Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Петрушов, Асимптотические оценки функций на основе поведения их преобразования Лапласа вблизи особых точек, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 920–931

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:59:44

Асимптотические оценки функций на основе поведения их преобразования Лапласа вблизи особых точек

О. А. Петрушов

В статье рассматривается связь между поведением действительной функции $\nu(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ и поведением преобразования Лапласа $F[\nu](s)$ заряда $d\nu(t)$

$$F[\nu](s) = \int_0^\infty e^{-st} d\nu(t)$$

вблизи его особой точки.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm9302

1. Вступление. В статье рассматривается связь между поведением действительной функции $\nu(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ и поведением преобразования Лапласа $F[\nu](s)$ заряда $d\nu(t)$

$$F[\nu](s) = \int_0^\infty e^{-st} d\nu(t) \quad (1.1)$$

вблизи его особой точки. Известна классическая тауберова теорема (см. [1; с. 192]), которая является следствием результата Караматы (см. [1; с. 191]):

ТЕОРЕМА А. Пусть $\nu(x)$ – неубывающая функция, интеграл (1.1) сходится при $\operatorname{Re} s > 0$. Если при $s \rightarrow 0+$ выполняется асимптотическое равенство

$$F[\nu](s) \sim \frac{A}{s^\gamma}, \quad A > 0, \quad \gamma > 0,$$

то

$$\nu(x) \sim \frac{Ax^\gamma}{\Gamma(\gamma + 1)}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Если верно асимптотическое равенство для $F[\nu](s)$ с некоторым остаточным членом, то можно оценить остаточный член в асимптотике $\nu(x)$. Справедлива теорема Харди–Литтлвуда с остаточным членом Фрейда (см. [2; с. 50]):

ТЕОРЕМА В. Пусть $\nu(x)$ – неубывающая функция, интеграл (1.1) сходится при $\operatorname{Re} s > 0$. Если для некоторого неотрицательного числа γ при $s \rightarrow 0+$ выполняется асимптотическое равенство

$$F[\nu](s) = A \frac{\Gamma(1 + \gamma)}{s^\gamma} (1 + r(s)),$$

где

$$|r(s)| \leq C_0 s^\varepsilon,$$

$A > 0$, $C_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ – постоянные, то

$$\nu(x) = Ax^\gamma(1 + \rho(x)),$$

где

$$|\rho(x)| < \frac{C_1}{\ln x},$$

$C_1 > 0$ – постоянная.

В данной статье рассматривается случай, когда $\nu(x)$ не монотонна и особенность преобразования Лапласа не лежит на действительной прямой.

В 1967 г. Катаи [3] доказал общую теорему. В терминах преобразования Лапласа она в предположении о мероморфности $F[\nu](s)$ в некоторой полуплоскости, разложении Лорана в некотором полюсе $\theta_2 + it_0$, $\theta_2 > 0$, $t_0 \neq 0$, и поведении $F[\nu](s)$ в некоторых областях дает следующую оценку.

ТЕОРЕМА С. Для достаточно большого T имеем

$$\max_{T \leq x \leq \kappa T} \frac{\nu(x)}{e^{\theta_2 x} x^{k-1}} > \delta, \quad \min_{T \leq x \leq \kappa T} \frac{\nu(x)}{e^{\theta_2 x} x^{k-1}} < -\delta,$$

где $\delta > 0$, $\kappa > 1$ – некоторые константы, которые вычисляются по поведению $F[\nu](s)$, k – кратность полюса.

В нашей статье в п. 2 доказываются теоремы об осцилляции $\nu'(x)$, $\nu(x)$ при более слабых ограничениях на особенность и область аналитичности $F[\nu](x)$.

Обозначим $F[\nu](s)$ через $F(s)$.

