Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Русак, И. В. Рыбаченко, Свойства функций и приближение сумматорными рациональными операторами на действительной оси, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 111–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm93>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:04:06

УДК 517.5

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАТОРНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

В. Н. Русак, И. В. Рыбаченко

В пространстве $C(\mathbb{R})$ построены специальные сумматорные операторы типа Джексона с рациональными ядрами и при подходящем выборе полюсов найдены порядковые оценки для уклонений этих операторов от функций из определенных классов.

Библиография: 10 названий.

Интегральные операторы с рациональными ядрами нашли применение как в рациональных приближениях с фиксированными полюсами, так и в наилучших рациональных аппроксимациях со свободными полюсами на функциональных классах [1]–[4]. Первые исследования по интерполяционным и сумматорным рациональным операторам в пространстве $C(\mathbb{R})$ непрерывных на действительной оси функций были выполнены Е. А. Ровбой [5], [6]. В данной работе предложена иная по сравнению с [6] конструкция сумматорных рациональных операторов джексоновского типа и при подходящем выборе полюсов найдены порядковые оценки для их уклонений от функций из определенных классов.

По заданной системе $\{z_k\}_{k=1}^n$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, введем синус-дробь Бернштейна $N_{2n}(x)$, полагая

$$N_{2n}(x) = \sin 2\Phi_n(x), \quad \Phi_n(x) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k - x). \quad (1)$$

Известно, что $N_{2n}(x)$ – рациональная функция порядка $2n$ с полюсами в точках z_k и $\bar{z}_k$, $k = 1, \dots, n$, и с нулями [1, с. 14]

$$\{x_k\}_{k=1}^{2n}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{2n-1}, \quad x_{2n} = \infty. \quad (2)$$

Заметим также, что из (1) вытекает

$$\Phi'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2}, \quad z_k = \alpha_k + i\beta_k. \quad (3)$$

Полагаем, что

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{(x - x_k)^4 \Phi'_n(x_k)} \stackrel{\text{def}}{=} 2g_n(x), \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант № Ф02Р-057.

и для функции $f \in C(\mathbb{R})$ определяем сумматорный рациональный оператор посредством равенства

$$D_{4n-4}(x, f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2g_n(x)} \sum_{k=1}^{2n-1} f(x_k) \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{(x - x_k)^4 \Phi'_n(x_k)}. \quad (5)$$

Непосредственно из определения ясно, что D_{4n-4} – положительный оператор, точный на константах, и его значение $D_{4n-4}(x, f)$ – рациональная функция порядка $4n - 4$.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$g_n(x) = \frac{2}{3}[\Phi'_n(x)]^3 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{3(\alpha_k - x)^2 - \beta_k^2}{((\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2)^3}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим контурный интеграл

$$J_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_n(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(t)]}{(x - t)^4} \operatorname{ctg} 2\Phi_n(t) dt, \quad (7)$$

где γ – замкнутый кусочно-гладкий контур, окружающий точки $\{z_k, \bar{z}_k\}_{k=1}^n$; нули $\{x_j\}_{j=1}^{2n}$ синус-доби $N_{2n}(x)$ находятся во внешности γ и интегрирование ведется в положительном направлении относительно внешней области. По теореме о вычетах для внешней области будем иметь с учетом (4)

$$\begin{aligned} J_n &= \sum_{k=1}^{2n-1} \operatorname{Res}_{t=x_k} R_n(t) = \sum_{k=1}^{2n-1} \lim_{t \rightarrow x_k} \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(t)]}{(x - t)^4} \cos 2\Phi_n(t) \frac{t - x_k}{\sin 2\Phi_n(t)} \\ &= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{(x - x_k)^4} \frac{1}{2\Phi'_n(x_k)} = g_n(x), \end{aligned} \quad (8)$$

поскольку $R_n(t)$ имеет полюсы 1-го порядка в точках $\{x_k\}_{k=1}^{2n-1}$ и нуль третьего порядка в бесконечно удаленной точке. С другой стороны, применяя теорему о вычетах для внутренней области, получим, считая для определенности все параметры $\{z_k\}_{k=1}^n$ различными:

$$J_n = - \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{Res}_{t=z_k} R_n(t) + \operatorname{Res}_{t=\bar{z}_k} R_n(t) \right). \quad (9)$$

