Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Нечепуренко, Эрмитовое спектральное псевдо-
обращение и его приложения, *Матем. заметки*, 2014,
том 96, выпуск 1, 101–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:07:11

Эрмитовое спектральное псевдообращение и его приложения

Ю. М. Нечепуренко

Данная работа посвящена эрмитовому спектральному псевдообращению и его приложениям к анализу, решению и редукции эрмитовых дифференциально-алгебраических систем. Установлены новые явные формулы для решений таких систем и решений связанных с ними обобщенных уравнений Ляпунова. Получены достижимые верхние оценки норм решений. Предложена реализация метода сбалансированного усечения, не требующая вычислений с проекторами на понижающие подпространства.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm9300

1. Введение. Рассмотрим матричный пучок

$$\lambda E - A, \quad (1.1)$$

где A и E соответственно отрицательно и неотрицательно определенные эрмитовы матрицы порядка n . Конечные собственные значения такого пучка, т.е. корни уравнения $\det(\lambda E - A) = 0$, являются вещественными отрицательными [1]. Обозначим через $\mathcal{P}$ спектральный проектор на правое понижающее подпространство, отвечающее множеству конечных собственных значений пучка (1.1). Напомним следующее интегральное представление этого проектора [2]:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda E - A)^{-1} E d\lambda, \quad (1.2)$$

где Γ – любой достаточно гладкий простой положительно ориентированный замкнутый контур, охватывающий все конечные собственные значения пучка (1.1). В силу эрмитовости матриц A и E сопряженная матрица $\mathcal{P}^*$ будет спектральным проектором на левое понижающее подпространство, отвечающее конечным собственным значениям этого пучка, т.е.

$$\mathcal{P}^* = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} E(\lambda E - A)^{-1} d\lambda. \quad (1.3)$$

Работа выполнена при поддержке программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”, проект “Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики”, и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00513).

Для проекторов (1.2), (1.3) справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \mathcal{P}^* E &= E \mathcal{P} = E, \\ \text{b)} \quad \mathcal{P}^* A &= A \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В работе [3] была введена в рассмотрение матрица

$$E^+ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda E - A)^{-1} d\lambda. \quad (1.5)$$

Эту матрицу мы далее будем называть *спектрально-псевдообратной*. Как было показано в [3], E^+ является единственным решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad E^+ E &= \mathcal{P}, \\ \text{b)} \quad E E^+ &= \mathcal{P}^*, \\ \text{c)} \quad E E^+ E &= E, \\ \text{d)} \quad E^+ E E^+ &= E^+. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из равенств (1.6) следует, что E^+ является обобщением псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза [4] и совпадает с ней, если $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$, т.е. когда $\mathcal{P}$ – ортопроектор. В частности, если матрица E невырожденная, то $\mathcal{P} = I$ – единичная матрица порядка n и $E^+ = E^{-1}$.

Равенства (1.6), а)–с) непосредственно следуют из (1.2), (1.3), (1.4), а) и (1.5). Доказательство равенства (1.6), d), предложенное в работе [3], основано на существовании преобразования конгруэнтности, приводящего пучок (1.1) к диагональному виду. Во втором разделе данной работы предложено новое (бескоординатное) доказательство этого равенства и установлены некоторые другие полезные свойства матрицы E^+ . В частности, показано, что спектральные характеристики пучка (1.1) эквивалентны спектральным характеристикам матрицы $E^+ A$.

В разделе 3 мы распространим понятие эрмитового спектрального псевдообращения на произвольные эрмитовы матрицы, освободив его от связи с матричными пучками, что существенно расширит его применение.

В разделах 4–6 демонстрируется полезность спектрального псевдообращения для построения алгоритмов анализа, решения и редукции систем дифференциально-алгебраических уравнений, позволяющих решать эти задачи в условиях компьютерных вычислений за разумное время, в том числе для больших разреженных матриц. Спектральное псевдообращение дает возможность строить такие алгоритмы, обобщая на случай дифференциально-алгебраических систем хорошо зарекомендовавшие себя алгоритмы решения аналогичных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В разделе 4 рассматривается задача Коши для линейной системы дифференциально-алгебраических уравнений с определенными выше матрицами E и A :

$$x(0) = x^0, \quad E \frac{dx}{dt} = Ax + f, \quad (1.7)$$

где $f(t)$ – достаточно гладкая n -компонентная векторная функция. Такие системы возникают в различных приложениях, например, при анализе влияния неидеальности межсоединений в интегральных схемах на прохождение сигнала [5]. С помощью спектрального псевдообращения получены явные формулы для решения задачи Коши (1.7), позволяющие строить эффективные численные алгоритмы.

В разделе 5 рассмотрено обобщенное уравнение Ляпунова

$$XE^+A + AE^+X = -\mathcal{P}^*G\mathcal{P}, \quad X = \mathcal{P}^*X\mathcal{P}. \quad (1.8)$$

Доказаны существование и единственность его решения X при любой матрице G . Показано, как на основе этого уравнения получать достижимые верхние оценки нормы решения задачи Коши (1.7).

