Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита и поперечники функциональных классов, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 666–684

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:56:21

Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита и поперечники функциональных классов

С. Б. Вакарчук

Получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина на множествах $L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$, в которых величины наилучших полиномиальных приближений оцениваются сверху как через модули непрерывности m -го порядка, так и через K -функционалы r -х производных. Для классов функций, определенных при помощи указанных характеристик, в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ вычислены точные значения различных поперечников. Также на классах $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$, где $r = 2, 3, \dots$, в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ получены точные значения наилучших полиномиальных приближений промежуточных производных $f^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, r - 1$.

Библиография: 27 названий

DOI: 10.4213/mzm9299

1. Пусть $L_2(\mathbb{R})$ – пространство измеримых вещественных функций, суммируемых на действительной оси $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$ с квадратом модуля. Обозначим через $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, где $\rho(x) := \exp(-x^2/2)$, множество функций f таких, что $f \cdot \rho \in L_2(\mathbb{R})$. Норма в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$\|f\|_{2,\rho} := \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x) \cdot \rho(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Различные аспекты приближения функций алгебраическими полиномами в среднем на вещественной оси с весом Чебышева–Эрмита ρ в разное время исследовались в работах Рафальсона [1], Фройда [2], Абилова [3], Федорова [4], Алексеева [5], Mhaskar [6], Ditzian и Totik [7] и многих других.

Данная статья продолжает указанную тематику в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ и посвящена получению точных неравенств типа Джексона–Стечкина, а также вычислению точных значений n -поперечников некоторых классов функций. Следует отметить, что первые точные результаты в прямых теоремах теории приближения функций одной переменной были получены в работах Корнейчука [8], Черных [9], Тайкова [10], Лигуна [11], Юдина [12]. В последующем перечисленные результаты получили дальнейшее распространение и развитие в работах Бабенко [13], Иванова и Смирнова [14], Арестова и Попова [15] и других (см., например, [16], [17]).

Введем далее необходимые понятия и определения. Пусть $\mathcal{P}_n$ – подпространство алгебраических полиномов степени, не превосходящей n . Через $E_n(f)_2$ обозначим

величину наилучшего полиномиального приближения функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ элементами подпространства $\mathcal{P}_n$, т.е.

$$E_n(f)_{2,\rho} := \inf\{\|f - p_n\|_{2,\rho} : p_n \in \mathcal{P}_n\}.$$

Пусть $\{H_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ – ортонормированная на прямой $\mathbb{R}$ с весом ρ^2 система многочленов Эрмита (см., например, [1]), где

$$H_k(x) := (-1)^k 2^{-k/2} (k!)^{-1/2} \pi^{-1/4} e^{x^2} \frac{d^k(e^{-x^2})}{dx^k}.$$

Представим функцию $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ в виде разложения в ряд Фурье по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) H_k(x), \quad (1)$$

где равенство понимаем в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$;

$$c_k(f) = \int_{\mathbb{R}} \rho^2(t) f(t) H_k(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

– коэффициенты Фурье–Эрмита функции f . Обозначим символом $S_n(f, x)$ частную сумму n -го порядка ряда Фурье–Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}$, т.е.

$$S_n(f, x) := \sum_{k=0}^n c_k(f) H_k(x).$$

При этом согласно [1]

$$E_n(f)_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (2)$$

Рассмотрим оператор усреднения функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{T}_t(f, x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x\sqrt{1-t^2} + ty) e^{-y^2} dy, \quad (3)$$

где $|t| \leq 1$. В статье [1] было показано, что в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$\mathcal{T}_t(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) (1-t^2)^{k/2} H_k(x). \quad (4)$$

Используя функцию (3), построим аналоги конечных разностей первого и высших порядков, обозначив через $\mathbb{I}$ единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$:

$$\Delta_t^1(f, x) := \mathcal{T}_t(f, x) - f(x) = (\mathcal{T}_t - \mathbb{I})f(x), \quad (5)$$

$$\Delta_t^m(f, x) := \Delta_t^1(\Delta_t^{m-1}(f), x) = (\mathcal{T}_t - \mathbb{I})^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \mathcal{T}_t^k(f, x),$$

где $m = 2, 3, \dots$, $T_t^k := T_t^1(T_t^{k-1})$, $T_t^1 := T_t$, $T_t^0 = \mathbb{I}$. Из формулы (5) с учетом равенств (1) и (4) получаем в смысле сходимости в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$

$$\Delta_t^1(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)((1-t^2)^{k/2} - 1)H_k(x). \quad (6)$$

Используя формулу (6) и метод математической индукции, получаем

$$\Delta_t^m(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)((1-t^2)^{k/2} - 1)^m H_k(x). \quad (7)$$

Из (7) имеем

$$\|\Delta_t^m(f, x)\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)(1 - (1-t^2)^{k/2})^{2m}. \quad (8)$$

Рассмотрим следующую величину:

$$\tilde{\omega}_m(f, \delta)_{2,\rho} := \sup\{\|\Delta_t^m(f)\|_{2,\rho} : |t| \leq \delta\}, \quad (9)$$

где $0 < \delta \leq 1$, которую назовем *обобщенным модулем непрерывности m -го* ($m \in \mathbb{N}$) *порядка* функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Отметим, что в случае $m = 1$ характеристика гладкости (9) рассматривалась в работе Абилова [18]. Из соотношений (8), (9) получаем

$$\tilde{\omega}_m(f, \delta)_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)(1 - (1-\delta^2)^{k/2})^{2m} \right\}^{1/2}, \quad (10)$$

где $0 \leq \delta \leq 1$. Обозначим через $L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, множество функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны на любом конечном интервале, а производные r -го порядка принадлежат пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Всюду далее отношение $0/0$ считаем равным 0 и полагаем $a^{[k]} := a(a-1)\dots(a-k+1)$.