С учетом (1) и формул Эйлера (см. также [1, с. 116]) подынтегральная функция из (7) может быть записана в виде

$$R_n(t) = \frac{1}{16(t - x)^4} \frac{(a_n(x)b_n(t) - a_n(t)b_n(x))^4}{a_n^2(x)a_n^2(t)b_n^2(x)b_n^2(t)} i \frac{a_n^2(t) + b_n^2(t)}{a_n^2(t) - b_n^2(t)}, \quad (10)$$

где

$$a_n(t) = \prod_{k=1}^n (t - z_k), \quad b_n(t) = \prod_{k=1}^n (t - \bar{z}_k),$$

и, следовательно, $R_n(t)$ имеет полюсы второй кратности в точках $\{z_k\}_{k=1}^n$ и $\{\bar{z}_k\}_{k=1}^n$, если все параметры $\{z_k\}_{k=1}^n$ различные.

Вводя еще обозначение

$$G_n(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(t)]}{(x - t)^4},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{t=z_k} R_n(t) &= \operatorname{Res}_{t=z_k} G_n(x, t) \operatorname{ctg} 2\Phi_n(t) = \lim_{t \rightarrow z_k} \frac{\partial}{\partial t} (G_n(x, t) \operatorname{ctg} 2\Phi_n(t) (t - z_k)^2) \\ &= \lim_{t \rightarrow z_k} \left[\frac{\partial}{\partial t} (G_n(x, t) (t - z_k)^2) \operatorname{ctg} 2\Phi_n(t) + G_n(x, t) (t - z_k)^2 \frac{d}{dt} \operatorname{ctg} 2\Phi_n(t) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow z_k} \frac{\partial}{\partial t} (G_n(x, t) (t - z_k)^2) (-i) = -i \operatorname{Res}_{t=z_k} G_n(x, t), \end{aligned} \quad (11)$$

поскольку

$$\left. \frac{d}{dt} \operatorname{ctg} 2\Phi_n(t) \right|_{t=z_k, \bar{z}_k} = 0, \quad \operatorname{ctg} 2\Phi_n(t)|_{t=z_k} = -i, \quad \operatorname{ctg} 2\Phi_n(t)|_{t=\bar{z}_k} = i.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\operatorname{Res}_{t=\bar{z}_k} R_n(t) = i \operatorname{Res}_{t=\bar{z}_k} G_n(x, t). \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в соотношение (9), найдем (см. (8))

$$g_n(x) = J_n = i \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{t=z_k} G_n(x, t) - \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{t=\bar{z}_k} G_n(x, t) \right). \quad (13)$$

Отправляясь теперь от известного соотношения [1, с. 144]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x, t) dt = \frac{2}{3} [\Phi'_n(x)]^3 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{3(\alpha_k - x)^2 - \beta_k^2}{((\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2)^3}, \quad (14)$$

и вычисляя стоящий слева интеграл с помощью вычетов, найдем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x, t) dt = i \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{t=z_k} G_n(x, t) - \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{t=\bar{z}_k} G_n(x, t) \right). \quad (15)$$

Из (13)–(15) вытекает (6), и доказательство леммы 1 завершено.

ЛЕММА 2. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sin^2[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{(x - x_k)^2 \Phi'_n(x_k)} \leq 2\Phi'_n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Доказательство связано с использованием контурного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin^2[\Phi_n(x) - \Phi_n(t)]}{(x - t)^2} \operatorname{ctg} 2\Phi_n(t) dt$$

и соображений, применявшихся при доказательстве предыдущей леммы. Заметим, что на этот раз вычет в бесконечно удаленной точке не будет равен нулю; именно этим объясняется знак неравенства в соотношении (16).

ЛЕММА 3. Для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$g_n(x) \geq \frac{1}{2}[\Phi'_n(x)]^3, \quad g_n(x) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{[(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2]^2}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (6) и (3) имеем

$$g_n(x) > \frac{1}{2}[\Phi'_n(x)]^3 + \frac{1}{6} \left([\Phi'_n(x)]^3 - \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^3}{[(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2]^3} \right) > \frac{1}{2}[\Phi'_n(x)]^3,$$

и первое из соотношений (17) установлено. С другой стороны, после очевидных преобразований имеем

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{[(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2]^2} + \frac{2}{3}[\Phi'_n(x)]^3 - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^3}{[(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2]^3} \\ &> \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{[(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2]^2}, \end{aligned}$$

и второе неравенство (17) также доказано.