В разделе 6 рассмотрена эрмитовая линейная система управлений вида

$$E \frac{dx}{dt} = Ax + Cu, \quad y = Ox, \quad (1.9)$$

где C и O – матрицы размеров соответственно $n \times p$ и $q \times n$. Показано, что с помощью спектрального псевдообращения она сводится к эквивалентной ей линейной системе управлений с грамианами управляемости и наблюдаемости [6], [7], вычисление которых не требует проектирования на понижающие подпространства. Это позволяет предложить для системы (1.9) вариант метода сбалансированного усечения, так же не требующий, в отличие от известных подходов [8], [9], вычислений с проекторами на понижающие подпространства.

2. Свойства матрицы E^+ . Докажем равенство (1.6), d). В силу (1.6), b)

$$E^+EE^+ - E^+ = E^+(\mathcal{P}^* - I) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda E - A)^{-1}(\mathcal{P}^* - I) d\lambda. \quad (2.1)$$

Используя равенства (1.4), несложно проверить, что

$$(\mathcal{P}^* - I)A = -A(I - \mathcal{P}), \quad E(I - \mathcal{P}) = 0.$$

Поэтому $(\mathcal{P}^* - I)A = (\lambda E - A)(I - \mathcal{P})$ и, следовательно,

$$(\lambda E - A)^{-1}(\mathcal{P}^* - I) = (I - \mathcal{P})A^{-1}.$$

Таким образом, подынтегральное выражение в (2.1) не зависит от λ , а значит этот интеграл равен нулю.

Для доказательства единственности матрицы E^+ , удовлетворяющей равенствам (1.6), a), b), d), достаточно проверить, что система уравнений

$$\Delta E = 0, \quad E\Delta = 0, \quad (E^+ + \Delta)E(E^+ + \Delta) = E^+ + \Delta,$$

имеет только тривиальное решение. Раскрывая скобки в третьем уравнении и используя первые два уравнения и равенство (1.6), d), несложно установить, что $\Delta = 0$.

Для обратных матриц справедливы равенства, аналогичные (1.4):

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \mathcal{P}E^+ = E^+\mathcal{P}^* = E^+, \\ \text{b)} \quad & \mathcal{P}A^{-1} = A^{-1}\mathcal{P}^*, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где (2.2), a) выведено из равенств (1.6), a), b), d), а (2.2), b) получено из (1.4), b) умножением слева и справа на A^{-1} .

ЛЕММА 1. Множество ненулевых собственных значений матрицы E^+A и отвечающих им собственных векторов совпадает с множеством конечных собственных значений пучка (1.1) и отвечающих им собственных векторов (таким образом, ненулевые собственные значения этой матрицы отрицательные и имеют полную систему собственных векторов). Правый спектральный проектор $\mathcal{P}$, отвечающий конечным собственным значениям пучка (1.1), является спектральным проектором матрицы E^+A , отвечающим ее ненулевым собственным значениям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \neq 0$ и $\lambda \neq 0$, то

$$E^+Ax = \lambda x \iff Ax = \lambda Ex,$$

что несложно установить, учитывая, что каждое из этих равенств влечет $x = \mathcal{P}x$ (для первого равенства это следует из (2.2), а), и умножая слева первое равенство на E , второе на E^+ и используя равенства (1.4), б) и (1.6) а), б).

Следовательно, множество конечных собственных значений пучка (1.1) совпадает с множеством ненулевых собственных значений матрицы E^+A . Совпадают так же и собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям. Из этого, в частности, следует, что $\mathcal{P}$ – проектор на инвариантное подпространство матрицы E^+A , отвечающее ее ненулевым собственным значениям, а из коммутруемости $\mathcal{P}$ с E^+A :

$$E^+A\mathcal{P} = E^+\mathcal{P}^*A = E^+A = \mathcal{P}E^+A,$$

следует, что $\mathcal{P}$ – спектральный проектор. Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 наряду с (1.4) для спектрального проектора $\mathcal{P}$ справедливо также следующее интегральное представление:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} (\lambda I - E^+A)^{-1} d\lambda,$$

где Γ' – любой достаточно гладкий простой положительно ориентированный замкнутый контур, охватывающий все конечные собственные значения пучка (1.1) и не охватывающий нуль.

Отметим, что

$$E^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (E - \alpha A)^{-1} E (E - \alpha A)^{-1}. \quad (2.3)$$

Действительно, в силу равенств (1.4) и (1.6), а) имеем

$$(E - \alpha A)\mathcal{P} = E(I - \alpha E^+A).$$

Поэтому, если α не является конечным собственным значением пучка (1.1), то

$$\mathcal{P}(I - \alpha AE^+)^{-1} = (E - \alpha A)^{-1}E.$$

Следовательно,

$$(E - \alpha A)^{-1}EE^+E(E - \alpha A)^{-1} = \mathcal{P}(I - \alpha AE^+)^{-1}E^+(I - \alpha AE^+)^{-*}\mathcal{P}^*. \quad (2.4)$$

Перейдя в (2.4) к пределу и воспользовавшись равенствами (1.6), с) и (2.2), а), получим (2.3).

3. Некоторое обобщение. Тот факт, что спектрально-псевдообратная матрица E^+ является единственным решением системы матричных уравнений (1.6), а), b), d), т.е. определяется однозначно проектором $\mathcal{P}$, подсказывает, что спектральному псевдообращению можно придать более общий смысл, не связанный с матричным пучком (1.1)).