2. ТЕОРЕМА 1. Пусть r – произвольное натуральное число. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq r}} \sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}) \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} E_n(f)_{2,\rho}}{\tilde{\omega}_m(f^{(r)}, 1/\sqrt{n-r+1})_{2,\rho}} = \frac{1}{(1-1/\sqrt{e})^m}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ из соотношения (2) получаем

$$\begin{aligned} E_n^2(f)_{2,\rho} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f)(1-\delta^2)^{k/2} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f)(1-(1-\delta^2)^{k/2}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k(f)|^{2-1/m} |c_k(f)|^{1/m} (1-(1-\delta^2)^{k/2}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $0 < \delta \leq 1$. Применяя к правой части равенства (12) неравенство Гёльдера и учитывая формулы (2) и (10), имеем

$$\begin{aligned} E_n^2(f)_{2,\rho} - \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f)(1-\delta^2)^{k/2} \\ \leq \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{(2m-1)/(2m)} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-(1-\delta^2)^{k/2})^{2m} c_k^2(f) \right\}^{1/(2m)} \\ = \{E_n^2(f)_{2,\rho}\}^{1-1/(2m)} \tilde{\omega}_m^{1/m}(f, \delta)_{2,\rho}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из неравенства (13) получаем

$$\begin{aligned} E_n^2(f)_{2,\rho} \leq \{E_n^2(f)_{2,\rho}\}^{1-1/(2m)} \tilde{\omega}_m^{1/m}(f, \delta)_{2,\rho} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f)(1-\delta^2)^{k/2} \\ \leq \{E_n^2(f)_{2,\rho}\}^{1-1/(2m)} \tilde{\omega}_m^{1/m}(f, \delta)_{2,\rho} + (1-\delta^2)^{(n+1)/2} E_n^2(f)_{2,\rho}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя неравенство (14), запишем оценку сверху для величины наилучшего полиномиального приближения

$$E_n(f)_{2,\rho} \leq (1 - (1 - \delta^2)^{(n+1)/2})^{-m} \tilde{\omega}_m(f, \delta)_{2,\rho}. \quad (15)$$

В работе [1] отмечалось, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$ имеет место следующее разложение ее r -й производной $f^{(r)}$ в ряд Фурье–Эрмита:

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f) \sqrt{2^r k^{[r]}} H_{k-r}(x), \quad (16)$$

где равенство понимается в указанном ранее смысле. Исходя из формул (2) и (16), для произвольного натурального числа $n \geq r$ запишем значение величины наилучшего приближения функции $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-r}$:

$$E_{n-r}(f^{(r)})_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) 2^r k^{[r]} \right\}^{1/2}. \quad (17)$$

С учетом формул (2) и (16), (17) получаем

$$\begin{aligned} E_n(f)_{2,\rho} &= \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^r k^{[r]}}{2^r k^{[r]}} c_k^2(f) \right\}^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2^r (n+1)^{[r]}}} E_{n-r}(f^{(r)})_{2,\rho}. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя неравенство (15), запишем оценку сверху для величины наилучшего полиномиального приближения $E_{n-1}(f^{(r)})_{2,\rho}$:

$$E_{n-r}(f^{(r)})_{2,\rho} \leq (1 - (1 - \delta^2)^{(n-r+1)/2})^{-m} \tilde{\omega}_m(f^{(r)}, \delta)_{2,\rho}, \quad (19)$$

где $0 < \delta \leq 1$. Из формул (18), (19) следует оценка сверху

$$E_n(f)_{2,\rho} \leq \frac{(1 - (1 - \delta^2)^{(n-r+1)/2})^{-m}}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \tilde{\omega}_m(f^{(r)}, \delta)_{2,\rho}. \quad (20)$$

Из неравенства (20) имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}) \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} E_n(f)_{2,\rho}}{\tilde{\omega}_m(f^{(r)}, \delta)_{2,\rho}} \leq \frac{1}{(1 - (1 - \delta^2)^{(n-r+1)/2})^m}, \quad (21)$$

где $0 < \delta \leq 1$. Для получения оценки снизу левой части неравенства (21) рассмотрим функцию $f_0(x) := H_{n+1}(x)$, где $n \geq r$, которая принадлежит классу $L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$. В силу соотношения (2) $E_n(f_0)_{2,\rho} = 1$. На основании формулы (16) имеем

$$f_0^{(r)}(x) = \sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} H_{n-r+1}(x).$$

Тогда, используя формулу (10), запишем

$$\tilde{\omega}_m(f_0^{(r)}, \delta)_{2,\rho} = \sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} (1 - (1 - \delta^2)^{(n-r+1)/2})^m.$$

Следовательно,

$$\frac{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} E_n(f_0)_{2,\rho}}{\tilde{\omega}_m(f_0^{(r)}, \delta)_{2,\rho}} = \frac{1}{(1 - (1 - \delta^2)^{(n-r+1)/2})^m}. \quad (22)$$

Учитывая, что $f_0 \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$ и $f_0 \notin \mathcal{P}_r$, а также сопоставляя соотношения (21) и (22), имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}) \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} E_n(f)_{2,\rho}}{\tilde{\omega}_m(f^{(r)}, \delta)_{2,\rho}} = \frac{1}{(1 - (1 - \delta^2)^{(n-r+1)/2})^m}, \quad (23)$$

где $0 < \delta \leq 1$. Полагая в формуле (23) $\delta := 1/\sqrt{n-r+1}$ и вычисляя верхнюю грань по $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq r$) от ее левой и правой частей, получаем требуемое равенство (11). Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо следующее равенство:*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \\ f \notin \text{const}}} \frac{E_n(f)_{2,\rho}}{\tilde{\omega}_m(f, 1/\sqrt{n+1})_{2,\rho}} = \frac{1}{(1 - 1/\sqrt{e})^m}.$$

В качестве замечания отметим, что полученное в ходе доказательства теоремы равенство (23) представляет и самостоятельный интерес.