ТЕОРЕМА 1. Дана действительная функция, абсолютно непрерывная на каждом отрезке $[0, R]$, $R > 0$, а интеграл (1.1) сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma_1$. Предположим, что функция $F(s) = F[\nu](s)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $F(s)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность $[\sigma_0, \sigma_1]$;
- 2) $F(s)$ аналитически продолжается в некоторую область G такую, что $G \subseteq \{\operatorname{Re} s > \sigma_0\}$, и $(\sigma_0 + it_0, \sigma_0 + it_0 + a) \subseteq G$, где $a > 0$, $t_0 \neq 0$;
- 3) существуют числа $c > 0$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ такие, что

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0+} \frac{|F(\sigma_0 + it_0 + x)|}{x^{-\alpha} (-\ln x)^n} \geq c. \quad (1.2)$$

Тогда справедливы неравенства

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu'(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} \geq \frac{c}{\Gamma(\alpha)}, \quad (1.3)$$

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu'(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} \leq -\frac{c}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.4)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть справедливы все условия теоремы 1 кроме одного: действительная функция ν имеет лишь ограниченную вариацию на любом отрезке $[0, R]$, $R > 0$. Тогда в случае $\sigma_0 > 0$ справедливы следующие неравенства:

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} \geq \frac{c}{\Gamma(\alpha) |\sigma_0 + it_0|},$$

$$\underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} \leq \frac{-c}{\Gamma(\alpha) |\sigma_0 + it_0|},$$

а в случае $\sigma_0 \leq 0$ справедливы следующие неравенства:

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u) - \nu(0) - F(0)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} \ln u^n} \geq \frac{c}{\Gamma(\alpha) |\sigma_0 + it_0|},$$

$$\underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u) - \nu(0) - F(0)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} \leq \frac{-c}{\Gamma(\alpha) |\sigma_0 + it_0|}.$$

Данные результаты позволяют оценивать осцилляцию $\nu(x)$ при более общих, чем у Катаи, условиях на $F[\nu](s)$.

В п. 3 доказываются следствия теорем 1, 2 для рядов и интегралов Дирихле.

С использованием этих результатов в п. 4 выводятся связи между расположением нулей дзета-функции Римана с учетом кратностей и поведением функций

$$M_a(x) = \sum_{n < x} \frac{\mu(n)}{n^a},$$

где $0 \leq a \leq 1/2$.

В п. 5 доказываются точность неравенств, полученных в теоремах 1, 2, а именно, что константа в этих теоремах может быть увеличена не более чем в два раза.

2. Теоремы об особенностях преобразования Лапласа. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. При $\operatorname{Re} s > 0$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ справедливо равенство

$$\frac{(-\ln s)^n}{s^\alpha} = \int_0^\infty e^{-su} u^{\alpha-1} P_n(\ln u) du, \quad (2.1)$$

где

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^{(n-k)} z^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} = \int_0^\infty e^{-su} u^{\alpha-1} du, \quad (2.2)$$

(см. [4; с. 322]). Дифференцируя по α равенство (2.2), получаем

$$\left(\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \right)^{(k)} = \int_0^\infty e^{-su} u^{\alpha-1} (\ln u)^k du. \quad (2.3)$$

Тогда, пользуясь равенством (2.3), получаем, что правая часть равенства (2.1) равна

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^{(n-k)} \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \right)^{(k)} = (s^{-\alpha})^{(n)} = \frac{(-\ln s)^n}{s^\alpha},$$

что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Допустим, что

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu'(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} < \frac{c}{\Gamma(\alpha)}.$$

Так как $(\ln u)^n \sim \Gamma(\alpha) P_n(\ln u)$ при $u \rightarrow \infty$, где $P_n(z)$ – многочлен из леммы 1, то

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu'(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} P_n(\ln u)} < c,$$

тогда при $u > u_0$ и некотором δ , $0 < \delta < c$, справедливо неравенство

$$\nu'(u) \leq \delta u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} P_n(\ln u). \quad (2.4)$$

Известно, что

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-su} \nu'(u) du.$$

Тогда при $\operatorname{Re} s > \sigma_1$ имеем

$$I = F(s) - \delta \frac{1}{(s - \sigma_0)^\alpha} (-\ln(s - \sigma_0))^n = \int_0^\infty e^{-su} (\nu'(u) - \delta u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} P_n(\ln u)) du. \quad (2.5)$$

Введем под интеграл разрывный множитель $\chi_{u_0}(u)$:

$$\chi_{u_0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u > u_0, \\ 0 & \text{при } u \leq u_0. \end{cases}$$