ЛЕММА 2. Пусть H – произвольная эрмитовая матрица порядка n , а $\mathcal{Q}$ – произвольный проектор в $\mathbb{C}^n$ такой, что

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \mathcal{Q}^* H = H \mathcal{Q}, \\ \text{b)} \quad & \ker H \subset (I - \mathcal{Q})\mathbb{C}^n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Тогда система уравнений

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & H^+ H = \mathcal{Q}, \\ \text{b)} \quad & H H^+ = \mathcal{Q}^*, \\ \text{c)} \quad & H^+ H H^+ = H^+, \end{aligned} \tag{3.2}$$

однозначно разрешима относительно матрицы H^+ и это решение эрмитовое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение матрицу

$$T(\alpha) = H + \alpha(I - \mathcal{Q})^*(I - \mathcal{Q}),$$

где α – вещественный параметр. Известно [10], что эрмитовая матрица, аналитически зависящая от вещественного параметра, имеет полную ортонормированную систему собственных векторов, аналитически зависящих от этого параметра. Обозначим через $\{q_1(\alpha), \dots, q_n(\alpha)\}$ соответствующую систему собственных векторов матрицы $T(\alpha)$. Собственные значения

$$\mu_j(\alpha) = (T(\alpha)q_j(\alpha), q_j(\alpha)),$$

отвечающие этим собственным векторам, будут так же аналитически зависеть от α и для их производных будет справедлива следующая формула:

$$\frac{d\mu_j}{d\alpha}(\alpha) = \left(\frac{dT}{d\alpha}(\alpha)q_j(\alpha), q_j(\alpha) \right) = \|(I - \mathcal{Q})q_j(\alpha)\|_2^2.$$

Если $\mu_j(0) = 0$, то $q_j(0) \in \ker H$ и в силу (3.1), b) $(I - \mathcal{Q})q_j(0) = q_j(0)$ и, следовательно, $d\mu_j/d\alpha(0) = 1$. Таким образом, найдется такое достаточно малое $\alpha_0 > 0$, что все собственные значения матрицы $T(\alpha_0)$ будут ненулевыми, т.е. эта матрица будет невырожденной. Покажем, что матрица

$$H^+ = \mathcal{Q}T(\alpha_0)^{-1}\mathcal{Q}^*$$

удовлетворяет системе (3.2). Поскольку эта матрица эрмитовая и по определению удовлетворяет равенству $\mathcal{Q}H^+ = H^+$, очевидно достаточно показать, что она удовлетворяет равенству (3.2), а). Учитывая, что $\mathcal{Q}^*H = H\mathcal{Q}$ и $T(\alpha_0)\mathcal{Q} = H\mathcal{Q}$, имеем

$$H^+ H = \mathcal{Q}T(\alpha_0)^{-1}\mathcal{Q}^*H = \mathcal{Q}T(\alpha_0)^{-1}H\mathcal{Q} = \mathcal{Q}T(\alpha_0)^{-1}T(\alpha_0)\mathcal{Q} = \mathcal{Q}.$$

Таким образом, решение системы (3.2) существует. Единственность этого решения доказывается точно так же, как в разделе 2 была доказана единственность матрицы E^+ . Лемма 2 доказана.

Отметим, что, матрица H^+ удовлетворяет, равенству $H = HH^+H$ в том и только том случае, если $H\mathcal{Q} = H$ и, следовательно,

$$\ker H = (I - \mathcal{Q})\mathbb{C}^n.$$

В дополнение к приведенному доказательству леммы 2 наметим альтернативное доказательство существования матрицы H^+ , поясняющее ее структуру. Произвольный проектор в $\mathbb{C}^n$, проектирующий на подпространство размерности $m < n$, представим в виде

$$Q = Y \begin{bmatrix} I' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y^{-1}, \quad (3.3)$$

где I' – единичная матрица порядка m , Y – некоторая невырожденная матрица порядка n . Равенство (3.1), а) справедливо в том и только том случае, если

$$H = Y^{-*} \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix} Y^{-1}, \quad (3.4)$$

где H_{11} и H_{22} некоторые квадратные матрицы порядков соответственно m и $n - m$, а условие (3.1), б) выполнено в том и только том случае, если матрица H_{11} невырождена. Таким образом, если условия (3.1) выполнены, то матрица

$$H^+ = Y \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y^* \quad (3.5)$$

существует. Нетрудно проверить, что матрицы (3.3)–(3.5) удовлетворяют (3.2).

Эрмитову матрицу H , удовлетворяющую условиям леммы 2, мы далее будем называть $\mathcal{Q}$ -псевдообратимой, а соответствующую матрицу H^+ – $\mathcal{Q}$ -псевдообратимой. В силу леммы 2 эта матрица эрмитовая и однозначно определяется выбором проектора $\mathcal{Q}$, удовлетворяющего (3.1). Матрица E^+ , определенная в (1.5), является $\mathcal{P}$ -псевдообратимой для матрицы E , где $\mathcal{P}$ – спектральный проектор, отвечающий конечному спектру пучка (1.1).

Для матриц из леммы 2, при условии неотрицательной определенности матрицы H , справедливо следующее неравенство:

$$\|H^+\|_2^{-1}(x, x) \leq (Hx, x), \quad x \in \mathcal{Q}\mathbb{C}^n. \quad (3.6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (x, x) &= (H^+Hx, H^+Hx) = (H^+(H^+)^{1/2}Hx, (H^+)^{1/2}Hx) \\ &\leq \|H^+\|_2((H^+)^{1/2}Hx, (H^+)^{1/2}Hx) = \|H^+\|_2(Hx, H^+Hx) = \|H^+\|_2(Hx, x). \end{aligned}$$

4. Явные формулы для решений дифференциально-алгебраических систем. Рассмотрим задачу Коши (1.7). Умножая систему уравнений слева на $I - \mathcal{P}^*$ и учитывая, что $(I - \mathcal{P}^*)E = 0$, получим следующее необходимое условие ее корректности:

$$(I - \mathcal{P}^*)(Ax^0 + f(0)) = 0. \quad (4.1)$$

Это условие является так же и достаточным.

