Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Ложников, С. А. Сергеев, О поведении локализованного решения волнового уравнения в окрестности точки локализации при малых временах, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 149–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 07:29:50

О поведении локализованного решения волнового уравнения в окрестности точки локализации при малых временах

Д. А. Ложников, С. А. Сергеев

1. Введение. В работах [1], [2] было построено асимптотическое решение задачи Коши

$$\eta_{tt} - \nabla C^2(x) \nabla \eta = 0, \quad \eta|_{t=0} = V\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad \eta'|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

где $C(x) > 0$ гладкая функция, а функция $V(y)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $1/|y|^\delta$, $\delta > 1$.

При $t \geq t_0$, где t_0 положительно и не зависит от μ , поведение решения достаточно хорошо изучено: при $t = 0$ решение локализовано в окрестности точки $x = 0$, а при $t > t_0$ оно локализовано в окрестности замкнутой кривой, возможно негладкой и с точками самопересечения. При этом поведение решения по времени от 0 до t_0 изучено значительно хуже. В то же время этот вопрос представляет интерес с точки зрения анализа волны (например, волны цунами) в момент ее возникновения [3]. Цель этой работы изучить поведение решения на указанном промежутке времени $(0, t_0)$ при предположении, что $t_0 \sim \mu$. Рассматриваемая задача интересна в теории длинных волн в жидкости над неровным дном, задаваемым уравнением $C^2(x) = H(x)$, где $H(x)$ – глубина бассейна.

2. Определение асимптотического решения. Согласно работам [1], [2] асимптотическое решение задачи (1) строится следующим образом. Введем в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^4$ лагранжево многообразие

$$\Lambda_2^0 = \{p = \mathbf{n}(\psi), x = \alpha \cdot \mathbf{n}(\psi), \mathbf{n}(\psi) = (\cos(\psi), \sin(\psi))\}.$$

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{x} = \frac{p}{|p|} C(x), \quad \dot{p} = -|p| \nabla C, \quad H(x, p) = |p| C(x). \quad (2)$$

Эта система определяет каноническое преобразование (фазовый поток g_H^t), применение которого к многообразию Λ_2^0 дает семейства, зависящих от t лагранжевых многообразий

$$\Lambda_2^t = g_H^t \Lambda_2^0. \quad (3)$$

Пусть $K_{\Lambda_2^t}^h$ – канонический оператор Маслова на многообразии Λ_2^t . Тогда решение задачи (1) представимо в виде

$$\eta(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{2\pi \cdot i}} \cdot \int_0^\infty \sqrt{\rho} \cdot K_{\Lambda_2^t}^{\mu/\rho} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)) d\rho \right\}. \quad (4)$$

Здесь $\tilde{V}(p)$ – преобразование Фурье от функции $V(y)$.

Задача состоит в упрощении формулы (4) при $t < T \cdot \mu$, где $T > 0$ – константа. Для этого упрощения достаточно найти многообразие Λ_2^t приближенно.

ТЕОРЕМА. *Главный член в асимптотике решения задачи (1) имеет вид*

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty [\rho \cdot \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)) \cdot e^{i\rho/\mu \cdot (\langle \mathbf{n}(\psi), x \rangle - C(0) \cdot t - \langle \nabla C(0), x \rangle \cdot t)}] d\psi d\rho \right\}. \quad (5)$$

Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00726) и Министерства образования и науки РФ (грант № 2.1.1/4540).

ЛЕММА. Для многообразия Λ_2^t справедливы приближенные формулы при малых временах

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \mathbf{n}(\psi) \\ \mathbf{n}(\psi) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} C(\alpha \cdot \mathbf{n}(\psi)) \cdot \mathbf{n}(\psi) \\ -\nabla C(\alpha \mathbf{n}(\psi)) \end{pmatrix} + o(t). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этого факта легко следует из разложения решения системы (2) в окрестности точки $t = 0$ по формуле Тейлора с точностью $o(t)$.

