bar{\xi}, \bar{h})$ – SDR-ситуация дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли из теоремы 2.1. Кроме того, пусть задана еще одна SDR-ситуация $(\tilde{\eta}: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \tilde{\psi}) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли, для которой выполнены условия $\tilde{\eta}' = \eta$, $\tilde{\xi}' = \xi$ и $\tilde{h}' = h$. Из предложения 2.1 следует, что морфизм дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $\tilde{\eta}\tilde{\xi}: (Y, d, \tilde{\psi}) \rightarrow (Y, d, \bar{\psi})$ является изоморфизмом дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли, поскольку выполнено условие $\tilde{\eta}'\tilde{\xi}' = \eta\xi = 1_Y$.

3. Гомотопические свойства дифференциальных $F(R^!, \vartheta)$ -модулей для квадратично-скалярных алгебр (R, π) и дифференциальные модули над алгебрами Клиффорда. Рассмотрим сначала гомотопические свойства дифференциальных $F(R^!, \vartheta)$ -модулей, где $(R^!, \nabla, \vartheta)$ – двойственная по Кошулю ϑ -коалгебра к произвольной квадратично-скалярной алгебре (R, π) .

Легко видеть, что задание на произвольном дифференциальном модуле (X, d) структуры дифференциального $F(R^!, \vartheta)$ -модуля (X, d, μ) эквивалентно заданию на (X, d) структуры дифференциального $(R^!, \vartheta)$ -модуля Ли (X, d, ψ) . Действительно, если задан дифференциальный $F(R^!, \vartheta)$ -модуль (X, d, μ) , то определен дифференциальный $(R^!, \vartheta)$ -модуль Ли (X, d, ψ_μ) со структурным отображением

$$\psi_\mu = \mu(\varphi^F \otimes 1): (R^! \otimes X)_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}.$$

Обратно, если задан дифференциальный $(R^!, \vartheta)$ -модуль Ли (X, d, ψ) , то его структурное отображение $\psi: (R^! \otimes X)_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$ определяет скрепляющую ϑ -коцепь $\tilde{\psi}: R^!_\bullet \rightarrow \text{Hom}(X; X)_{\bullet-1}$. Эта скрепляющая ϑ -коцепь индуцирует отображение дифференциальных алгебр $\tilde{\mu}_\psi = F(\tilde{\psi}): F(R^!, \vartheta) \rightarrow \text{Hom}(X; X)$, которое, как было сказано выше, определяет структурное отображение $\mu_\psi: F(R^!, \vartheta) \otimes X \rightarrow X$ дифференциального $F(R^!, \vartheta)$ -модуля (X, d, μ_ψ) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Для произвольной квадратично-скалярной алгебры (R, π) под $F(R^!, \vartheta)$ -отображением $f: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ дифференциальных $F(R^!, \vartheta)$ -модулей будем понимать морфизм $f: (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$ соответствующих дифференциальных $(R^!, \vartheta)$ -модулей Ли.

Таким образом, $F(R^1, \vartheta)$ -отображением $f: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей, где (R, π) – произвольная квадратично-скалярная алгебра, является пара отображений $f = (f', f'')$, где $f': X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ – отображение дифференциальных модулей и $f'': (R^1 \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ – отображение, для которого выполнены условия

$$d(f'') - f'' \cup \psi_\mu + \psi_\mu \cup f'' - f' \psi_\mu + \psi_\mu(1 \otimes f') = 0, \quad f''(\nu \otimes 1) = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Для произвольной квадратично-скалярной алгебры (R, π) под $F(R^1, \vartheta)$ -гомотопией $h: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ между данными $F(R^1, \vartheta)$ -отображениями $f, g: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей будем понимать гомотопию $h: (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$ между морфизмами соответствующих дифференциальных (R^1, ϑ) -модулей Ли $f, g: (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$.