ЛЕММА 3. Если условие (4.1) выполнено, то решение задачи Коши (1.7) существует, единственно и представимо в виде

$$x(t) = W(t)(x^0 - g(0)) + \int_0^t W(t-s) \left(\rho g(s) - \frac{dg}{ds}(s) \right) ds + g(t), \quad (4.2)$$

где $g = (\rho E - A)^{-1}f$, ρ – произвольное число, не являющееся конечным собственным значением пучка (1.1), а

$$W(t) = e^{tE^+A} \mathcal{P}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замена переменных

$$x = z + g \quad (4.4)$$

сводит (1.7) к следующей задаче Коши:

$$z(0) = z^0 = x^0 - g(0), \quad E \frac{dz}{dt} = Az + E \left(\rho g - \frac{dg}{dt} \right). \quad (4.5)$$

Умножая второе уравнение в (4.5) слева на $I - \mathcal{P}^*$, несложно убедиться, что $z(t) \in \mathcal{P}\mathbb{C}^n$. Поэтому, умножая это уравнение слева на E^+ , задачу Коши (4.5) можно привести к виду

$$z(0) = z^0, \quad \frac{dz}{dt} = E^+Az + \mathcal{P} \left(\rho g - \frac{dg}{dt} \right). \quad (4.6)$$

Если выполнено условие (4.1), то $z^0 \in \mathcal{P}\mathbb{C}^n$. Таким образом, (4.2) непосредственно следует из (4.4) и (4.6), а единственность этого решения следует из единственности решения задачи Коши (4.6). Лемма 3 доказана.

Обозначим через F_k^α ортонормированные функции Лагерра:

$$F_k^\alpha(t) = \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha t} L_k(2\alpha t),$$

где $L_k(s)$ – многочлены Лагерра, т.е. многочлены, ортонормированные на $[0, +\infty)$ с весом $\exp(-s)$. Отметим, что

$$\int_0^\infty F_k^\alpha(t) F_l^\alpha(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases} \quad (4.7)$$

ЛЕММА 4. При любом $\alpha > 0$ справедливо разложение

$$W(t) = \sum_{k=0}^\infty M_k^\alpha F_k^\alpha(t), \quad t \geq 0, \quad (4.8)$$

где

$$M_k^\alpha = \sqrt{2\alpha} \{ (A - \alpha E)^{-1} (A + \alpha E) \}^k (\alpha E - A)^{-1} E. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\alpha > 0$. Для всех $s \geq 0$ и $\beta > -1/2$ справедлива следующая формула [11]:

$$e^{-\beta s} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}} L_k(s).$$

Отсюда, делая замену переменных $\beta = \tilde{\beta}/(2\alpha)$, $s = 2\alpha t$ и вводя обозначение $\gamma = \tilde{\beta} + \alpha$, несложно вывести формулу

$$e^{-\gamma t} = \sqrt{2\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma - \alpha)^k}{(\gamma + \alpha)^{k+1}} F_k^{\alpha}(t), \quad (4.10)$$

справедливую при всех $\gamma > 0$ и $t \geq 0$. Из (4.10), в силу леммы 1, следует, что

$$e^{tE^+A} \mathcal{P} = \sqrt{2\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \{(E^+A - \alpha I)^{-1}(E^+A + \alpha I)\}^k (\alpha I - E^+A)^{-1} \mathcal{P} F_k^{\alpha}(t), \quad t \geq 0.$$

Остается показать, что

$$\begin{aligned} & \{(E^+A - \alpha I)^{-1}(E^+A + \alpha I)\}^k (\alpha I - E^+A)^{-1} \mathcal{P} \\ &= \{(A - \alpha E)^{-1}(A + \alpha E)\}^k (\alpha E - A)^{-1} E. \end{aligned}$$

Это равенство станет очевидным, если учесть, что в силу (1.4), а) справедливо равенство $E = E\mathcal{P}$ и в силу леммы 1 сужения матриц E^+A и $A^{-1}E$ на их общее инвариантное подпространство $\mathcal{P}\mathcal{C}$ являются взаимно-обратными. Лемма 4 доказана.