Многообразие Λ_2^t можно покрыть такими же картами, как и при $t = 0$ (см. [4]). Точнее, имеем четыре карты Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4$, которые являются гомеоморфными в полосе и представляют собой декартово произведение прямой на дугу окружности. Карте с номером i соответствует дуга окружности

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{(i-1)\pi}{2} - \delta < \psi < \frac{\pi}{4} + \frac{(i-1)\pi}{2} + \delta,$$

где δ – некоторое малое положительное число.

В картах 1, 3 фаза Φ имеет вид $\Phi = \alpha - \mathcal{P}_2 \cdot \mathcal{X}_2 + p_2 \cdot x_2$, а в картах 2, 4 – $\Phi = \alpha - \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{X}_1 + p_1 \cdot x_1$. Разлагая фазу в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка по переменным α и ψ в окрестности точки ($\psi = \psi^0$, $\alpha = 0$), получаем, что в каждой карте фаза представима в виде

$$\Phi = \langle P(\psi^0, t), x - X(\psi^0, t) \rangle. \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы (5) описывают асимптотическое решение в случае, когда дно представляет собой наклонную плоскость, описываемую уравнением $C(x) = \nabla C(0)x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В работе [2] было сформулировано утверждение о том, что асимптотическое решение задачи (1) в особых картах с координатами (p_1, x_2) определяется следующей формулой:

$$\eta(x, t) = \text{Re} \left\{ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\rho |P_{1\psi}|}{\sqrt{|\mathcal{P}_{1\alpha} \mathcal{X}_{2\psi} - \mathcal{P}_{1\psi} \mathcal{X}_{2\alpha}|}} \cdot \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)) \cdot \mathbf{e}(\psi) e^{i\rho/\mu \langle P(\psi, t), x - X(\psi, t) \rangle} \right] d\psi d\rho \right. \\ \left. \times e^{-(i\pi/2) \cdot \text{Ind}(r^*)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} + O(\mu) \right\}.$$

Учтем в этом выражении разложение (6). Тогда с точностью до $O(t)$ имеем

$$\mathcal{P}_{1\alpha} \mathcal{X}_{2\psi} - \mathcal{P}_{1\psi} \mathcal{X}_{2\alpha} = \sin^2 \psi, \quad P_{1\psi} = \sin \psi.$$

Аналогичное представление решение $\eta(x, t)$ будет иметь и в картах 1, 3. В них якобиан будет иметь вид

$$\mathcal{X}_{1\alpha} \mathcal{P}_{2\psi} - \mathcal{X}_{1\psi} \mathcal{P}_{2\alpha} = \cos^2 \psi,$$

а в числителе будет стоять $|P_{2\psi}| = |\cos \psi|$. Далее при вычислении фазы (7) отбросим слагаемые порядка $O(t)$. В итоге получим

$$\langle P(\psi, t), x - X(\psi, t) \rangle = \langle \mathbf{n}(\psi), x \rangle - C(0) \cdot t - \langle \nabla C(0), x \rangle \cdot t.$$

Поскольку решение рассматривается при малых временах, когда на фронте отсутствуют фокальные точки, за исключением фокальной точки в момент времени $t = 0$, то величина $\text{Ind}(r^*) = 0$. После этого, действуя также, как и в работе [4], с учетом того, что сумма по картам пропадает, так как фаза в каждой карте определяется одной и той же формулой, а корни из якобианов сокращаются с соответствующими производными $|P_{k\psi}|$, $k = 1, 2$, получаем формулу (5).

3. Решение для источника специального вида. Дальнейшие упрощения формулы (5) связаны с выбором источника специального вида [5], [6]:

$$\eta^0 = V\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad V(y) = V_0(T(\theta)y), \quad (8)$$

$$V_0(z) = \frac{1}{(1 + (z_1/b_1)^2 + (z_2/b_2)^2)^{3/2}}, \quad T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Здесь b_1, b_2, θ – действительные параметры. Преобразованием Фурье функции $V(y)$ является функция $\tilde{V}(p_1, p_2) = e^{-|p| \cdot \beta(\psi - \theta)}$, поэтому

$$\tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)) = e^{-\rho \cdot \beta(\psi - \theta)},$$