Итак, $F(R^1, \vartheta)$ -гомотопией $h: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ между заданными $F(R^1, \vartheta)$ -отображениями $f = (f', f''), g = (g', g''): (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей является пара отображений $h = (h', h'')$, где $h': X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ – гомотопия между отображениями дифференциальных модулей $f', g': X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ и $h'': (R^1 \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ – отображение, для которого выполнены условия

$$d(h'') + h'' \cup \psi_\mu + \psi_\mu \cup h'' + h' \psi_\mu + \psi_\mu(1 \otimes h') = f'' - g'', \quad h''(\nu \otimes 1) = 0.$$

Пусть для квадратично-скалярной алгебры (R, π) заданы $F(R^1, \vartheta)$ -отображения $\eta: (X, d, \mu) \rightleftharpoons (Y, d, \mu) : \xi$ дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей, которые удовлетворяют условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана $F(R^1, \vartheta)$ -гомотопия $h: (X, d, \mu) \rightarrow (X, d, \mu)$ между $F(R^1, \vartheta)$ -отображениями дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия $\eta h = 0, \xi h = 0, hh = 0$. Каждую указанную выше тройку $(\eta: (X, d, \mu) \rightleftharpoons (Y, d, \mu) : \xi, h)$ будем называть $F(R^1, \vartheta)$ -SDR-ситуацией дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей.

Следующее утверждение, являющееся следствием теоремы 2.1, устанавливает $F(R^1, \vartheta)$ -гомотопическую инвариантность структуры дифференциального $F(R^1, \vartheta)$ -модуля при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных модулей.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть задан произвольный дифференциальный $F(R^1, \vartheta)$ -модуль (X, d, μ) , где (R^1, ∇, ϑ) – двойственная по Кошулю ϑ -коалгебра к квадратично-скалярной алгебре (R, π) , и задана любая SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда на дифференциальном модуле (Y, d) имеется структура дифференциального $F(R^1, \vartheta)$ -модуля $(Y, d, \mu_{\overline{\psi}})$, которая задается при помощи формулы (2.1). Более того, определена $F(R^1, \vartheta)$ -SDR-ситуация дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей $(\overline{\eta}: (X, d, \mu) \rightleftharpoons (Y, d, \mu_{\overline{\psi}}) : \overline{\xi}, \overline{h})$, задаваемая при помощи формул (2.2)–(2.4).

Так как для каждого заданного над полем дифференциального модуля определена его гомологическая SDR-ситуация, частным случаем теоремы 3.1 является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть основное кольцо K является любым полем, и пусть над K задан произвольный дифференциальный $F(R^1, \vartheta)$ -модуль (X, d, μ) , где (R^1, ∇, ϑ) – двойственная по Кошулю ϑ -коалгебра к квадратично-скалярной алгебре (R, π) . Тогда формулы (2.1)–(2.4) задают на градуированном гомологическом K -модуле $H(X)$

дифференциального K -модуля (X, d) структуру дифференциального $F(R^!, \vartheta)$ -модуля $(H(X), d = 0, \mu_{\overline{\psi}})$ и определяют $F(R^!, \vartheta)$ -SDR-ситуацию дифференциальных $F(R^!, \vartheta)$ -модулей $(\overline{\eta}: (X, d, \mu) \hookrightarrow (H(X), d = 0, \mu_{\overline{\psi}}) : \overline{\xi}, \overline{h})$, которая продолжает гомотопическую SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \hookrightarrow (H(X), d = 0) : \xi, h)$ дифференциального модуля (X, d) .

Еще одним важным частным случаем теоремы 3.1 является следующее утверждение, которое основано на том, что каждый дифференциальный модуль над произвольной квадратично-скалярной алгеброй (R, π) можно при помощи отображения дифференциальных алгебр $F(\varphi_{\vartheta}^!): (F(R^!, \vartheta), d, \pi) \rightarrow (R, d = 0, \pi)$, указанного в п. 1, рассматривать как $F(R^!, \vartheta)$ -модуль.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть заданы любые дифференциальный R -модуль (X, d, μ) , где (R, π) – произвольная квадратично-скалярная алгебра, и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta: (X, d) \hookrightarrow (Y, d) : \xi, h)$. Если рассмотреть дифференциальный R -модуль (X, d, μ) как $F(R^!, \vartheta)$ -модуль $(X, d, \mu(F(\varphi_{\vartheta}^!) \otimes 1))$, то формулы (2.1)–(2.4) задают (Y, d) структуру дифференциального $F(R^!, \vartheta)$ -модуля $(Y, d, \mu_{\overline{\psi}})$ и определяют $F(R^!, \vartheta)$ -SDR-ситуацию дифференциальных $F(R^!, \vartheta)$ -модулей