Отметим, что для матрицы M_k^{α} в разложении (4.8) можно получить так же следующее представление:

$$M_k^{\alpha} = \sqrt{2\alpha} (\alpha E - A)^{-1} E \{(A - \alpha E)^{-1}(A + \alpha E)\}^k. \quad (4.11)$$

Леммы 3 и 4 дают явное представление решения задачи Коши (1.7), свободное от матриц E^+ и $\mathcal{P}$, что позволяет разрабатывать эффективные численные алгоритмы. Опишем в качестве примера один из таких алгоритмов. Пусть $x^0 = 0$, $f(t) = Cu(t)$, где C – заданная матрица размера $n \times p$, $p \ll n$, $u(t)$ – достаточно гладкая p -компонентная векторная функция и $u(0) = 0$. Тогда, выбрав $\alpha > 0$ и оставив в разложении (4.8) только первые m членов, для приближенного решения соответствующей задачи Коши (1.7) в силу лемм 3 и 4 получим следующую формулу:

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{m-1} S_k \varphi_k(t) + Su(t), \quad (4.12)$$

где

$$\varphi_k(t) = \int_0^t F_k^{\alpha}(t-s) \left(\rho u(s) - \frac{du}{ds}(s) \right) ds, \quad (4.13)$$

а S и S_k – матрицы размера $n \times p$, для которых справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$(\rho E - A)S = C, \quad (\alpha E - A)S_0 = \sqrt{2\alpha} ES, \quad (\alpha E - A)S_k = -(\alpha E + A)S_{k-1}. \quad (4.14)$$

Формула (4.12) особенно удобна, если требуется решить задачу Коши с большими разреженными матрицами A и E для большого набора различных функций u . Вычисление матриц (4.14) при всех $k \leq m-1$ потребует решения $(m+1)p$ систем с эрмитовой положительно определенной матрицей. Для этого можно воспользоваться стандартными алгоритмами [1]: разложением Холецкого с перестановками

либо предобусловленным методом сопряженных градиентов. Оба этих алгоритма требуют некоторых предварительных вычислений с матрицей системы, существенно более затратных, чем последующее решение системы с этой матрицей и любой заданной правой частью. Если положить $\rho = \alpha$, то эти предварительные вычисления потребуются выполнить только один раз. После того, как матрицы, входящие в (4.12), найдены, для каждой функции u достаточно вычислить свертки (4.13) и воспользоваться формулой (4.12). Поскольку $p \ll n$, вычисление сверток будет сравнительно малозатратным. Последующее вычисление правой части в (4.12) при каждом фиксированном t потребует $2(m+1)pn$ арифметических операций.

5. Оценка нормы решения.

ЛЕММА 5. *Решение уравнения (1.8) существует, единственно и представимо в виде*

$$X = \int_0^\infty W(t)^* G W(t) dt, \quad (5.1)$$

где $W(t)$ – матрица (4.3). Причем, если матрица G эрмитовая положительно определенная, то матрица X $\mathcal{P}$ -псевдообратима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матричнозначную функцию

$$Z(t) = W(t)^* G W(t).$$

В силу леммы 1 и отрицательности конечных собственных значений пучка (1.1) имеем

$$Z(\infty) = 0, \quad X = \int_0^\infty Z(t) dt < \infty.$$

Поэтому, интегрируя от 0 до ∞ тождество

$$\frac{d}{dt} Z(t) = A E^+ Z(t) + Z(t) E^+ A,$$

получим первое равенство в (1.8) с матрицей X вида (5.1), т.е. по своему определению удовлетворяющей второму равенству.

Доказательство единственности решения обобщенного уравнения Ляпунова сводится к доказательству отсутствия у системы уравнений

$$\Delta E^+ A + A E^+ \Delta = 0, \quad \Delta = \mathcal{P}^* \Delta \mathcal{P}, \quad (5.2)$$

нетривиальных решений. Введем в рассмотрение матрицу $K = E^+ A - (I - \mathcal{P})$. Нетрудно проверить, что ее спектр состоит из ненулевых собственных значений матрицы $E^+ A$ и собственного значения -1 кратности, совпадающей с кратностью нулевого собственного значения матрицы $E^+ A$. Таким образом, все собственные значения матрицы K отрицательные. Если матрица Δ удовлетворяет уравнениям (5.2), то она, очевидно, удовлетворяет и уравнению

$$\Delta K + K^* \Delta = 0.$$

Последнее уравнение, в силу отрицательности спектра матрицы K , имеет только тривиальное решение [2].

Для доказательства $\mathcal{P}$ -псевдообратимости матрицы X в случае $G = G^* > 0$ достаточно показать, что $\ker X \subset (I - \mathcal{P})\mathbb{C}^n$. Умножая первое уравнение в (1.8) на вектор x и затем умножая полученное равенство скалярно на тот же вектор, нетрудно проверить, что если $Xx = 0$, то $(G\mathcal{P}x, \mathcal{P}x) = 0$ и, следовательно, $\mathcal{P}x = 0$, т.е. $x \in (I - \mathcal{P})\mathbb{C}^n$. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть X – решение обобщенного уравнения Ляпунова (1.8) с произвольной эрмитовой положительно определенной матрицей G и X^+ – $\mathcal{P}$ -псевдообратная матрица. Справедливо следующее неравенство:

$$\|W(t)\|_2 \leq ce^{-\kappa t}, \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

где

$$c = \sqrt{\|X\|_2 \|X^+\|_2}, \quad \kappa = \frac{1}{2\lambda_{\max}(G^{-1}X)},$$

а $\lambda_{\max}(\cdot)$ означает максимальное собственное значение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя обычному подходу к выводу оценок нормы матричной экспоненты на основе уравнений Ляпунова [2], введем в рассмотрение вектор $x(t) = W(t)x^0$, где x^0 произвольный n -компонентный вектор. В силу уравнения (1.8), тождества $x(t) \equiv \mathcal{P}x(t)$ и равенства

$$\inf_{y \neq 0} \frac{(Gy, y)}{(Xy, y)} = \left(\sup_{y \neq 0} \frac{(Xy, y)}{(Gy, y)} \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda_{\max}(G^{-1}X)} = 2\kappa$$

имеем

$$\frac{d}{dt}(Xx, x) = (XE^+Ax, x) + (AE^+Xx, x) = -(Gx, x) \leq -2\kappa(Xx, x).$$

Поэтому

$$(Xx, x) \leq e^{-2\kappa t}(Xx^0, x^0), \quad t \geq 0.$$

Воспользовавшись оценкой (3.6) и учитывая произвольность выбора x^0 , приходим к (5.3). Лемма 6 доказана.