Тогда

$$I = R(s) + \int_0^\infty e^{-su} (\nu'(u) - \delta u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} P_n(\ln u)) \chi_{u_0}(u) du, \quad (2.6)$$

где

$$R(s) = \int_0^{u_0} e^{-su} (\nu'(u) - \delta u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} P_n(\ln u)) du.$$

Так как при всех $u > 0$ согласно (2.4) выполняется неравенство

$$\nu_1(u) = (\nu'(u) - \delta u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} P_n(\ln u)) \chi_{u_0}(u) \leq 0,$$

то

$$\nu_2(u) = \int_0^u \nu_1(x) dx$$

монотонно убывает на множестве $u \geq 0$. Ясно, что $R(s)$ – целая функция, так как $\int_0^r e^{-st} f(t) dt$ – целая функция, если $f \in L[0, r]$.

Так как $R(s)$ – целая функция, то область аналитичности и характеры особенностей у $F[\nu_2](s)$ такие же, как у I , так как из (2.5), (2.6) следует, что

$$I = R(s) + F[\nu_2](s). \quad (2.7)$$

Ввиду монотонности функции $\nu_2(u)$ абсцисса сходимости интеграла $\int_0^\infty e^{-st} d\nu_2(t) = F[\nu_2](s)$ является особой точкой $F[\nu_2](s)$ (см. [1; с. 58]). Если бы абсцисса сходимости была больше σ_0 , то из (2.5), (2.7) мы бы получили, что $F(s)$ имеет особую точку на $(\sigma_0, \sigma_1]$, что противоречит условию теоремы. Поэтому абсцисса сходимости $F[\nu_2](s)$ не превосходит σ_0 , и $F[\nu_2](s)$ сходится при $\sigma > \sigma_0$, а значит, $F(s)$ аналитична в области $\operatorname{Re} s > \sigma_0$.

Пусть $s = x + \sigma_0 + it_0$, где $x > 0$. Рассмотрим поведение $F(s)$ при $x \rightarrow 0$. Из (2.5), (2.7) следует, что

$$|F(s)| \leq \delta \left| \frac{1}{(s - \sigma_0)^\alpha} (-\ln(s - \sigma_0))^n \right| + |R(s)| + |F[\nu_2](s)|. \quad (2.8)$$

Так как $(1/(s - \sigma_0)^\alpha)(-\ln(s - \sigma_0))^n$ аналитична в $\sigma_0 + it_0$, $R(s)$ – целая функция, то при $x \rightarrow 0$

$$\delta \left| \frac{1}{(s - \sigma_0)^\alpha} (-\ln(s - \sigma_0))^n \right| + |R(s)| \leq c_1. \quad (2.9)$$

Пусть $\sigma = \operatorname{Re} s = x + \sigma_0$. Так как $\nu_1(u) \leq 0$, $F[\nu_2](s) = \int_0^\infty e^{-su} \nu_1(u) du$, то

$$\begin{aligned} |F[\nu_2](s)| &= \left| \int_0^\infty e^{-su} \nu_1(u) du \right| \leq \int_0^\infty |e^{-su} \nu_1(u)| du \\ &= - \int_0^\infty e^{-\sigma u} \nu_1(u) du = -F[\nu_2](\sigma) \end{aligned} \quad (2.10)$$

при $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Из (2.5), (2.7), (2.10) следует, что справедливо неравенство

$$|F[\nu_2](x + \sigma_0 + it_0)| \leq \frac{\delta}{x^\alpha} (-\ln x)^n + R(x + \sigma_0) - F(x + \sigma_0). \quad (2.11)$$

Поскольку функция $R(s)$ – целая и по п. 1) условия теоремы $F(s)$ аналитична в σ_0 , то при $x \rightarrow 0$

$$|R(x + \sigma_0)| + |F(x + \sigma_0)| \leq c_2. \quad (2.12)$$

Из (2.8), (2.9), (2.11), (2.12) получаем, что

$$|F(\sigma_0 + it_0 + x)| \leq c_3 + \delta \frac{(-\ln x)^n}{x^\alpha}.$$

Значит,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0+} \frac{|F(\sigma_0 + it_0 + x)|}{x^{-\alpha} (-\ln x)^n} \leq \delta. \quad (2.13)$$

Так как $\delta < c$, неравенство (2.13) противоречит неравенству (1.2). Так доказывается неравенство (1.3) теоремы. Аналогично доказывается неравенство (1.4) теоремы. Теорема доказана.