$$(\overline{\eta}: (X, d, \mu(F(\varphi_{\vartheta}^!) \otimes 1)) \hookrightarrow (Y, d, \mu_{\overline{\psi}}) : \overline{\xi}, \overline{h}).$$

Рассмотрим теперь применение гомотопической техники дифференциальных $F(R^!, \vartheta)$ -модулей к построению над произвольным коммутативным кольцом гомотопически инвариантного аналога понятия дифференциального модуля над алгеброй Клиффорда.

Под обобщенной алгеброй Клиффорда $(Cl(n, a_i), \pi)$ над коммутативным кольцом K с единицей будем понимать ассоциативную K -алгебру с образующими $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\varepsilon_i \varepsilon_j + \varepsilon_j \varepsilon_i = \begin{cases} 0, & i \neq j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n, \\ a_i, & 1 \leq i = j \leq n, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\varepsilon_k \varepsilon_m = \pi(\varepsilon_k \otimes \varepsilon_m)$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq m \leq n$, и $a_1, \dots, a_n$ – произвольные фиксированные элементы кольца K (случай, когда все или некоторые из a_i равны 0, не исключается).

Легко видеть, что алгебра Клиффорда $Cl(n, a_i)$ является квадратично-скалярной алгеброй, поскольку $Cl(n, a_i)$ изоморфна фактор-алгебре $T(M)/(Q)$, где M – свободный K -модуль с базисом $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ и Q – свободный K -подмодуль, имеющий базис

$$\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j + \varepsilon_j \otimes \varepsilon_i, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 2\varepsilon_i \otimes \varepsilon_i - a_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

модуля $M^{\otimes 2} \oplus K$. Ясно, что $Q \cap K = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Дифференциальным (n, a_i) -клиффордовым модулем будем называть дифференциальный модуль (X, d) , рассматриваемый вместе с семейством отображений дифференциальных модулей $\varepsilon_i: (X, d) \rightarrow (X, d)$, где $1 \leq i \leq n$, для которых выполнены соотношения (3.1).

Ясно, что задание на произвольном дифференциальном модуле (X, d) структуры дифференциального (n, a_i) -клиффордова модуля (X, d, ε_i) эквивалентно заданию на (X, d) структуры дифференциального $Cl(n, a_i)$ -модуля.

Рассмотрим двойственную по Кошулю искривленную градуированную коалгебру $(Cl(n, a_i)^!, \nabla, \vartheta)$ к квадратично-скалярной алгебре $Cl(n, a_i)$. Так как подмодуль $p(Q)$ модуля $M^{\otimes 2}$ является свободным модулем и имеет базис $\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j + \varepsilon_j \otimes \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, то модуль $(Cl(n, a_i)^!)_k^{(k)}$, $k \geq 1$, также является свободным модулем, базисом которого служит семейство элементов

$$[\varepsilon_{i_1}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{i_k}] = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} [\varepsilon_{\sigma(i_1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(i_k)}], \quad 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n,$$

где Σ_k – симметрическая группа перестановок k элементов. Кроме того, очевидно, что $(Cl(n, a_i)^!)_m^{(k)} = 0$ при $k \neq m$. Набор положительных целых чисел $(i_1, \dots, i_k)$, где $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$, далее будем называть *упорядоченным набором*. Легко видеть, что коумножение градуированной коалгебры $(Cl(n, a_i)^!, \nabla)$ задается на базисных элементах $[\varepsilon_{i_1}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{i_k}]$ модуля $(Cl(n, a_i)^!)_k^{(k)}$, $k \geq 1$, формулой

$$\begin{aligned} \nabla([\varepsilon_{i_1}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{i_k}]) &= 1 \otimes ([\varepsilon_{i_1}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{i_k}]) + ([\varepsilon_{i_1}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{i_k}]) \otimes 1 \\ &+ \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} ([\varepsilon_{\sigma(i_1)}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{\sigma(i_m)}]) \otimes ([\varepsilon_{\sigma(i_{m+1})}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{\sigma(i_k)}]), \end{aligned}$$