где

$$\beta(\phi) = \sqrt{b_1^2 \cdot \cos^2 \phi + b_2^2 \cdot \sin^2 \phi}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для источника (8) справедлива формула

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(\beta(\psi) - i/\mu \cdot (\langle \mathbf{n}^0(\psi), x \rangle - C(0) \cdot t - \langle \nabla C(0), x \rangle \cdot t))^2} \right\} + O(\mu) + O(t). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляем источник вида (8) в интеграл (5) и, интегрируя по частям, получаем, что

$$\int_0^\infty \rho \cdot e^{\rho(-\beta + i/\mu \Phi)} d\rho = \frac{1}{(\beta - i/\mu \cdot \Phi)^2},$$

где $\Phi = \langle \mathbf{n}(\psi), x \rangle - C(0) \cdot t - \langle \nabla C(0), x \rangle \cdot t$. Отсюда следует формула (9).

Случай симметричного источника. В случае, когда источник является симметричным, т.е. $b_1 = b_2 = b$, указанный интеграл можно вычислить явно. В этом случае формула для возвышения свободной поверхности жидкости будет иметь вид

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(b + it/\mu \cdot (C(0) + \langle \nabla C(0), x \rangle) - i|x|/\mu \cdot \cos \theta)^2} \right\},$$

Рис. 1. Случай симметричного источника

Рис. 2. Случай несимметричного источника. Угол $\theta = 0$ Рис. 3. Случай несимметричного источника. Угол $\theta = \pi/2$

где $\theta = \psi - \psi_1$, $\cos \psi_1 = x_1/|x|$, $\sin \psi_1 = x_2/|x|$. Ответ для функции $\eta(x, t)$ получается следующий:

$$\eta(x, t) = \sqrt{2\pi} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{a}{(a^2 - 1)^{3/2}} \right\}, \quad (10)$$

где $a = -t/|x|(C(0) - \langle \nabla C(0), x \rangle) + i\beta\mu/|x|$.

Рис. 4. Случай несимметричного источника. Угол $\theta = \pi/4$

На рис. 1 изображен профиль решения $\eta(x, t)$ для симметричного источника в момент времени $t = 0.2$. Здесь глубина в точке $(0, 0)$ равна 1, $\nabla C(0) = (2, 0)$, $\mu = 0.08$. Из рисунка видно, что волна имеет разную высоту, причем, большей амплитуде соответствует меньшая глубина, а меньшей амплитуде – большая глубина.

Случай несимметричного источника. В том случае, когда источник является несимметричным, интеграл, который стоит в формуле (9), явно не вычисляется, и его надо считать численно. На рис. 2–4 изображены начальные стадии распространения волны цунами для разных углов θ в случае, когда глубина в точке $(0, 0)$ равна 1, $\nabla C(0) = (2, 0)$, $\mu = 0.08$, $t = 0.2$. На рис. 2 изображен случай несимметричного источника для $\theta = 0$. Правому краю волны соответствует меньшая глубина, левому – большая. На рис. 3, 4 изображены случаи несимметричного источника для $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi/4$ соответственно. На обоих рисунках меньшая глубина соответствует дальнему краю волны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Yu. Dobrokhotoy, A. I. Shafarevich, B. Tirozzi, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 192–221. [2] S. Yu. Dobrokhotoy, B. Tirozzi, C. A. Vargas, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:2 (2009), 228–245. [3] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1996. [4] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, А. И. Шафаревич, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 792–796. [5] С. Ю. Доброхотов, Б. И. Волков, С. Я. Секерж-Зенькович, Б. Тироцци, *Фундамент. прикл. геофизика*, **2** (2009), 15–29. [6] S. Wang, *ASCE Specialty Conference on Coastal Hydrodynamics* (June 29–July 1, 1987), Univ. of Delaware, 1987, 657–670.

Д. А. Ложников

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: lozhnikov_d@list.ru

Поступило

18.11.2010

Исправленный вариант

19.05.2011

С. А. Сергеев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Московский физико-технический институт
E-mail: sergeevse1@yandex.ru