Отметим, что выбирая $G = -2A \Rightarrow X = E$, мы получим (5.3) с $c = \sqrt{\|E\|_2 \|E^+\|_2}$ и $\kappa = -\lambda_{\max}(A, E)$, где $\lambda_{\max}(A, E)$ означает максимальное конечное собственное значение пучка (1.1). Эта оценка достижимая, поскольку превращается в точное равенство, например, при $E = I$. Для ее численной реализации необходимо оценить сверху $\lambda_{\max}(A, E)$ и нормы матриц E и E^+ . Две первые из этих величин можно оценить с помощью стандартных алгоритмов непосредственно, в том числе для больших разреженных матриц [12], а величину $\|E^+\|_2$ – используя формулу (2.3) [3], [13].

Неравенство (5.3) позволяет получать различные оценки нормы решения задачи Коши (1.7) на основе представления (4.2). Для этого может потребоваться оценить снизу еще и норму матрицы $(\rho E - A)^{-1}$, что так же можно сделать с помощью алгоритмов, описанных в [12], в том числе для больших разреженных матриц.

6. Сбалансированное усечение. С целью снижения вычислительной сложности задач управления для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в различных прикладных областях давно и широко применяют редукцию размерности, в том числе сбалансированное усечение, которое выгодно отличается от других методов редукции наличием априорной оценки погрешности [6], [7]. Этот метод позволяет эффективно использовать разреженность и применим к системам с разреженными матрицами больших размеров.

Существуют варианты сбалансированного усечения и для дифференциально-алгебраических систем. Однако их эффективность, как правило, существенно ниже. Связано это главным образом с применением проекторов на понижающие подпространства, отвечающие конечным и бесконечному собственным значениям. Если размерность каждого из этих взаимно дополнительных подпространств велика, то вычисления с такими проекторами и вычисление их самих становятся очень затратным. В данном разделе для линейной системы управления вида (1.9) предложен вариант метода сбалансированного усечения, не требующий, в отличие от известных подходов [8], [9] вычислений с проекторами на понижающие подпространства.

Замена переменных, описанная в доказательстве леммы 3, сводит систему (1.9) к эквивалентной ей системе

$$E \frac{dz}{dt} = Az + ESv, \quad w = Oz, \quad (6.1)$$

где

$$z(t) \in \mathcal{P}\mathbb{C}^n, \quad v(t) = \rho u(t) - \frac{du}{dt}(t), \quad S = (\rho E - A)^{-1}C,$$

а ρ – произвольное число, не являющееся конечным собственным значением пучка (1.1). При этом выход системы (1.9) будет представим в виде $y = w + OSu$.

Система (6.1) при условии $z(t) \in \mathcal{P}\mathbb{C}^n$ эквивалентна системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = E^+ Az + \mathcal{P}Sv, \quad w = O\mathcal{P}z, \quad (6.2)$$

для которой можно определить понятия управляемости и наблюдаемости обычным образом. А именно, будем говорить, что система (6.2) *управляема*, если для любого вектора $z(0) \in \mathcal{P}\mathbb{C}^n$ существует функция $v \in L_2(-\infty, 0)^p$ такая, что

$$z(0) = \int_{-\infty}^0 W(-t)Sv(t)dt,$$

где $W(t)$ – матрица (4.3), т.е. любое состояние $z(0) \in \mathcal{P}\mathbb{C}^n$ можно достичь за счет некоторого управления из $L_2(-\infty, 0)^p$. Будем говорить, что система (6.2) *наблюдаема*, если для любой заданной функции

$$w(t) = OW(t)z(0), \quad t \geq 0,$$

где $z(0) \in \mathcal{P}\mathbb{C}^n$, можно найти вектор $z(0)$, т.е. при управлении $v(t) \equiv 0$ по заданному наблюдению $w(t)$ можно восстановить порождающее его начальное состояние $z(0)$.

Управляемость и наблюдаемость системы (6.2) зависят соответственно от свойств грамианов управляемости и наблюдаемости

$$P = \int_0^\infty W(t)SS^*W(t)^* dt, \quad Q = \int_0^\infty W(t)^*O^*OW(t) dt. \quad (6.3)$$

Эти грамианы являются единственными решениями обобщенных уравнений Ляпунова

$$PAE^+ + E^+AP = -\mathcal{P}SS^*\mathcal{P}^*, \quad P = \mathcal{P}P\mathcal{P}^*, \quad (6.4)$$

$$QE^+A + AE^+Q = -\mathcal{P}^*O^*O\mathcal{P}, \quad Q = \mathcal{P}^*Q\mathcal{P}, \quad (6.5)$$

соответственно, что для (6.5) непосредственно следует из леммы 5, а для (6.4) доказывается по аналогии с доказательством этой леммы.