где I_σ – множество всех разбиений набора чисел $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ на два упорядоченных набора чисел $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_m))$ и $(\sigma(i_{m+1}), \dots, \sigma(i_k))$, $1 \leq m \leq k-1$. Также легко видеть, что искривление $\vartheta: Cl(n, a_i)_2^! \rightarrow \mathbb{R}$ градуированной коалгебры $(Cl(n, a_i)^!, \nabla)$ задается на базисных элементах модуля $(Cl(n, a_i)^!)_2^{(2)}$ следующим правилом:

$$\vartheta([\varepsilon_{i_1}] \vee [\varepsilon_{i_2}]) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i_1 < i_2 \leq n, \\ -a_i, & 1 \leq i_1 = i_2 \leq n. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь ко- B -конструкцию $(F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta), d, \pi)$ для двойственной по Кошулю искривленной коалгебры $(Cl(n, a_i)^!, \nabla, \vartheta)$ к квадратично-скалярной алгебре $(Cl(n, a_i), \pi)$. Из данного выше описания структуры искривленной градуированной коалгебры $(Cl(n, a_i)^!, \nabla, \vartheta)$ следует, что образующими алгебры $(F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta), \pi)$ являются элементы $[[\varepsilon_{i_1}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{i_k}]] \in F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta)_{k-1}$, $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$, дифференциал на которых задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} d([\varepsilon_{i_1}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{i_k}]) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} \pi([\varepsilon_{\sigma(i_1)}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{\sigma(i_m)}]) \otimes ([\varepsilon_{\sigma(i_{m+1})}] \vee \cdots \vee [\varepsilon_{\sigma(i_k)}]), \\ & \quad k \geq 1, \quad k \neq 2, \\ d([\varepsilon_i] \vee [\varepsilon_j]) &= \begin{cases} \pi([\varepsilon_i] \otimes [\varepsilon_j]) + \pi([\varepsilon_j] \otimes [\varepsilon_i]), & 1 \leq i < j \leq n, \\ \pi(2[\varepsilon_i] \otimes [\varepsilon_i]) - a_i, & 1 \leq i = j \leq n, \end{cases} \end{aligned}$$

где π – умножение алгебры $F(Cl(p, q)^!, \vartheta)$ и I_σ – множество всех разбиений набора чисел $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ на два упорядоченных набора чисел $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_m))$ и $(\sigma(i_{m+1}), \dots, \sigma(i_k))$, $1 \leq m \leq k-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Дифференциальным $Cl(n, a_i)_\infty$ -модулем $(X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$ будем называть дифференциальный модуль (X, d) , рассматриваемый вместе с семейством отображений $\varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)}: X_\bullet \rightarrow X_{\bullet+k-1}$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$, $k \geq 1$, для которых выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_{(i)}) &= 0, \quad 1 \leq i \leq n, & d(\varepsilon_{(i,i)}) &= 2\varepsilon_i^2 - a_i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ d(\varepsilon_{(i,j)}) &= \varepsilon_{(i)}\varepsilon_{(j)} + \varepsilon_{(j)}\varepsilon_{(i)}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ d(\varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)}) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} \varepsilon_{(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_m))} \varepsilon_{(\sigma(i_{m+1}), \dots, \sigma(i_k))}, & k \geq 3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где I_σ – множество всех разбиений набора чисел $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ на два упорядоченных набора чисел $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_m))$ и $(\sigma(i_{m+1}), \dots, \sigma(i_k))$, $1 \leq m \leq k-1$.