3. В работе [9] Черных отмечал, что поскольку функционал

$$\left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_1^2(f, t) \sin nt \, dt \right\}^{1/2},$$

где $\omega_1(f, t)$ – модуль непрерывности первого порядка 2π -периодической функции $f \in L_2 := L_2([0, 2\pi])$, меньше джексоновского функционала $\omega_1(f, \pi/n)$ ($f \notin \text{const}$)

то, по-видимому, он более естественен для характеристики наилучших полиномиальных приближений периодических функций в L_2 . Аналогичную ситуацию можно наблюдать и в рассматриваемом нами случае. Если, например, при некотором $h \in (0, 1]$ имеем $\int_0^h \varphi(t) dt \leq 1$, где φ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция, то очевидно, что для не эквивалентной нулю функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ при $0 < p < \infty$ функционал

$$\left\{ \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}$$

будет меньше величины $\tilde{\omega}_m(f, h)_{2,\rho}$. В связи со сказанным рассмотрим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$ ($r \leq n$), $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq 1$, φ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}) \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}} = \frac{1}{\left\{ \int_0^h (1 - (1 - t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения оценки сверху экстремальной характеристики, записанной в левой части соотношения (24), воспользуемся упрощенным вариантом неравенства Минковского, приведенного в [19; с. 104]:

$$\left\{ \int_0^h \left(\sum_{k=l}^{\infty} |\tilde{f}_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right\}^{1/p} \geq \left\{ \sum_{k=l}^{\infty} \left(\int_0^h |\tilde{f}_k(t)|^p dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2}, \quad (25)$$

где $0 < p \leq 2$. Полагая $\tilde{f}_k := f_k \varphi^{1/p}$, из (25) имеем

$$\left\{ \int_0^h \left(\sum_{k=l}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \geq \left\{ \sum_{k=l}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2}. \quad (26)$$

Используя соотношения (10), (16), (2) и (26), получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} &= \left\{ \int_0^h (\tilde{\omega}_m^2(f^{(r)}, t)_{2,\rho})^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \\ &\geq \left\{ \int_0^h \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^r k^{[r]} c_k^2(f) (1 - (1 - t^2)^{(k-r)/2})^{2m} \right]^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \\ &\geq \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) 2^r k^{[r]} \left[\int_0^h (1 - (1 - t^2)^{(k-r)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right]^{2/p} \right\}^{1/2} \\ &\geq \sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} \left\{ \int_0^h (1 - (1 - t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} E_n(f)_{2,\rho}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}) \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}} \leq \frac{1}{\left\{ \int_0^h (1 - (1 - t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}}. \quad (27)$$

Для получения оценки снизу величины, записанной в левой части неравенства (27), в классе $L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$ рассмотрим функцию f_0 , которая уже была использована при доказательстве теоремы 1. Поскольку $E_n(f_0)_{2,\rho} = 1$ и

$$\int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f_0^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt = \sqrt{(2^r(n+1)^{[r]})^p} \int_0^h (1 - (1 - t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt,$$

имеем

$$\frac{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} E_n(f_0)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f_0^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}} = \frac{1}{\left\{ \int_0^h (1 - (1 - t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}}. \quad (28)$$

Очевидно, что требуемое равенство (24) следует из соотношений (27), (28), чем и завершается доказательство теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеет место следующее равенство:*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}} = \frac{1}{\left\{ \int_0^h (1 - (1 - t^2)^{(n+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}},$$

где $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq 1$, $n, m \in \mathbb{N}$, φ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция.

Полагая, например, $\varphi(t) \equiv t$, $p := 1/m$, $h := \sqrt{2/(n+3)}$, из данного следствия после несложных вычислений получаем

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{ (n+3) \int_0^{\sqrt{2/(n+3)}} \tilde{\omega}_m^{1/m}(f, t)_{2,\rho} t dt \right\}^m} = \left(1 - \frac{2}{n+3} \right)^{-(n+3)m/2}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, отсюда имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{ (n+3) \int_0^{\sqrt{2/(n+3)}} \tilde{\omega}_m^{1/m}(f, t)_{2,\rho} t dt \right\}^m} = e^m.$$

4. В теории аппроксимации функций вещественного переменного часто используется идея замены произвольной функции f достаточно гладкой функцией g . Одна из наиболее эффективных ее реализаций основана на методе K -функционала Петре в теории интерполяционных пространств [20]. Отметим, что K -функционалы также нашли применение при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций (см., например, [6], [7], [21], [22]).

Запишем в рассматриваемом нами случае выражение для введенного в работе [7] K -функционала, используя для этого приведенные выше обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_m(f; t^m)_{2,\rho} &:= K_m(f, t^m; L_{2,\rho}(\mathbb{R}); L_{2,\rho}^m(\mathbb{R})) \\ &= \inf \{ \|f - g\|_{2,\rho} + t^m \|g^{(m)}\|_{2,\rho} : g \in L_{2,\rho}^m(\mathbb{R}) \}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $0 < t \leq 1$. Из результатов работы Ditzian, Totik [7] в рамках исследуемых нами задач следует, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ справедливы следующие равенства:

$$E_n(f)_{2,\rho} \leq c_1 \mathbb{K}_m\left(f; \frac{1}{n^{m/2}}\right)_{2,\rho}, \quad \mathbb{K}_m\left(f; \frac{1}{n^{m/2}}\right)_{2,\rho} \leq \frac{c_2}{n^m} \sum_{\nu=1}^n \nu^{m-1} E_\nu(f)_{2,\rho}, \quad (30)$$

где c_1, c_2 – некоторые константы. Также в [7] была показана слабая эквивалентность K -функционала (29) специальным образом построенному модулю непрерывности m -го порядка. Определенный интерес, с нашей точки зрения, представляет вычисление точных значений экстремальных характеристик, подобных (11), но содержащих вместо модуля непрерывности m -го порядка (9) K -функционал (29).

ТЕОРЕМА 3. Пусть n, m, r – произвольные натуральные числа такие, что $n \geq m + r$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}) \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} E_n(f)_{2,\rho}}{\mathbb{K}_m\left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}}\right)_{2,\rho}} = 1. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство (18), для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$ такой, что $f \notin \mathcal{P}_r$, имеем

$$E_n(f)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \|f^{(r)} - S_{n-r}(g)\|_{2,\rho}, \quad (32)$$

где $S_{n-r}(g)$ есть частная сумма $(n-r)$ -го порядка ряда Фурье–Эрмита произвольной функции $g \in L_{2,\rho}^m(\mathbb{R})$. В силу формул (2) и (18) имеем

$$\|g - S_{n-r}(g)\|_{2,\rho} = E_{n-r}(g)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}} E_{n-r-m}(g^{(m)})_{2,\rho}. \quad (33)$$