ЛЕММА 7. Система (6.2) управляема в том, и только том случае, если матрица P $\mathcal{P}^*$ -псевдообратима. Система (6.2) наблюдаема в том, и только том случае, если матрица Q $\mathcal{P}$ -псевдообратима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы приводить не будем, поскольку оно фактически повторяет доказательство аналогичного утверждения (см. [6], [7]) для случая, когда пространством состояний является все пространство $\mathbb{C}^n$. Разница лишь в том, что в данном случае роль матриц, обратных грамианам, играют их псевдообратные матрицы.

К системе (6.2) можно применить классический вариант метода сбалансированного усечения. Для этого надо вычислить грамианы управляемости и наблюдаемости в виде $P = LL^*$, $Q = RR^*$, где L и R – матрицы полного столбцового ранга. После этого нужно вычислить матрицы $X = LV\Sigma^{-1/2}$ и $Y = RU\Sigma^{-1/2}$, где U и V – унитарные прямоугольные, т.е. U^*U и V^*V – единичные матрицы, а Σ – диагональная квадратная матрица с положительными диагональными элементами, расположенными в порядке невозрастания, такие, что

$$R^*L = U\Sigma V^*. \quad (6.6)$$

Отметим, что правая часть (6.6) это неполное сингулярное разложение [1] левой части, т.е. сингулярное разложение, в котором оставлены только ненулевые сингулярные числа (элементы матрицы Σ) и отвечающие им нормированные сингулярные векторы (столбцы матриц U и V).

Пусть далее P и Q соответственно $\mathcal{P}^*$ и $\mathcal{P}$ псевдообратимы. Тогда

$$XY^* = \mathcal{P}. \quad (6.7)$$

Действительно, основываясь на представлениях матриц $\mathcal{P}$, P и Q , аналогичных представлениям (3.3), (3.4), нетрудно доказать, что

$$\text{rank}\{\mathcal{P}\} = \text{rank}\{P\} = \text{rank}\{Q\} = \text{rank}\{PQ\}.$$

Отсюда следует, что, во-первых, $I - \mathcal{P}$ – спектральный проектор на ядро матрицы PQ , во-вторых, что матрица R^*L – квадратная невырожденная, а (6.6) – это ее полное сингулярное разложение. Поэтому,

$$X\Sigma X^* = P, \quad Y\Sigma Y^* = Q.$$

Учитывая теперь, что матрицы X и Y определены так, что матрица Y^*X единичная, нетрудно показать, что матрица $I - XY^*$ также является спектральным проектором на ядро матрицы PQ . В силу единственности такого проектора имеем (6.7).

Замена переменных $z = X\eta$ и проектирование на подпространство $\text{span}\{Y\}$ сводит систему (6.2) к системе

$$\frac{d\eta}{dt} = T\eta + \Phi v, \quad w = \Psi\eta, \quad (6.8)$$

где

$$T = Y^*E^+AX, \quad \Phi = Y^*\mathcal{P}S, \quad \Psi = O\mathcal{P}X.$$

Используя равенство (6.7), несложно показать, что эта система эквивалентна системе (6.2) с $z(t) \in \mathcal{P}\mathbb{C}^n$ (для этого достаточно сравнить коэффициенты разложения передаточных функций этих систем в окрестности бесконечно удаленной точки), а ее грамианы управляемости и наблюдаемости равны Σ . Более того, вычисление матриц системы (6.8) не требует матриц E^+ и $\mathcal{P}$, так как в силу (6.7) имеем

$$Y^*\mathcal{P} = Y^*, \quad \mathcal{P}X = X, \quad (Y^*EX)(Y^*E^+AX) = Y^*AX,$$

и, следовательно,

$$T = (Y^*EX)^{-1}(Y^*AX), \quad \Phi = Y^*S, \quad \Psi = OX. \quad (6.9)$$

Редуцированную систему дает главная часть системы (6.8), (6.9), т.е. вместо матрицы T берется ее главная подматрица $\tilde{T}$ порядка m , а вместо матриц Φ и Ψ — их подматрицы $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$, состоящие из первых m строк и столбцов, соответственно. Таким образом, исходная система (1.9) будет редуцирована к системе

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dt} = \tilde{T}\tilde{\eta} + \tilde{\Phi}\left(\rho u - \frac{du}{dt}\right), \quad \tilde{y} = \tilde{\Psi}\tilde{\eta} + \Omega u, \quad (6.10)$$

с определенными выше матрицами $\tilde{T}$, $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ размеров соответственно $m \times m$, $m \times p$ и $q \times m$, и матрицей $\Omega = OS$ размера $q \times p$. Погрешность такой редукции оценивается на основе известной [6], [7] оценки погрешности сбалансированного усечения следующим образом:

$$\|y - \tilde{y}\|_{L_2(-\infty, \infty)^q} \leq 2s_m \left\| \rho u - \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(-\infty, \infty)^p},$$

где s_m означает сумму “отброшенных” диагональных элементов матрицы Σ , т.е. с $(m+1)$ -го по последний.

Грамианы (6.3) можно так же вычислить без использования матриц E^+ и $\mathcal{P}$, например, на основе представлений

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \sum_{k=0}^{\infty} M_k^\alpha S S^* M_k^{\alpha*}, \\ \text{b) } Q &= \sum_{k=0}^{\infty} M_k^{\alpha*} O^* O M_k^\alpha, \end{aligned} \quad (6.11)$$

справедливых в силу леммы 4 и равенства (4.7) при всех $\alpha > 0$, где M_k^α означает матрицу (4.9) в (6.11), а), и (4.11) в (6.11), б). Поясним устройство такого типа алгоритмов на примере вычисления грамиана управляемости.