ТЕОРЕМА 1. Если $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то

$$|f(x) - D_{4n-4}(x, f)| \leq (\sqrt{2} + 1)\omega\left(\frac{1}{\Phi'_n(x)}\right),$$

где $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности функции $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (5), (6) и свойства модуля непрерывности, для уклонения $|f(x) - D_{4n-4}(x, f)|$ найдем

$$\begin{aligned} |f(x) - D_{4n-4}(x, f)| &\leq \frac{1}{2g_n(x)} \sum_{k=1}^{2n-1} |f(x) - f(x_k)| \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{(x - x_k)^4 \Phi'_n(x_k)} \\ &\leq \frac{1}{2g_n(x)} \sum_{k=1}^{2n-1} \omega(|x - x_k|) \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{(x - x_k)^4 \Phi'_n(x_k)} \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\Phi'_n(x)}\right) \left\{ \frac{\Phi'_n(x)}{2g_n(x)} \sum_{k=1}^{2n-1} \left| \frac{\sin[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{x - x_k} \right|^3 \frac{1}{\Phi'_n(x_k)} + 1 \right\} \\ &= \omega\left(\frac{1}{\Phi'_n(x)}\right) \{S_1 + 1\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя неравенство Коши для сумм и леммы 1–3, будем иметь

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \frac{\Phi'_n(x)}{2g_n(x)} \sqrt{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sin^2[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{(x - x_k)^2 \Phi'_n(x_k)}} \sqrt{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{(x - x_k)^4 \Phi'_n(x_k)}} \\ &\leq \frac{\Phi'_n(x)}{2g_n(x)} \sqrt{2\Phi'_n(x)} \sqrt{2g_n(x)} = \frac{[\Phi'_n(x)]^{3/2}}{\sqrt{g_n(x)}} \leq [\Phi'_n(x)]^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{[\Phi'_n(x)]^{3/2}} = \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда и из неравенства (18) вытекает правильность неравенства, содержащегося в теореме 1.

Назовем функцию $\varphi \in C(\mathbb{R})$ *простой*, если она абсолютно непрерывна, равна нулю вне некоторого отрезка $[a, b]$, именуемого *опорным*, и $\|\varphi'\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq (b - a)^{-1}$.

ЛЕММА 4. Если $\varphi(x)$ – простая функция с опорным отрезком $[\alpha - \beta, \alpha + \beta]$, то для $x \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$|\varphi(x) - D_{4n-4}(x, f)| \leq \frac{6}{\sqrt[3]{g_n(x)}} \frac{\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{16}{g_n(x)} \frac{\beta}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^2}. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$E_x = \left\{ t : |x - t| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{g_n(x)}} \right\}, \quad CE_x = \mathbb{R} \setminus E_x.$$

Тогда с учетом определения простой функции, свойств оператора D_{4n-4} , неравенства Коши и лемм 2–3 будем иметь

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - D_{4n-4}(x, f)| &\leq \frac{1}{2g_n(x)} \sum_{x_k \in E_x} \frac{1}{2\beta} \frac{1}{\sqrt[3]{g_n(x)}} \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{(x - x_k)^4 \Phi'_n(x_k)} \\ &\quad + \frac{1}{2g_n(x)} \sum_{x_k \in CE_x} \frac{1}{2\beta} \frac{|\sin^3[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]|}{|x - x_k|^3 \Phi'_n(x_k)} \\ &\leq \frac{1}{2\beta} \frac{1}{\sqrt[3]{g_n(x)}} + \frac{1}{2\beta} \frac{1}{2g_n(x)} \sqrt{2\Phi'_n(x)} \sqrt{2g_n(x)} \\ &= \frac{1}{2\beta} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{g_n(x)}} + \frac{\sqrt{\Phi'_n(x)}}{\sqrt{g_n(x)}} \right) < \frac{1 + \sqrt[6]{2}}{2\beta \sqrt[3]{g_n(x)}}. \end{aligned}$$

Считая, что $x \in [\alpha - 2\beta, \alpha + 2\beta]$, полученное неравенство можно записать в виде

$$|\varphi(x) - D_{4n-4}(x, f)| < \frac{6}{\sqrt[3]{g_n(x)}} \frac{\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}. \quad (21)$$