Очевидно, что любой дифференциальный (n, a_i) -клиффордов модуль (X, d, ε_i) можно рассматривать как дифференциальный $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуль $(X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$, если положить $\varepsilon_{(i)} = \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq n$, и $\varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)} = 0$, $k \geq 2$. С другой стороны, соотношения (6) показывают, что для каждого дифференциального $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуля $(X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$ тройка $(X, d, \varepsilon_{(i)})$ является с точностью до гомотопии дифференциальным (n, a_i) -клиффордовым модулем. В частности, для каждого градуированного $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуля $(X, d = 0, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$ тройка $(X, d = 0, \varepsilon_{(i)})$ является градуированным (n, a_i) -клиффордовым модулем.

Легко видеть, что задание на дифференциальном модуле (X, d) структуры дифференциального $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуля $(X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$ эквивалентно заданию на (X, d) структуры дифференциального $F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta)$ -модуля (X, d, μ) , где структурное отображение $\mu: F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta) \otimes X \rightarrow X$ определяется на элементах $[[\varepsilon_{i_1}] \vee \dots \vee [\varepsilon_{i_k}]] \in F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta)$, $x \in X$ следующей формулой:

$$\mu([[\varepsilon_{i_1}] \vee \dots \vee [\varepsilon_{i_k}]] \otimes x) = \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)}(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Под морфизмом $f: (X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)}) \rightarrow (Y, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$ дифференциальных $Cl(n, a_i)_\infty$ -модулей будем понимать $F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta)$ -отображение $f: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ соответствующих дифференциальных $F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta)$ -модулей. Под композицией морфизмов дифференциальных $Cl(n, a_i)_\infty$ -модулей будем понимать композицию соответствующих $F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta)$ -отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Гомотопией $h: (X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)}) \rightarrow (Y, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$ между морфизмами $f, g: (X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)}) \rightarrow (Y, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$ дифференциальных $Cl(n, a_i)_\infty$ -модулей будем называть $F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta)$ -гомотопию $h: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ между соответствующими $F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta)$ -отображениями $f, g: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$. Под SDR-ситуацией дифференциальных $Cl(n, a_i)_\infty$ -модулей будем понимать соответствующую $F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta)$ -SDR-ситуацию дифференциальных $F(Cl(n, a_i)^!, \vartheta)$ -модулей.

Следующее утверждение, являющееся следствием теоремы 3.1, устанавливает гомотопическую инвариантность структуры дифференциального $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуля при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных модулей.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть задан произвольный дифференциальный $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуль $(X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$, и задана любая SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда на дифференциальном модуле (Y, d) имеется структу-

ра дифференциального $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуля $(Y, d, \bar{\varepsilon}_{(i_1, \dots, i_k)})$, которая задается при помощи формулы (2.1). Более того, определена SDR-ситуация дифференциальных $Cl(n, a_i)_\infty$ -модулей $(\bar{\eta}: (X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)}) \rightleftharpoons (Y, d, \bar{\varepsilon}_{(i_1, \dots, i_k)}) : \bar{\xi}, \bar{h})$, задаваемая при помощи формул (2.2)–(2.4).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть над любым полем задан произвольный дифференциальный $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуль $(X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$. Тогда формулы (2.1)–(2.4) задают на градуированном модуле гомологий $H(X)$ дифференциального модуля (X, d) структуру дифференциального $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуля $(H(X), d = 0, \bar{\varepsilon}_{(i_1, \dots, i_k)})$ и определяют SDR-ситуацию $(\bar{\eta}: (X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)}) \rightleftharpoons (H(X), d = 0, \bar{\varepsilon}_{(i_1, \dots, i_k)}) : \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных $Cl(n, a_i)_\infty$ -модулей, которая продолжает гомологическую SDR-ситуацию дифференциального модуля (X, d) .