Применяя неравенство треугольника к правой части соотношения (32) и используя результат (33), получаем

$$\begin{aligned} E_f(g)_{2,\rho} &\leq \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \{ \|f^{(r)} - g\|_{2,\rho} + \|g - S_{n-r}(g)\|_{2,\rho} \} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \left\{ \|f^{(r)} - g\|_{2,\rho} + \frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}} \|g^{(m)}\|_{2,\rho} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Очевидно, что левая часть неравенства (34) не зависит от функции g , выбор которой из класса $L_{2,\rho}^m(\mathbb{R})$ ничем не ограничивался. Поэтому, переходя в правой части

неравенства (34) к нижней грани по функциям $g \in L_{2,\rho}^m(\mathbb{R})$ и используя определение K -функционала (29), имеем

$$E_n(f)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \mathbb{K}_m \left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}} \right)_{2,\rho}.$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}) \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} E_n(f)_{2,\rho}}{\mathbb{K}_m \left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}} \right)_{2,\rho}} \leq 1. \quad (35)$$

Получим оценку снизу экстремальной характеристики, записанной в левой части неравенства (35). Для этого в формуле (29) полагаем $f := p_{n+1}$, где p_{n+1} – произвольный полином из подпространства $\mathcal{P}_{n+1}$. Поскольку функция $g \equiv 0$ может рассматриваться как элемент множества $L_{2,\rho}^m(\mathbb{R})$, из соотношения (29) получаем следующую оценку сверху:

$$\mathbb{K}_m(p_{n+1}; t^m)_{2,\rho} \leq \|p_{n+1}\|_{2,\rho}.$$

Очевидно, что и в случае $g := p_{n+1}$ функция g также принадлежит множеству $L_{2,\rho}^m(\mathbb{R})$. Тогда из формулы (29) имеем

$$\mathbb{K}_m(p_{n+1}; t^m)_{2,\rho} \leq t^m \|p_{n+1}^{(m)}\|_{2,\rho}.$$

Из двух последних неравенств получаем оценку сверху K -функционала произвольного элемента $p_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$

$$\mathbb{K}_m(p_{n+1}; t^m)_{2,\rho} \leq \min\{\|p_{n+1}\|_{2,\rho}; t^m \|p_{n+1}^{(m)}\|_{2,\rho}\}. \quad (36)$$

Рассмотрим функцию $f_0(x) := H_{n+1}(x)$. Поскольку

$$f_0^{(r+m)}(x) = \sqrt{2^{r+m}(n+1)^{[r+m]}} H_{n-r-m+1}(x),$$

в силу неравенства (36) и ортонормированности полиномов Эрмита на $\mathbb{R}$ с соответствующим весом запишем

$$\mathbb{K}_m \left(f_0^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}} \right)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}} \|f_0^{(r+m)}\|_{2,\rho} = \sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}. \quad (37)$$

Используя неравенство (37), имеем

$$\frac{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} E_n(f_0)_{2,\rho}}{\mathbb{K}_m \left(f_0^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}} \right)_{2,\rho}} \geq 1. \quad (38)$$

Поскольку функция $f_0 \in L_{2,\rho}^r$ и $f_0 \notin \mathcal{P}_r$, на основании соотношений (35) и (38) получаем требуемое равенство (31). Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть n, m – произвольные натуральные числа такие, что $n \geq m$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_n(f)_{2,\rho}}{\mathbb{K}_m \left(f; \frac{1}{\sqrt{2^m(n+1)^{[m]}}} \right)_{2,\rho}} = 1. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия не приводится в связи с тем, что его ход в основных чертах полностью повторяет ключевые моменты рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 3.

Небезинтересно отметить, что по сравнению с порядковым неравенством (30) из равенства (39) следует точное на классе $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ неравенство типа Джексона, в котором вместо обобщенного модуля непрерывности m -го порядка (9) использован K -функционал (29).

5. Пусть $\mathbb{B}$ – единичный шар в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$; $\mathcal{L}_n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ – n -мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ – подпространство коразмерности n ; $\Lambda: L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}_n$ – непрерывный линейный оператор; $\Lambda^\perp: L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования, $\mathcal{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathcal{M}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) &:= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon \mathbb{B} \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathcal{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \}, \\ d_n(\mathcal{M}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) &:= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - \gamma\|_{2,\rho} : \gamma \in \mathcal{L}_n \} : f \in \mathcal{M} \} : \mathcal{L}_n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \}, \\ \delta_n(\mathcal{M}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) &:= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda f\|_{2,\rho} : f \in \mathcal{M} \} : \Lambda L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \}, \\ \Pi_n(\mathcal{M}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) &:= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda^\perp f\|_{2,\rho} : f \in \mathcal{M} \} : \Lambda^\perp L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \}, \\ d^n(\mathcal{M}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) &:= \inf \{ \sup \{ \|f\|_{2,\rho} : f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}^n \} : \mathcal{L}^n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \} \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *проеекционным*, *гельфандовским* n -*поперечниками* подмножества $\mathcal{M}$ в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Очевидно, что пространство $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} \rho^2(x) f(x) g(x) dx$$

и нормой

$$\|f\|_{2,\rho} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

превращается в гильбертово пространство. Отметим, что в гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ между перечисленными выше поперечниками выполняются следующие соотношения (см., например, [23]):

$$\begin{aligned} b_n(\mathcal{M}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) &\leq d^n(\mathcal{M}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \leq d_n(\mathcal{M}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \\ &= \Pi_n(\mathcal{M}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) = \delta_n(\mathcal{M}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})). \end{aligned} \quad (40)$$

Пусть $H \in (0, 1]$; $p \in (0, 2]$; $r, m \in \mathbb{N}$; φ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, H]$ неэквивалентная нулю функция. Обозначим через $HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)$ класс,

состоящий из функций $f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$, у которых производные r -го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int_0^H \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \leq 1.$$

Следующая теорема является в определенном смысле распространением теоремы 2 из работы Тайкова [10] на случай пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n, r \in \mathbb{N}$ и $n \geq r$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \text{diam}_{n+1}(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi); L_{2,\rho}(\mathbb{R})) &= E_n(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \left\{ \int_0^H (1 - (1-t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$E_n(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)) := \sup\{E_n(f)_{2,\rho} : f \in HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)\},$$

$\text{diam}_{n+1}(\cdot)$ – любой из перечисленных выше поперечников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство (24), определение класса $HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)$ и соотношения между различными поперечниками (40), запишем оценки сверху

$$\begin{aligned} \text{diam}_{n+1}(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi); L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \\ \leq d_{n+1}(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi); L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \leq E_n(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)) \\ \leq \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \left\{ \int_0^H (1 - (1-t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \quad (42)$$