Если интеграл $\int_0^\infty e^{-su} d\nu(u)$ сходится хотя бы в одной точке $s \in \mathbb{C}$, то справедлива асимптотическая оценка

$$|\nu(u)| = O(e^{cu}), \quad u \rightarrow +\infty, \quad (2.14)$$

при любом $c > \max\{\operatorname{Re} s, 0\}$ (см. [1; с. 43–44]). Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-su} d\nu(u) &= \nu(R)e^{-sR} - \nu(0) - \int_0^R \nu(u) de^{-su} \\ &= \nu(R)e^{-sR} - \nu(0) + s \int_0^R e^{-su} \nu(u) du. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ при достаточно больших $\sigma = \operatorname{Re} s$, используя (2.14), получаем

$$\int_0^\infty e^{-su} d\nu(u) = -\nu(0) + s \int_0^\infty e^{-su} \nu(u) du = -\nu(0) + s \int_0^\infty e^{-su} d\nu_1(u),$$

где $\nu_1(u) = \int_0^u \nu(x) dx$.

Тогда

$$\frac{1}{s} \left(\int_0^\infty e^{-su} d\nu(u) + \nu(0) \right) = \int_0^\infty e^{-su} d\nu_1(u). \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем теорему в случае $\sigma_0 > 0$. Рассмотрим функцию

$$\int_0^\infty e^{-su} d\nu_1(u).$$

Из (2.15) следует, что для нее выполняются условия теоремы 1. В частности, $\nu'(u)$ в обозначениях теоремы 1 равна $\nu(u)$ в обозначениях данной теоремы. Обозначим константу c данной теоремы через c_1 . Тогда константа c теоремы 1 равна $c_1/|\sigma_0 + it_0|$. По теореме 1

$$\begin{aligned} \varlimsup_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} &\geq \frac{c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|}, \\ \varliminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} &\leq \frac{-c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|}. \end{aligned}$$

Докажем теорему в случае $\sigma_0 \leq 0$. Рассмотрим функцию

$$\int_0^\infty e^{-su} d\nu_1(u) - \frac{F(0) + \nu(0)}{s}.$$

Эта функция равна $F[\nu_2](s)$, где $\nu_2(u) = \nu_1(u) - F(0)u - \nu(0)u$. С другой стороны, по (2.15) она равна

$$\frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-su} d\nu(u) - \frac{F(0)}{s}.$$

Для нее выполняются условия теоремы 1. В частности, $\nu'(u)$ в обозначениях теоремы 1 равна $\nu(u) - (F(0) + \nu(0))$ в обозначениях данной теоремы. Обозначим константу c данной теоремы через c_1 . Тогда константа c теоремы 1 равна $c_1/|\sigma_0 + it_0|$.

По теореме 1

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u) - F(0) - \nu(0)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} &\geq \frac{c}{\Gamma(\alpha) |\sigma_0 + it_0|}, \\ \underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u) - F(0) - \nu(0)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} &\leq -\frac{c}{\Gamma(\alpha) |\sigma_0 + it_0|}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Следствия из теорем 1, 2 для интегралов и рядов Дирихле. Теперь будем рассматривать следствия теорем 1, 2 для интегралов и рядов Дирихле. Пусть $I(s)$ – интеграл Дирихле:

$$I(s) = \int_0^\infty u^{-s-1} f(u) du,$$

где $f(u) \in L[r, R]$ при любых $0 < r < R < \infty$, $I_1(s) = \int_0^1 u^{-s-1} f(u) du$ является целой функцией и

$$I_2(s) = \int_1^\infty u^{-s-1} f(u) du$$

сходится при $\operatorname{Re} s > \sigma_1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть справедливы условия 1)–3) теоремы 1 для $I(s)$. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{(\ln u)^{\alpha-1} u^{\sigma_0} (\ln(\ln u))^n} &\geq \frac{c}{\Gamma(\alpha)}, \\ \underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{(\ln u)^{\alpha-1} u^{\sigma_0} (\ln(\ln u))^n} &\leq -\frac{c}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем в интеграле Дирихле $I_2(s) = \int_1^\infty t^{-s-1} f(t) dt$ замену переменной $t = e^u$. Тогда

$$I_2(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(e^u) du.$$

Так как $I_1(s)$ – целая функция, для $I_2(s)$ справедливы условия теоремы 1. Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(e^u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} &\geq \frac{c}{\Gamma(\alpha)}, \\ \underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(e^u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} &\leq -\frac{c}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