Обозначим через P_k сумму первых 2^k членов ряда (6.11), а). Нетрудно доказать по индукции, что $P_k = L_k L_k^*$, где L_k – матрицы, определенные следующим образом:

$$L_0 = \sqrt{2\alpha}(\alpha E - A)^{-1}ES, \quad L_k = [L_{k-1}, \{(\alpha E - A)^{-1}(\alpha E + A)\}^{2^{k-1}} L_{k-1}].$$

Вычисление матрицы L_k по уже вычисленной матрице L_{k-1} сводится к умножениям на матрицу $\alpha E + A$ и решению систем с эрмитовой положительно определенной матрицей $\alpha E - A$. После вычисления каждой новой матрицы L_k будем выполнять сингулярное разложение $L_k = U_k D_k V_k^*$, где D_k – квадратная диагональная матрица ненулевых сингулярных чисел, упорядоченных по невозрастанию, а U_k и V_k – матрицы отвечающих им ортонормированных сингулярных векторов, и полагать $L_k = \tilde{U}_k \tilde{D}_k$, где $\tilde{D}_k$ – главная подматрица порядка n_k матрицы D_k , $\tilde{U}_k$ – матрица, составленная соответственно из первых n_k столбцов матрицы U_k , а n_k выбрано так, что $\tilde{D}_k$ содержит все сингулярные числа, больше либо равные максимальному сингулярному числу, умноженному на заданную величину $\text{tol} \geq 0$. Такая модификация алгоритма в случае $\text{tol} = 0$ не изменит $L_k L_k^*$ в условиях точных вычислений, но ограничит число столбцов матрицы L_k величиной $\text{rank } E$.

Описанная выше редукция системы (1.9) к системе (6.10) не требует вычислений с проекторами на понижающие подпространства. Для разработки на ее основе практического алгоритма, конвертирующего это преимущество в существенное уменьшение вычислительных затрат, потребуется обычная в таких случаях модификация алгоритма вычисления матриц L и R такая, что бы модифицированный алгоритм вычислял матрицы размера $n \times N$, дающие приближенные разложения $P \approx LL^*$, $Q \approx RR^*$, где $N \ll n$, но больше (обычно в несколько раз) числа m внутренних переменных редуцированной системы. При этом в процессе вычислений не должны появляться матрицы слишком большого размера. Этого можно добиться, выбирая параметр $\text{tol} > 0$ и/или ограничивая величины n_k . Остальные вычисления, связанные с получением редуцированной системы (6.10), т.е. сингулярное разложение (6.6) и вычисление матриц X , Y и (6.9) оставляем без изменений.

Матрицы L и R можно также вычислять, решая уравнения (6.4) и (6.5) методом переменных направлений, позволяющим проводить вычисления на каждом шаге с другим параметром α , что, в свою очередь, позволяет ускорить сходимость. Выписав формулы любого из многочисленных вариантов этого метода (см. [14], [15] и их ссылки), далее можно преобразовать эти формулы к виду свободному от матриц E^+ и $\mathcal{P}$, как это было сделано при доказательстве леммы 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The John Hopkins Univ. Press, London, 1991.
- [2] С. К. Годунов, *Современные аспекты линейной алгебры*, Научная книга, Новосибирск, 1997.
- [3] Ю. М. Нечепуренко, Г. В. Овчинников, “Верхние оценки норм решений эрмитовых систем обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений”, *Уфимск. матем. журн.*, 1:4 (2009), 125–132.

- [4] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [5] M. Celik, L. Pileggi, A. Odabasioglu, *IC Interconnect Analysis*, Kluwer Acad. Publ., Norwell, MA, 2002.
- [6] B. C. Moore, “Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **26**:1 (1981), 17–32.
- [7] K. Glover, “All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds”, *Internat. J. Control*, **39**:6 (1984), 1115–1193.
- [8] T. Stykel, “Balanced truncation model reduction for semidiscretized Stokes equation”, *Linear Algebra Appl.*, **415**:2-3 (2006), 262–289.
- [9] M. Heinkenschloss, D. C. Sorensen, K. Sun, “Balanced truncation model reduction for a class of descriptor systems with application to the Oseen equations”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **30**:2 (2008), 1038–1063.
- [10] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Comput. Sci. Appl. Math., Academic Press, New York, 1982.
- [11] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1979.
- [12] *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems*, Software Environ. Tools, **11**, eds. Zh. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, H. Van der Vorst, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [13] Yu. M. Nечепуренко, G. V. Ovchinnikov, “An estimation of voltage settling time for RC-circuits”, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **25**:3 (2010), 253–259.
- [14] J.-R. Li, J. White, “Low-rank solution of Lyapunov equations”, *SIAM Rev.*, **46**:4 (2004), 693–713.
- [15] V. Druskin, L. Knizhnerman, V. Simoncini, “Analysis of the rational Krylov subspace and ADI methods for solving the Lyapunov equation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **49**:5 (2011), 1875–1898.

Ю. М. Нечепуренко

Институт вычислительной математики РАН,

г. Москва

E-mail: yumnech@yandex.ru

Поступило

13.12.2011

Исправленный вариант

29.01.2014