Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Ракха, О преобразовании Куммера типа II для обобщенной гипергеометрической функции ${}_2F_2$, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 154–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 11:36:08

О преобразовании Куммера типа II для обобщенной гипергеометрической функции ${}_2F_2$

М. А. Ракха

1. Введение и нужные результаты. В 1997 г. Экстон [1] получил следующее крайне интересное преобразование Куммера типа I для обобщенной гипергеометрической функции ${}_2F_2$:

$$e^{-x} {}_2F_2 \left[\begin{matrix} a, 1 + (1/2)a \\ b, (1/2)a \end{matrix} ; x \right] = {}_2F_2 \left[\begin{matrix} b - a - 1, 2 + a - b \\ b, 1 + a - b \end{matrix} ; -x \right]. \quad (1)$$

Этот результат — аналог следующей первой теоремы Куммера [2]:

$$e^{-x} {}_1F_1 \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} ; x \right] = {}_1F_1 \left[\begin{matrix} b - a \\ b \end{matrix} ; -x \right]. \quad (2)$$

В 2005 г. Парис [3] получил обобщение (1) в виде

$$e^{-x} {}_2F_2 \left[\begin{matrix} a, 1 + d \\ b, d \end{matrix} ; x \right] = {}_2F_2 \left[\begin{matrix} b - a - 1, f + 1 \\ b, f \end{matrix} ; -x \right], \quad (3)$$

где

$$f = \frac{d(1 + a - b)}{a - d}. \quad (4)$$

Недавно Рати и Парис [4] вновь получили (3), используя другой метод.

Вторая теорема Куммера [2] заключается в следующем:

$$e^{-x/2} {}_1F_1 \left[\begin{matrix} a \\ 2a \end{matrix} ; x \right] = {}_0F_1 \left[\begin{matrix} - \\ a + 1/2 \end{matrix} ; x^2/16 \right]. \quad (5)$$

Этот результат был также получен Бейли [5] на основе второй теоремы суммирования Гаусса [6], а также Рати и Чой [7] с использованием следующей классической теоремы суммирования Гаусса:

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; 1 \right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}, \quad (6)$$

причем $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$.

С учетом преобразования Куммера типа I для обобщенного гипергеометрического ряда ${}_2F_2$, полученного Экстоном [1] и обобщенного Парисом [3], Рати и Погани [8] недавно получили следующее преобразование Куммера типа II для обобщенной гипергеометрической функции ${}_2F_2$:

$$\begin{aligned} & e^{-x/2} {}_2F_2 \left[\begin{matrix} a, 1 + d \\ 2a + 1, d \end{matrix} ; x \right] \\ &= {}_0F_1 \left[\begin{matrix} - \\ a + 1/2 \end{matrix} ; x^2/16 \right] - \left(1 - \frac{2a}{d} \right) \frac{x}{2(2a + 1)} {}_0F_1 \left[\begin{matrix} - \\ a + 3/2 \end{matrix} ; x^2/16 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

В работе [3] Рати и Погани впервые получили новую формулу суммирования для ряда ${}_3F_2[1/2]$, а затем применили ее для получения результата (7).

Целью данной заметки является получение результата (7) с использованием теоремы суммирования Гаусса (6).

Работа поддержана научным фондом Университета Султана Кабуса, Оман (грант IG/SCI/DOMS/10/03).

2. Вывод формулы (7). Для получения (7) достаточно показать, что

$${}_2F_2 \left[\begin{matrix} a, 1+d \\ 2a+1, d \end{matrix}; 2x \right] = e^x {}_0F_1 \left[\begin{matrix} - \\ a+1/2 \end{matrix}; x^2/4 \right] - \left(1 - \frac{2a}{d} \right) \frac{x}{(2a+1)} e^x {}_0F_1 \left[\begin{matrix} - \\ a+3/2 \end{matrix}; x^2/4 \right]. \quad (8)$$

Чтобы это сделать, предположим, что правая часть (8) равна $S_1 - S_2$. Отсюда видно, что

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+2k}}{(a+1/2)_k 2^{2k} n! k!},$$

(используя преобразования Бейли для двойного ряда)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{x^n}{(a+1/2)_k 2^{2k} (n-2k)! k!},$$

(используя соответствующие тождества Похгаммера, находим после упрощений)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-n/2)_k (-n/2+1/2)_k}{(a+1/2)_k k!}$$

(суммируя внутренний ряд)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n/2, -n/2+1/2 \\ a+1/2 \end{matrix}; 1 \right].$$

Применяя теорему Гаусса (6) и используя формулу удвоения Лежандра, получим после упрощения

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(2a+1)_n} \frac{(2x)^n}{n!} \left(1 + \frac{n}{2a} \right).$$

Совершенно аналогично можно доказать равенство

$$S_2 = \frac{(1-a/d)}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(2a+1)_n} \frac{n(2x)^n}{n!}.$$

Теперь имеем

$$S_1 - S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(a)_n}{(2a+1)_n} 2^n \left(\frac{d+n}{d} \right),$$

что может быть записано в виде

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(2a+1)_n} \frac{(2x)^n}{n!} \frac{(1+d)_n}{(d)_n};$$

суммируя ряд, получим

$$= {}_2F_2 \left[\begin{matrix} a, 1+d \\ 2a+1, d \end{matrix}; 2x \right],$$

что является левой частью (8).

Доказательство (7) завершено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Exton, *J. Comput. Appl. Math.*, **83**:1 (1997), 119–121. [2] E. D. Rainville, *Special Functions*, The Macmillan Co., New York, 1960. [3] R. B. Paris, *J. Comput. Appl. Math.*, **173**:2 (2005), 379–382. [4] A. K. Rathie, R. B. Paris, *Far East J. Math. Sci. (FJMS)*, **27**:1 (2007), 43–48. [5] W. N. Bailey, *Proc. London Math. Soc.* (2), **28**:1 (1928), 242–254. [6] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966. [7] A. K. Rathie, J. Choi, *Commun. Korean Math. Soc.*, **13**:4 (1998), 933–936. [8] A. K. Rathie, T. K. Pogány, *Math. Commun.*, **13**:1 (2008), 63–66.

М. А. Ракха

Suez Canal University, Египет,

Sultan Qaboos University, Оман

E-mail: medhat_rakha@science.suez.edu.eg,

medhat@squ.edu.om

Поступило

06.04.2009