Сделав обратную замену переменной, получаем утверждение следствия. Следствие доказано.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n}{n^s},$$

который сходится при $\operatorname{Re} s > \sigma_1$. Справедливо равенство (см. [1; с. 44])

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-su} d\nu(u), \quad \text{где } \nu(u) = A(e^u), \quad A(u) = \sum_{n < u} \alpha_n.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть справедливы условия 1)–3) теоремы 1 для $F(s)$. Тогда если $\sigma_0 > 0$, то

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{A(u)}{(\ln u)^{\alpha-1} u^{\sigma_0} (\ln(\ln u))^n} \geq \frac{c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|},$$

$$\underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{A(u)}{(\ln u)^{\alpha-1} u^{\sigma_0} (\ln(\ln u))^n} \leq -\frac{c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|},$$

а если $\sigma_0 \leq 0$, то

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{A(u) - F(0)}{(\ln u)^{\alpha-1} u^{\sigma_0} (\ln(\ln u))^n} \geq \frac{c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|},$$

$$\underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{A(u) - F(0)}{(\ln u)^{\alpha-1} u^{\sigma_0} (\ln(\ln u))^n} \leq -\frac{c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-su} d\nu(u),$$

то, используя теорему 2, при $\sigma_0 > 0$ находим

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} \geq \frac{c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|},$$

$$\underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} \leq \frac{-c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|},$$

а при $\sigma_0 \leq 0$ находим

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u) - F(0)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} \geq \frac{c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|},$$

$$\underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u) - F(0)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} \leq \frac{-c}{\Gamma(\alpha)|\sigma_0 + it_0|}.$$

Так как $\nu(u) = A(e^u)$, то, делая замену переменных $u = \ln t$, получаем утверждение следствия.

4. Следствия для теоретико-числовых функций. Из своей общей теоремы Катаи вывел теоремы об осцилляции некоторых теоретико-числовых функций (в частности, $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$), доказав, что на “достаточно длинных” отрезках принимаются большие и малые значения: при всех достаточно больших значениях T имеем

$$\max_{T \leq x \leq T^\kappa} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} > \delta, \quad \min_{T \leq x \leq T^\kappa} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} < -\delta.$$

В 1984 г. Одлижко и Риле [5], используя спектральную теорию и вычисления с нулями дзета-функции Римана, опровергли гипотезу Мертенса, состоявшую в том, что $|M(x)| \leq \sqrt{x}$, доказав, что

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} > 1, \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} < -1.$$

Из нашей теоремы следуют оценки для функций $M_a(x)$, которые явно выражаются через значения производных дзета-функции в нулях, в отличие от результатов Катаи для $M(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть гипотеза Римана верна и все нули дзета-функции Римана $\rho = \beta + i\gamma$ на критической прямой простые. Тогда

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} M_{1/2}(x) \geq \frac{1}{\zeta(1/2)} + \sup_{\gamma} \frac{1}{|\gamma \zeta'(\rho)|}, \quad (4.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} M_{1/2}(x) \leq \frac{1}{\zeta(1/2)} - \sup_{\gamma} \frac{1}{|\gamma \zeta'(\rho)|}, \quad (4.2)$$

и при $0 \leq a < 1/2$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{M_a(x)}{x^{1/2-a}} \geq \sup_{\gamma} \frac{1}{|(1/2 - a + \gamma i) \zeta'(\rho)|}, \quad (4.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M_a(x)}{x^{1/2-a}} \leq - \sup_{\gamma} \frac{1}{|(1/2 - a + \gamma i) \zeta'(\rho)|}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к функции $F(s) = 1/\zeta(s + 1/2)$ следствие 2, где $A(u) = M_{1/2}(u)$, $\alpha = 1$, $\sigma_0 = 0$, получаем нужные неравенства (4.1) и (4.2). При $0 \leq a < 1/2$, применяя к функции $F(s) = 1/\zeta(s + a)$ следствие 2, где $A(u) = M_a(u)$, $\alpha = 1$, $\sigma_0 = 1/2 - a$, получаем нужные неравенства (4.3) и (4.4). Следствие доказано.