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть задан любой дифференциальный (n, a_i) -клиффордов модуль (X, d, ε_i) , и пусть задана произвольная SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных модулей. Если рассмотреть (X, d, ε_i) как дифференциальный $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуль $(X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)})$, то (2.1)–(2.4) задают на дифференциальном модуле (Y, d) структуру дифференциального $Cl(n, a_i)_\infty$ -модуля $(Y, d, \bar{\varepsilon}_{(i_1, \dots, i_k)})$ и определяют SDR-ситуацию $(\bar{\eta}: (X, d, \varepsilon_{(i_1, \dots, i_k)}) \rightleftharpoons (Y, d, \bar{\varepsilon}_{(i_1, \dots, i_k)}) : \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных $Cl(n, a_i)_\infty$ -модулей, которая продолжает заданную SDR-ситуацию дифференциальных модулей $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$.

Рассмотрим интересные интерпретации следствия 3.4 в некоторых частных случаях (n, a_i) -клиффордовых модулей.

Легко видеть, что дифференциальные $(1, -2)$ -клиффордовы модули (X, d, ε) в случае, когда $K = \mathbb{Z}$, являются дифференциальными $\mathbb{Z}$ -модулями (X, d) над алгеброй гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$, где действие числа i на (X, d) определяется отображением ε . Если к структуре дифференциального $\mathbb{Z}$ -модуля над алгеброй $\mathbb{Z}[i]$ применить следствие 3.4, то получим гомотопически инвариантную структуру дифференциального $\mathbb{Z}[i]_\infty$ -модуля над кольцом $\mathbb{Z}$.

Ясно, что дифференциальные $(1, -2)$ -клиффордовы модули (X, d, ε) в случае, когда $K = \mathbb{R}$, являются дифференциальными $\mathbb{R}$ -модулями (X, d) над алгеброй комплексных чисел $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$. Если к структуре дифференциального $\mathbb{R}$ -модуля над алгеброй $\mathbb{C}$ применить следствие 3.4, то получим гомотопически инвариантную структуру дифференциального $\mathbb{C}_\infty$ -модуля над полем $\mathbb{R}$.

Дифференциальные $(n, \{0, \dots, 0\})$ -клиффордовы модули (X, d, ε_i) являются дифференциальными модулями над внешней алгеброй $\Lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Очевидно, что дифференциальный модуль над внешней алгеброй $\Lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ является дифференциальным модулем (X, d) , который снабжен семейством дополнительных дифференциалов нулевой степени $d_i = \varepsilon_i: X_\bullet \rightarrow X_\bullet$, $1 \leq i \leq n$, $d_i^2 = 0$, удовлетворяющих условиям согласованности дифференциалов $d_i d_j + d_j d_i = 0$, где $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$ и $d_0 = d$. Если к структуре дифференциального модуля над внешней алгеброй $\Lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ применить следствие 3.4, то получим гомотопически инвариантную структуру дифференциального $\Lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)_\infty$ -модуля. Отметим, что гомотопическая теория дифференциальных $\Lambda(\varepsilon_1)_\infty$ -модулей эквивалентна гомотопической теории D_∞ -дифференциальных модулей [8], которая применялась в работах [9] и [10] к исследованию E_∞ -структур и A_∞ -структур в спектральных последовательностях расслоений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Е. Посицельский, “Неоднородная квадратичная двойственность и кривизна”, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 57–66.
- [2] S. B. Priddy, “Koszul resolutions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **152** (1970), 39–60.
- [3] J. Hirsh, J. Millés, *Curved Koszul Duality Theory*, arXiv: 1008.5368v1.
- [4] V. Ginzburg, M. Kapranov, “Koszul duality for operads”, *Duke Math. J.*, **76**:1 (1994), 203–272.
- [5] В. А. Смирнов, “Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 121–154.
- [6] J. P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Van Nostrand Math. Stud., **11**, D. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967.
- [7] В. А. Смирнов, *Симплициальные и операдные методы в алгебраической топологии*, Факториал, М., 2002.
- [8] С. В. Лапин, “Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 55–76.
- [9] С. В. Лапин, “ D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и спектральные последовательности расслоений”, *Матем. сб.*, **198**:10 (2007), 3–30.
- [10] С. В. Лапин, “Мультипликативная A_∞ -структура в спектральных последовательностях расслоений”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:6 (2008), 141–175.

С. В. Лапин
г. Саранск
E-mail: slapin@mail.ru

Поступило
12.12.2011
Исправленный вариант
08.04.2012