Для получения оценок снизу на множестве $\mathcal{P}_{n+1} \cap L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ рассмотрим следующий шар:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{n+2}^* &:= \left\{ p_{n+1}^* \in \mathcal{P}_{n+1} : \right. \\ &\quad \left. \|p_{n+1}^*\|_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \left(\int_0^H (1 - (1-t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \right\} \end{aligned}$$

и покажем, что он принадлежит классу $HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)$. Используя формулы (10) и (16), для произвольного полинома

$$p_{n+1}^*(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k(p_{n+1}^*) H_k(x),$$

принадлежащего шару $\mathbb{B}_{n+2}^*$, запишем

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_m((p_{n+1}^*)^{(r)}, t)_{2,\rho} &= \left\{ \sum_{k=r}^{n+1} c_k^2(p_{n+1}^*) 2^r k^{[r]} (1 - (1-t^2)^{(k-r)/2})^{2m} \right\}^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} (1 - (1-t^2)^{(n-r+1)/2})^m \|p_{n+1}^*\|_{2,\rho}. \end{aligned} \quad (43)$$

Возводя левую и правую части неравенства (43) в степень p , умножая на функцию φ , интегрируя полученное таким образом неравенство по переменной t в пределах от 0 до H и учитывая, что $p_{n+1}^* \in \mathbb{B}_{n+2}^*$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^H \tilde{\omega}_m^p((p_{n+1}^*)^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \\ & \leq \sqrt{(2^r(n+1)^{[r]})^p \|p_{n+1}^*\|_{2,\rho}^p} \int_0^H (1 - (1-t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \leq 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbb{B}_{n+2}^* \subset HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)$. Используя определение бернштейновского поперечника и соотношение (40), имеем

$$\begin{aligned} & \text{diam}_{n+1}(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi); L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \\ & \geq b_{n+1}(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi); L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \geq b_{n+1}(\mathbb{B}_{n+2}^*; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \left\{ \int_0^H (1 - (1-t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \quad (44)$$

Сопоставляя неравенства (42) и (44), получаем требуемые равенства (41), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

Напомним, что в 1910 году Лебегом было впервые введено понятие модуля непрерывности и в терминах указанной характеристики были получены оценки сверху коэффициентов Фурье [24]. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах 2π -периодических функций в разное время рассматривались в работах А. В. Ефимова, А. Ф. Тимана, Н. П. Корнейчука, В. И. Бердышева, С. А. Теляковского, С. Милорадовича, А. И. Степанца и многих других.

Изучению поведения коэффициентов ряда Фурье–Эрмита непрерывных функций посвящена работа Абилова [25]. Для рассматриваемых в этой статье функциональных классов данный вопрос также представляет определенный интерес.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $n, r \in \mathbb{N}$ и $n \geq r$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \sup\{|c_{n+1}(f)| : f \in HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)\} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \left\{ \int_0^H (1 - (1-t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая ортонормированность системы полиномов Эрмита на $\mathbb{R}$ с весом ρ^2 , для произвольной функции $f \in HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)$, запишем

$$|c_{n+1}(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \rho^2(t) f(t) H_{n+1}(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} (\rho(t) |f(t) - S_n(f, t)|) (\rho(t) |H_{n+1}(t)|) dt, \quad (46)$$

где $S_n(f)$ – частная сумма n -го порядка ряда Фурье–Эрмита для f . Применяя неравенство Гёльдера к правой части неравенства (46), имеем

$$|c_{n+1}(f)| \leq \|f - S_n(f)\|_{2,\rho} \|H_{n+1}\|_{2,\rho} = E_n(f)_{2,\rho}. \quad (47)$$

С учетом формулы (41) из неравенства (47) получаем

$$\begin{aligned} \sup\{|c_{n+1}(f)| : f \in HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)\} &\leq E_n(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \left\{ \int_0^H (1 - (1-t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \quad (48)$$

Для получения оценки снизу величины, записанной в левой части неравенства (48), рассмотрим функцию

$$f_1(x) := \frac{H_{n+1}(x)}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \left\{ \int_0^H (1 - (1-t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p},$$

которая, как нетрудно убедиться, является элементом шара $\mathbb{B}_{n+2}^*$, построенного в ходе доказательства теоремы 4. Поскольку $\mathbb{B}_{n+2}^* \subset HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)$, то

$$\begin{aligned} \sup\{|c_{n+1}(f)| : f \in HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)\} &\geq |c_{n+1}(f_1)| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \left\{ \int_0^H (1 - (1-t^2)^{(n-r+1)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \quad (49)$$

Равенство (45) получаем из соотношений (48) и (49). Утверждение 1 доказано.

6. Напомним (см., например, [26; с. 25]), что неубывающая на $[0, \infty)$ функция Ψ называется k -мажорантой, если функция $t^{-k}\Psi(t)$ не возрастает на $(0, \infty)$, $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. При $k = 1$ функцию Ψ будем называть мажорантой.

Через $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$; $m \in \mathbb{N}$) обозначим класс функций, состоящих из элементов $f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$, у которых производные r -го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию $\mathbb{K}_m(f^{(r)}, t^m) \leq \Psi(t^m)$ для любого $0 < t \leq 1$. Здесь функция Ψ является некоторой мажорантой и $L_{2,\rho}^0(\mathbb{R}) \equiv L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. При этом всюду далее полагаем $W_{2,\rho}(\mathbb{K}_m, \Psi) := W_{2,\rho}^0(\mathbb{K}_m, \Psi)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть Ψ – некоторая мажоранта, определяющая класс функций $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$, где $r \in \mathbb{Z}_+$; $m \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольного натурального числа n такого, что $n \geq m + r$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \text{diam}_{n+1}(W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi); L_{2,\rho}(\mathbb{R})) &= E_n(W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)) \\ &= \begin{cases} \frac{\Psi(1/\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}})}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}}, & \text{если } r \in \mathbb{N}, \\ \Psi(1/\sqrt{2^m(n+1)^{[m]}}), & \text{если } r = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь $\text{diam}_{n+1}(\cdot)$ – любой из рассмотренных ранее поперечников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности рассмотрим случай $r \in \mathbb{N}$, поскольку при $r = 0$ рассуждения остаются практически аналогичными, а вместо теоремы 3 применяется вытекающее из нее следствие 3. Используя формулу (31), определение класса функций $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$, а также соотношения между различными поперечниками (40), запишем оценки сверху