Если же $x \notin [\alpha - 2\beta, \alpha + 2\beta]$, то $\varphi(x) = 0$ и

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - D_{4n-4}(x, f)| &\leq \frac{1}{2g_n(x)} \sum_{k=1}^{2n-1} |\varphi(x_k)| \frac{\sin^4[\Phi_n(x) - \Phi_n(x_k)]}{(x - x_k)^4 \Phi'_n(x_k)} \\ &\leq \frac{1}{2g_n(x)} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2(x - x_k)^4 \Phi'_n(x_k)} \\ &\leq \frac{1}{4g_n(x)} \frac{25}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^2} \sum_{\alpha - \beta \leq x_k \leq \alpha + \beta} \frac{1}{\Phi'_n(x_k)} \\ &\leq \frac{1}{g_n(x)} \frac{75}{2\pi} \frac{\beta}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^2} \leq \frac{16\beta}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^2} \frac{1}{g_n(x)}. \quad (22) \end{aligned}$$

Из оценок (21) и (22) вытекает, что при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство (20).

Будем рассматривать также линейные комбинации простых функций $\varphi_k(x)$ с неотрицательными коэффициентами λ_k

$$f(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x)$$

и приближать их сумматорными рациональными операторами $D_{4m-4}(x, f)$, причем параметры z_k , по которым строится оператор (5), выбираются в соответствии с опорными отрезками функций $\varphi_k(x)$, а их кратности определенным образом связываются с весовыми коэффициентами.

ТЕОРЕМА 2. Если $f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k(x)$, где $\lambda_k \geq 0$ и $\{\varphi_k(x)\}$ – простые функции, то существует такой набор параметров $z_1, z_2, \dots, z_m$, $m \leq 2n$, что для определяемого ими сумматорного оператора D_{4m-4} выполняется неравенство

$$|f(x) - D_{4m-4}(x, f)| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sum_{k=1}^n \omega_n = \omega_n, [\alpha_k - \beta_k, \alpha_k + \beta_k], \alpha_k \in \mathbb{R}, \beta_k > 0$, – опорный отрезок простой функции $\varphi_k(x)$. Оператор D_{4m-4} строим по системе параметров

$$z_{kj} = \alpha_k + i\beta_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, \left[n \frac{\lambda_k}{\omega_n} \right] + 1.$$

Количество этих параметров

$$m = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{[n\lambda_k/\omega_n]+1} 1 = \sum_{k=1}^n \left(\left[n \frac{\lambda_k}{\omega_n} \right] + 1 \right) \leq \sum_{k=1}^n \left(n \frac{\lambda_k}{\omega_n} + 1 \right) = \frac{n}{\omega_n} \omega_n + n = 2n.$$

В силу линейности оператора D_{4m-4} и леммы 4 для $x \in \mathbb{R}$ будем иметь

$$\begin{aligned} |f(x) - D_{4m-4}(x, f)| &\leq \frac{6}{\sqrt[3]{g_m(x)}} \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\beta_k}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} \\ &\quad + \frac{16}{g_m(x)} \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\beta_k}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Воспользовавшись леммой (3), можно утверждать, что, во-первых,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{g_m(x)} &\geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^{[n\lambda_k/\omega_n]+1} \frac{\beta_k}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sum_{k=1}^n \left(\left[n \frac{\lambda_k}{\omega_n} \right] + 1 \right) \frac{\beta_k}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sum_{k=1}^n \frac{n\lambda_k}{\omega_n} \frac{\beta_k}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k \beta_k}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} \frac{n}{\omega_n}, \end{aligned} \quad (25)$$

и, во-вторых,

$$g_m(x) \geq \frac{n}{\omega_n} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\beta_k}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2}. \quad (26)$$

С помощью (25) и (26) из неравенства (24) найдем

$$|f(x) - D_{4m-4}(x, f)| \leq \frac{6\sqrt[3]{2}\omega_n}{n} + \frac{32\omega_n}{n} = \frac{C\omega_n}{n}.$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что аппроксимация линейных комбинаций простых функций интегральными рациональными операторами и ее приложения к нахождению порядковых оценок для наилучших рациональных приближений исследованы А. А. Пекарским в [2].