Вычисления показывают, что

$$-0.69 < \frac{1}{\zeta(1/2)} < -0.68, \quad \sup_{\gamma} \frac{1}{|\gamma \zeta'(\rho)|} > 0.068.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть гипотеза Римана верна, $\zeta(s)$ имеет на критической прямой нуль $\rho = \beta + i\gamma$ порядка $k > 1$. Тогда

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{M_a(x)}{x^{1/2-a} (\ln x)^{k-1}} \geq \frac{k}{|(1/2 - a + \gamma i) \zeta^{(k)}(\rho)|}, \quad (4.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M_a(x)}{x^{1/2-a} (\ln x)^{k-1}} \leq - \frac{k}{|(1/2 - a + \gamma i) \zeta^{(k)}(\rho)|}. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к функции $F(s) = 1/\zeta(s + 1/2)$ следствие 2, где $A(u) = M_{1/2}(u)$, $\alpha = k$, $\sigma_0 = 0$, и учитывая, что $c = k!/\zeta^{(k)}(\rho)$, получаем следующие неравенства:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{M_{1/2}(x) - \zeta(1/2)}{(\ln x)^{k-1}} \geq \frac{k}{|\gamma \zeta^{(k)}(\rho)|},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M_{1/2}(x) - \zeta(1/2)}{(\ln x)^{k-1}} \leq - \frac{k}{|\gamma \zeta^{(k)}(\rho)|}.$$

Так как

$$\frac{\zeta(1/2)}{(\ln x)^{k-1}} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

то получаем нужные неравенства (4.5) и (4.6) при $a = 1/2$. При $0 \leq a < 1/2$ применяя к функции $F(s) = 1/\zeta(s + a)$ следствие 2, где $A(u) = M_a(u)$, $\alpha = k$, $\sigma_0 = 1/2 - a$, и учитывая, что $c = k!/\zeta^{(k)}(\rho)$, получаем нужные неравенства (4.5) и (4.6). Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть гипотеза Римана не верна, $\zeta(s)$ имеет нуль $\rho = \beta + i\gamma$ порядка k , где $\beta > 1/2$. Тогда

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{M_a(x)}{x^{\beta-a}(\ln x)^{k-1}} \geq \frac{k}{|(\beta - a + i\gamma)\zeta^{(k)}(\rho)|}, \quad (4.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M_a(x)}{x^{\beta-a}(\ln x)^{k-1}} \leq \frac{k}{|(\beta - a + i\gamma)\zeta^{(k)}(\rho)|}. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к $F(s) = 1/\zeta(s+a)$ следствие 2, где $A(u) = M_a(u)$, $\alpha = k$, $\sigma_0 = \beta - a$, и учитывая, что $c_1 = k!/\zeta^{(k)}(\rho)$, получаем нужные неравенства (4.7) и (4.8). Следствие доказано.

Остается нерешенным вопрос: верно ли, что $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} M_{1/2}(x) > 0$?

5. О точности неравенств в теоремах 1, 2.

ТЕОРЕМА 3. Для любых параметров теоремы 1 существует функция ν такая, что выполнены условия теоремы и

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu'(u)}{u^{\alpha-1}e^{\sigma_0 u}(\ln u)^n} = 2 \frac{c}{\Gamma(\alpha)}, \quad (5.1)$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu'(u)}{u^{\alpha-1}e^{\sigma_0 u}(\ln u)^n} = -2 \frac{c}{\Gamma(\alpha)}. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\nu(u) = 2c \int_0^u e^{\sigma_0 x} \sin(t_0 x) x^{\alpha-1} P_n(\ln x) dx,$$