$$\begin{aligned} \text{diam}_{n+1}(W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi); L_{2,\rho}(\mathbb{R})) &\leq d_{n+1}(W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi); L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \\ &\leq E_n(W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)) \leq \frac{\Psi(1/\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}})}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Для нахождения оценок снизу рассмотрим в соответствии с соотношением (40) бернштейновский поперечник класса $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$. С этой целью введем следующий шар на множестве $\mathcal{P}_{n+1} \cap L_{2,\rho}(\mathbb{R})$:

$$\tilde{\mathbb{B}}_{n+2} := \left\{ \tilde{p}_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1} : \|\tilde{p}_{n+1}\|_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \Psi\left(\frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}}\right) \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$.

Предварительно получим в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ своеобразный аналог неравенства Бернштейна для алгебраических полиномов. Пусть p_{n+1} – произвольный алгебраический полином $(n+1)$ -й степени, который представим в виде ряда Фурье по многочленам Эрмита

$$p_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k(p_{n+1}) H_k(x).$$

Поскольку в силу формулы (16)

$$p_{n+1}^{(r+m)}(x) = \sum_{k=r+m}^{n+1} c_k(p_{n+1}) \sqrt{2^{r+m} k^{[r+m]}} H_{k-r-m}(x),$$

очевидно, что

$$\|p_{n+1}^{(r+m)}\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=r+m}^{n+1} c_k^2(p_{n+1}) 2^{r+m} k^{[r+m]} \right\}^{1/2} \leq \sqrt{2^{r+m}(n+1)^{[r+m]}} \|p_{n+1}\|_{2,\rho}.$$

Поскольку функция Ψ является мажорантой, для нее при любых $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{\Psi(\tau_1)}{\tau_1} \geq \frac{\Psi(\tau_2)}{\tau_2}. \quad (52)$$

Полагая $\tau_1 := t_1^m$, $\tau_2 := t_2^m$, где $0 < t_1 \leq t_2 \leq 1$, из формулы (52) получаем

$$\frac{\Psi(t_1^m)}{\Psi(t_2^m)} \geq \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^m. \quad (53)$$

Покажем справедливость включения $\tilde{\mathbb{B}}_{n+2} \subset W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$. Для этого убедимся в выполнении неравенства $\mathbb{K}_m((\tilde{p}_{n+1})^{(r)}, t^m)_{2,\rho} \leq \Psi(t^m)$, где $0 < t \leq 1$, для любого полинома $\tilde{p}_{n+1} \in \tilde{\mathbb{B}}_{n+2}$.

Пусть сначала $0 < t \leq 1/\sqrt{2((n-r+1)^{[m]})^{1/m}}$. Используя неравенство (53), где $t_1 := t$ и $t_2 := 1/\sqrt{2((n-r+1)^{[m]})^{1/m}}$, а также применяя неравенство (36), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_m((\tilde{p}_{n+1})^{(r)}, t^m)_{2,\rho} &\leq t^m \|(\tilde{p}_{n+1})^{(r+m)}\|_{2,\rho} \leq t^m \sqrt{2^{r+m}(n+1)^{[r+m]}} \|\tilde{p}_{n+1}\|_{2,\rho} \\ &\leq t^m \sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}} \Psi\left(\frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}}\right) \leq \Psi(t^m). \end{aligned} \quad (54)$$

Пусть теперь $1/\sqrt{2((n-r+1)^{[m]})^{1/m}} \leq t \leq 1$. Тогда, используя неравенство (36) и неравенство типа Бернштейна

$$\|(\tilde{p}_{n+1})^{(r)}\|_{2,\rho} \leq \sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} \|\tilde{p}_{n+1}\|_{2,\rho},$$

а также учитывая, что функция Ψ является неубывающей, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_m((\tilde{p}_{n+1})^{(r)}, t^m)_{2,\rho} &\leq \|(\tilde{p}_{n+1})^{(r)}\|_{2,\rho} \leq \sqrt{2^r(n+1)^{[r]}} \|\tilde{p}_{n+1}\|_{2,\rho} \\ &\leq \Psi\left(\frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}}\right) \leq \Psi(t^m). \end{aligned} \quad (55)$$

Из определения класса $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$ и неравенств (54), (55) вытекает принадлежность ему шара $\tilde{\mathbb{B}}_{n+2}$. Используя определение бернштейновского поперечника и соотношения (40) между рассмотренными выше поперечниками, получаем

$$\begin{aligned} \text{diam}_{n+1}(W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi); L_{2,\rho}(\mathbb{R})) &\geq b_{n+1}(W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi); L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \\ &\geq b_{n+1}(\tilde{\mathbb{B}}_{n+2}; L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \geq \frac{\Psi(1/\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}})}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}}. \end{aligned} \quad (56)$$

Сопоставляя оценки сверху (51) и оценки снизу (56), получаем требуемые равенства (50) в случае $r \in \mathbb{N}$. Теорема 5 доказана.

Из данной теоремы, так же как и из теоремы 4, вытекает следующее утверждение, связанное с вычислением точных значений модулей коэффициентов Фурье–Эрмита на классе $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть Ψ – некоторая мажоранта, определяющая класс функций $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого натурального числа n , удовлетворяющего условию $n \geq m + r$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\sup\{|c_{n+1}(f)| : f \in W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)\} \\ &= \begin{cases} \frac{\Psi(1/\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}})}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}}, & \text{если } r \in \mathbb{N}, \\ \Psi(\sqrt{2^m(n+1)^{[m]}}), & \text{если } r = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения 2 не приводится, поскольку его идея совпадает с идеей доказательства утверждения 1.

Отметим, что в качестве мажоранты Ψ может выступать произвольный выпуклый вверх модуль непрерывности ω , поскольку для него условие $\omega(t_1)/t_1 \geq \omega(t_2)/t_2$, где $0 < t_1 \leq t_2$, выполняется автоматически. Примеры других мажорант можно найти, например, в работах [21], [22].