ТЕОРЕМА 3. Если $f(x) \in C(\mathbb{R})$ является четной, невозрастающей и выпуклой вниз на $(0, \infty)$, и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, то существует такой набор параметров $z_1, z_2, \dots, z_m$, $m \leq 2n$, что для определяемого ими сумматорного оператора верна оценка

$$\|f(x) - D_{4m-4}(x, f)\|_{C(\mathbb{R})} = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ – абсциссы тех точек, для которых $f(x_k) = (f(0)/n)k$, $k = 1, \dots, n$. Возьмем четную ломаную $\lambda(x)$ с вершинами в точках $(x_k, f(x_k) - f(0)/n)$, $k = 1, \dots, n$, и в точках $(-x_k, f(x_k) - f(0)/n)$. Считаем, что $\lambda(x) = 0$, если $x \in \mathbb{R} \setminus (-x_1, x_1)$. Очевидно, что выполняется неравенство

$$\|f(x) - \lambda(x)\| \leq \frac{f(0)}{n}. \quad (28)$$

Ломаная $\lambda(x)$ представима в виде линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \varphi_k(x), \quad \lambda_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \leq 2f(0),$$

простых треугольных функций $\varphi_k(x) = \frac{1}{2} \max\{0, 1 - |x|/x_k\}$ и, следовательно, по теореме 2 существует сумматорный оператор D_{4m-4} , $m \leq 2n - 2$, для которого выполнено неравенство

$$\|\lambda(x) - D_{4m-4}(x, \lambda)\| \leq \frac{C_1}{n} f(0). \quad (29)$$

Тогда для уклонения значения этого оператора от функции $f(x)$ с учетом (28) и (29) будем иметь

$$\begin{aligned} \|f(x) - D_{4m-4}(x, f)\|_{C(\mathbb{R})} &\leq \|f(x) - \lambda(x)\|_{C(\mathbb{R})} + \|\lambda(x) - D_{4m-4}(x, \lambda)\|_{C(\mathbb{R})} \\ &\quad + \|D_{4m-4}(x, \lambda) - D_{4m-4}(x, f)\|_{C(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{f(0)}{n} + \frac{C_1}{n} f(0) + \|D_{4m-4}(x, \lambda - f)\|_{C(\mathbb{R})} = O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

и соотношение (27) установлено.

Из теоремы 3 в качестве следствия вытекает известный результат (см. [7]–[9]): если $f(x) \in C[a, b]$ и выпуклая, то для наилучшего рационального приближения верна оценка

$$R_n(f, C[a, b]) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

При интегрировании сумматорных рациональных операторов вида (5) возникают квадратурные формулы для вычисления несобственных интегралов. Если $f(x) \in C(\mathbb{R})$ и существует общий предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, то справедлива квадратурная формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = \pi f(\infty) + \pi \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{(1+x_k^2)\Phi'_{n+1}(x_k)} + \rho_n(f), \quad (30)$$

где $\{x_k\}_{k=1}^n$ суть нули синус-дроби Бернштейна $\sin \Phi_{n+1}(x)$,

$$\Phi_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \arg(z_k - x),$$

$z_0 = i$. Квадратурная формула (30) является точной на рациональных функциях

$$r_{2n}(x) = \frac{p_{2n}(x)}{\prod_{k=1}^n (x - z_k)(x - \bar{z}_k)},$$

т.е. для таких функций остаток квадратурной формулы $\rho_n(r_{2n}) = 0$.

В частном случае, если $z_k = i$,

$$\Phi_{n+1}(x) = (n+1) \arccos \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

равенство (30) приводится к соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = \pi f(\infty) + \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n f(x_k) + \rho_n(f), \quad x_k = \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

В заключение заметим, что основные результаты данной статьи были анонсированы в [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1979.
- [2] Пекарский А. А. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Матем. сб. 1987. Т. 133. № 1. С. 86–102.
- [3] Petrushev P. P., Popov V. A. Rational Approximation of Real Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
- [4] Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y. J. Constructive Approximation. New York, 1996.
- [5] Ровба Е. А. Интерполяционные рациональные операторы типа Фейера и Валле-Пуссена // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 114–121.
- [6] Ровба Е. А. Сумматорные рациональные операторы типа Джексона // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 2. С. 270–277.
- [7] Попов В. А., Петрушев П. П. Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 2. С. 285–292.
- [8] Пекарский А. А. Рациональные приближения абсолютно непрерывных функций с производной из пространства Орлича // Матем. сб. 1982. Т. 117. № 1. С. 114–130.
- [9] Буланов А. П. О порядке приближения выпуклых функций рациональными функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 5. С. 1132–1148.
- [10] Русак В. Н., Рыбаченко И. В. Об одном методе приближения рациональными функциями // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 4. № 5. С. 14–16.