где $P_n(z)$ – многочлен из леммы 1. Функция ν имеет непрерывную производную:

$$\nu'(u) = 2ce^{\sigma_0 u} \sin(t_0 u) u^{\alpha-1} P_n(\ln u). \quad (5.3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-su} \nu'(u) du = \int_0^\infty 2ce^{\sigma_0 u} \sin(t_0 u) u^{\alpha-1} P_n(\ln u) du \\ &= 2c \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-su} e^{\sigma_0 u} (e^{it_0 u} - e^{-it_0 u}) u^{\alpha-1} P_n(\ln u) du \\ &= \frac{c}{i} \left(\int_0^\infty e^{-(s-\sigma_0-it_0)u} u^{\alpha-1} P_n(\ln u) du - \int_0^\infty e^{-(s-\sigma_0+it_0)u} u^{\alpha-1} P_n(\ln u) du \right) \\ &= c \frac{1}{i} \left(\frac{(-\ln(s-\sigma_0-it_0))^n}{(s-\sigma_0-it_0)^\alpha} - \frac{(-\ln(s-\sigma_0+it_0))^n}{(s-\sigma_0+it_0)^\alpha} \right), \end{aligned}$$

а также

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|F(\sigma_0 + x + it_0)|}{(-\ln x)^n x^{-\alpha}} = c.$$

Равенства (5.1) и (5.2) сразу же следуют из (5.3). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Для любых параметров теоремы 2 существует функция ν такая, что выполнены условия теоремы и при $\sigma_0 > 0$

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} = 2 \frac{c}{|\sigma_0 + it_0| \Gamma(\alpha)}, \quad (5.4)$$

$$\underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} = -2 \frac{c}{|\sigma_0 + it_0| \Gamma(\alpha)}, \quad (5.5)$$

а при $\sigma_0 \leq 0$

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u) - \nu(0) - F(0)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} = 2 \frac{c}{|\sigma_0 + it_0| \Gamma(\alpha)}, \quad (5.6)$$

$$\underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u) - \nu(0) - F(0)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} = -2 \frac{c}{|\sigma_0 + it_0| \Gamma(\alpha)}. \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\nu(u) = \frac{2c}{|\sigma_0 + it_0|} e^{\sigma_0 u} \sin(t_0 u) u^{\alpha-1} P_n(\ln u),$$

где $P_n(z)$ – многочлен из леммы 1, и рассмотрим преобразование Лапласа заряда $d\nu(u)$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-su} d\nu(u).$$

Тогда, интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} F(s) &= s \int_0^\infty e^{-su} \nu(u) du \\ &= \frac{cs}{|\sigma_0 + it_0|} \frac{1}{i} \left(\frac{(-\ln(s - \sigma_0 - it_0))^n}{(s - \sigma_0 - it_0)^\alpha} - \frac{(-\ln(s - \sigma_0 + it_0))^n}{(s - \sigma_0 + it_0)^\alpha} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Рассмотрим случай $\sigma_0 > 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|F(\sigma_0 + x + it_0)|}{(-\ln x)^n x^{-\alpha}} = c,$$

и при этом выполняются равенства (5.4) и (5.5).

Рассмотрим случай $\sigma_0 \leq 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|F(\sigma_0 + x + it_0)|}{(-\ln x)^n x^{-\alpha}} = c.$$

Равенства (5.6) и (5.7) выполняются, так как

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} &= 2 \frac{c}{|\sigma_0 + it_0| \Gamma(\alpha)}, \\ \underline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{u^{\alpha-1} e^{\sigma_0 u} (\ln u)^n} &= -2 \frac{c}{|\sigma_0 + it_0| \Gamma(\alpha)}, \end{aligned}$$

$\nu(0) = 0$, $F(0) = 0$ из равенства (5.8). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D.V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton Math. Ser., **6**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
- [2] А. Г. Постников, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Наука, М., 1971.
- [3] I. Kátaı, “On investigations in the comparative prime number theory”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **18**:3-4 (1967), 379–391.
- [4] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.
- [5] A.M. Odlyzko, H.J.J. te Riele, “Disproof of the Mertens conjecture”, *J. Reine Angew. Math.*, **357** (1985), 138–160.

О. А. Петрушов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: olegAP86@yandex.ru

Поступило

26.12.2011

Исправленный вариант

23.04.2012