7. В теореме 5 было получено точное значение величины $E_n(W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi))$. Поскольку для функции $f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R})$, где $r = 2, 3, \dots$, ее промежуточные производные $f^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, r-1$, также принадлежат пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, определенный интерес, с нашей точки зрения, представляет изучение поведения величины $E_{n-\nu}(f^{(\nu)})$ на классе $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть Ψ – некоторая мажоранта, определяющая класс функций $W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r = 2, 3, \dots$. Тогда для любого натурального числа $n \geq m + r$ и произвольного натурального числа $\nu \in [1, r-1]$ справедливо равенство

$$\sup\{E_{n-\nu}(f^{(\nu)})_{2,\rho} : f \in W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)\} = \frac{\Psi(1/\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}})}{\sqrt{2^{r-\nu}(n-\nu+1)^{[r-\nu]}}}. \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную функцию $f \in W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$. Используя представление (1), обозначим

$$F(x) := f(x) - S_n(f, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(f) H_k(x), \quad (58)$$

Здесь равенство понимается в смысле сходимости по норме в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Из равенства (58) в силу формулы (2) получаем

$$\|F\|_{2,\rho} = E_n(f)_{2,\rho} = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f). \quad (59)$$

Используя равенство (16), имеем

$$\frac{d^\mu S_n(f, x)}{dx^\mu} = \sum_{k=\mu}^n c_k(f) \sqrt{2^\mu k^{[\mu]}} H_{k-\mu}(x) = S_{n-\mu}(f^{(\mu)}, x), \quad \mu = 1, \dots, r. \quad (60)$$

С учетом соотношений (58) и (60), а также в силу неравенства $n > r > \nu \geq 1$ запишем

$$\begin{aligned} F^{(\nu)}(x) &= f^{(\nu)}(x) - S_{n-\nu}(f^{(\nu)}, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(f) \sqrt{2^\nu k^{[\nu]}} H_{k-\nu}(x), \\ F^{(r)}(x) &= f^{(r)}(x) - S_{n-r}(f^{(r)}, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(f) \sqrt{2^r k^{[r]}} H_{k-r}(x). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\|F^{(\nu)}\|_{2,\rho}^2 = E_{n-\nu}^2(f^{(\nu)})_{2,\rho} = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) 2^\nu k^{[\nu]}, \quad (61)$$

$$\|F^{(r)}\|_{2,\rho}^2 = E_{n-r}^2(f^{(r)})_{2,\rho} = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) 2^r k^{[r]}. \quad (62)$$

Используя соотношение (61) и ряд соображений, примененных Бердниковой и Рафальсоном при доказательстве теоремы 1 из работы [27], запишем

$$\begin{aligned} \|F^{(\nu)}\|_{2,\rho}^2 &= \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^\nu (k^{[r]})^{\nu/r} (c_k^2(f))^{1-\nu/r} \frac{k^{[\nu]}}{(k^{[r]})^{\nu/r}} (c_k^2(f))^{\nu/r} \\ &\leq 2^\nu \sup\{G_r(k) : k \geq n+1\} \sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k^2(f))^{1-\nu/r} (c_k^2(f) k^{[r]})^{\nu/r}, \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$G_r(x) := \frac{(x^{[\nu]})^{1-\nu/r}}{((x-\nu)^{[r-\nu]})^{\nu/r}} = \frac{(x(x-1) \cdots (x-\nu+1))^{1-\nu/r}}{((x-\nu) \cdots (x-r+1))^{\nu/r}}. \quad (64)$$

Применяя неравенство Гёльдера к правой части соотношения (63) и используя формулы (59) и (62), получаем

$$\begin{aligned} \|F^{(\nu)}\|_{2,\rho}^2 &\leq 2^\nu \sup\{G_r(k) : k \geq n+1\} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1-\nu/r} \left\{ \frac{1}{2^r} \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) 2^r k^{[r]} \right\}^{\nu/r} \\ &= \sup\{G_r(k) : k \geq n+1\} \|F\|_{2,\rho}^{2(1-\nu/r)} \|F^{(r)}\|_{2,\rho}^{2\nu/r}. \end{aligned} \quad (65)$$

Учитывая формулу (64), рассмотрим поведение функции G_r при $n+1 \leq x < \infty$. Для этого прологарифмируем обе части равенства (64):

$$\ln G_r(x) = \frac{1}{r} \{ (r-\nu)(\ln x + \ln(x-1) + \dots + \ln(x-\nu+1)) - \nu(\ln(x-\nu) + \dots + \ln(x-r+1)) \}$$

и продифференцируем по x левую и правую части полученного соотношения:

$$\frac{d \ln G_r(x)}{dx} = \frac{(r-\nu)\nu}{r} \left\{ \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-\nu+1} \right) - \frac{1}{r-\nu} \left(\frac{1}{x-\nu} + \dots + \frac{1}{x-r+1} \right) \right\}. \quad (66)$$

Слагаемые $1/(x-r+1)$ и $1/(x-\nu)$ являются соответственно наибольшим и наименьшим в первой и во второй круглых скобках, расположенных в правой части формулы (66). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_r(x)} \frac{dG_r(x)}{dx} &\leq \left(1 - \frac{\nu}{r} \right) \nu \left(\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\nu}{x-\nu+1} - \frac{1}{r-\nu} \cdot \frac{r-\nu}{x-\nu} \right) \\ &= \left(1 - \frac{\nu}{r} \right) \nu \left(\frac{1}{x-\nu+1} - \frac{1}{x-\nu} \right) < 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Поскольку в силу представления (64) функция G_r положительна, из соотношения (67) получаем $dG_r(x)/dx < 0$ для любого $x \geq n+1$. Следовательно, функция G_r является монотонно убывающей по переменной x и

$$\sup\{G_r(x) : x \geq n+1\} = G_r(n+1). \quad (68)$$

С учетом формул (64), (65) и (68) получаем

$$\begin{aligned} \|F^{(\nu)}\|_{2,\rho}^2 &\leq \frac{((n+1) \cdots (n-\nu+2))^{1-\nu/r}}{((n-\nu+1) \cdots (n-r+2))^{\nu/r}} \|F\|_{2,\rho}^{2(1-\nu/r)} \|F^{(r)}\|_{2,\rho}^{2\nu/r} \\ &= \frac{((n+1)^{[\nu]})^{1-\nu/r}}{((n-\nu+1)^{[r-\nu]})^{\nu/r}} \|F\|_{2,\rho}^{2(1-\nu/r)} \|F^{(r)}\|_{2,\rho}^{2\nu/r}. \end{aligned} \quad (69)$$

Используя формулы (59) и (61), (62), а также учитывая, что $f \in W_{2,\rho}^T(\mathbb{K}_m, \Psi)$ и $f^{(r)} \in W_{2,\rho}(\mathbb{K}_m, \Psi)$, из неравенства (69) имеем

$$E_{n-\nu}(f^{(\nu)})_{2,\rho} \leq \frac{((n+1)^{[\nu]})^{(r-\nu)/(2r)}}{((n-\nu+1)^{[r-\nu]})^{\nu/(2r)}} E_n^{1-\nu/r}(W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)) E_{n-r}^{\nu/r}(W_{2,\rho}(\mathbb{K}_m, \Psi)). \quad (70)$$

Исходя из неравенства (70) и соотношения (50), запишем оценку сверху

$$\sup\{E_{n-\nu}(f^{(\nu)})_{2,\rho} : f \in W_{2,\rho}^T(\mathbb{K}_m, \Psi)\} \leq \frac{\Psi(1/\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}})}{\sqrt{2^{r-\nu}(n-\nu+1)^{[r-\nu]}}}. \quad (71)$$

Получим оценку снизу величины, записанной в левой части неравенства (71). Для этого рассмотрим функцию

$$f_2(x) := \frac{\Psi(1/\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}})}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} H_{n+1}(x).$$

Поскольку, как вытекает из формулы (16),

$$f_2^{(\nu)}(x) = \frac{\sqrt{2^\nu(n+1)^{[\nu]}}}{\sqrt{2^r(n+1)^{[r]}}} \Psi\left(\frac{1}{\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}}}\right) H_{n-\nu+1}(x),$$

в силу формулы (2) имеем

$$E_{n-\nu}(f_2^{(\nu)})_{2,\rho} = \frac{\Psi(1/\sqrt{2^m(n-r+1)^{[m]}})}{\sqrt{2^{r-\nu}(n-\nu+1)^{[r-\nu]}}}. \quad (72)$$

Нетрудно показать, что функция f_2 принадлежит шару $\tilde{\mathbb{B}}_{n+2}$, введенному при доказательстве теоремы 5. Так как $\tilde{\mathbb{B}}_{n+2} \subset W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)$, то

$$\sup\{E_{n-\nu}(f^{(\nu)})_{2,\rho} : f \in W_{2,\rho}^r(\mathbb{K}_m, \Psi)\} \geq E_{n-\nu}(f_2^{(\nu)})_{2,\rho}. \quad (73)$$

Очевидно, что требуемое равенство (57) следует из сопоставления оценки сверху (71) и оценки снизу (72), (73). Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С.З. Рафальсон, “О приближении функций в среднем суммами Фурье–Эрмита”, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, № 7, 78–84.
- [2] Г. Фройд, “Об аппроксимации с весом алгебраическими многочленами на действительной оси”, *Докл. АН СССР*, **191**:2 (1970), 293–294.
- [3] В.А. Абилов, “О порядке приближения непрерывных функций арифметическими средними частных сумм ряда Фурье–Эрмита”, *Изв. вузов. Матем.*, 1972, № 3, 3–9.
- [4] В.М. Федоров, “Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева–Эрмита”, *Изв. вузов. Матем.*, 1984, № 6, 55–63.
- [5] Д.В. Алексеев, “Приближение полиномами с весом Чебышева–Эрмита на действительной оси”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1997, № 6, 68–71.
- [6] H.N. Mhaskar, “Weighted polynomial approximation”, *J. Approx. Theory*, **46**:1 (1986), 100–110.
- [7] Z. Ditzian, V. Totik, “ K -functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ ”, *J. Approx. Theory*, **46**:1 (1986), 38–41.
- [8] Н.П. Корнейчук, “О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций”, *Матем. заметки*, **32**:5 (1982), 669–674.
- [9] Н.И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.
- [10] Л.В. Тайков, “Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **20**:3 (1976), 433–438.
- [11] А.А. Лигун, “Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **24**:6 (1978), 785–792.
- [12] В.А. Юдин, “Диофантовы приближения в экстремальных задачах L_2 ”, *Докл. АН СССР*, **251**:1 (1980), 54–57.
- [13] А.Г. Бабенко, “Точное неравенство Джексона–Стечкина для L^2 -приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:6 (1998), 27–52.
- [14] В.И. Иванов, О.И. Смирнов, *Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p* , Тульский гос. ун-т, Тула, 1995.
- [15] В.В. Арестов, В.Ю. Попов, “Неравенства Джексона на сфере в L_2 ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, № 8, 13–20.

- [16] С. Б. Вакарчук, “Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 ”, *Матем. заметки*, **80**:1 (2006), 11–19.
- [17] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Точное неравенство типа Джексона–Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 328–336.
- [18] А. А. Абилов, “Оценка поперечника одного класса функции в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **52**:1 (1992), 3–8.
- [19] A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **7**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [20] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.
- [21] С. Б. Вакарчук, “ K -функционалы и точные значения n -поперечников некоторых классов из L_2 ”, *Матем. заметки*, **66**:4 (1999), 494–499.
- [22] С. Б. Вакарчук, “О K -функционалах и точных значениях n -поперечников некоторых классов в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$ ”, *Матем. заметки*, **71**:4 (2002), 522–531.
- [23] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.
- [24] H. Lebesgue, “Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz”, *Bull. Soc. Math. France*, **38** (1910), 184–210.
- [25] В. А. Абилов, “О коэффициентах ряда Фурье–Эрмита непрерывных функций”, *Изв. вузов. Матем.*, 1969, № 12, 3–8.
- [26] И. А. Шевчук, *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций*, Наукова думка, Киев, 1992.
- [27] И. В. Бердникова, С. З. Рафальсон, “Некоторые неравенства между нормами функции и ее производных в интегральных метриках”, *Изв. вузов. Матем.*, 1985, № 12, 3–6.

С. Б. Вакарчук

Днепропетровский университет
им. Альфреда Нобеля, Украина
E-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Поступило

22.12.2011

Исправленный вариант

23.03.2013