Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Козлов, Элементарное доказательство теоремы
Жордана–Кронекера, *Матем. заметки*, 2013, том 94,
выпуск 6, 857–870

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:15:53

Элементарное доказательство теоремы Жордана–Кронекера

И. К. Козлов

В работе приводится доказательство теоремы Жордана–Кронекера о приведении к каноническому виду пары кососимметрических билинейных форм на конечномерном линейном пространстве над алгебраически замкнутым полем.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm9303

1. Введение. Теорема Жордана–Кронекера описывает нормальную форму пары кососимметрических билинейных форм на конечномерном линейном пространстве над алгебраически замкнутым полем. Недавно у этой теоремы из линейной алгебры были найдены интересные приложения в различных областях математики (см., например, [1], [2]). Также недавно были получены различные результаты о локальном устройстве пары согласованных скобок Пуассона, которые можно рассматривать как нелинейные аналоги теоремы Жордана–Кронекера (см., например, [3]–[6]). Интерес к согласованным скобкам Пуассона опирается также на работы [7]–[9], где они были обнаружены в важной задаче интегрирования многомерных аналогов динамики твердого тела на алгебрах Ли.

Доказательство теоремы Жордана–Кронекера можно найти в [10] и в [11]. В настоящей работе дается более простое доказательство.

Все рассматриваемые линейные пространства конечномерны. В случае, когда характеристика поля равна 2, мы будем формально считать, что форма A на пространстве V кососимметрична тогда и только тогда, когда $A(v, v) = 0$ для любого вектора $v \in V$.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Жордана–Кронекера). *Пусть A и B – две кососимметрические билинейные формы на конечномерном векторном пространстве V над*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 10-01-00748-а и 12-01-31497), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1410.2012.1), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракт № 14.740.11.0794) и гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, в ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова” (договор № 11.G34.31.0054).

полем $\mathbb{K}$. Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то существует такой базис пространства V , что матрицы обеих форм A и B одновременно приводятся к блочно-диагональному виду:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_k \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где каждая пара соответствующих блоков A_i и B_i имеет один из следующих видов:

1) жорданов блок с собственным значением $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$A_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \lambda & 1 & \\ & & & & \lambda & \ddots \\ & & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \lambda \\ \hline -\lambda & & & & & \\ -1 & -\lambda & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 & -\lambda & & \end{array} \right),$$

$$B_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \end{array} \right);$$

2) жорданов блок с собственным значением ∞ :

$$A_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \end{array} \right),$$

$$B_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \ddots \\ & 0 & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & 0 \\ \hline 0 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -1 & 0 & & & \end{array} \right);$$

3) *кронемеров блок*:

$$A_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & -1 & & & & 1 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & & & & & \\ & \ddots & -1 & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array} \right),$$

$$B_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & 0 & & & & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & & \\ & \ddots & 0 & & & & \\ & & -1 & & & & \end{array} \right).$$

Каждый кронемеров блок – это $((2k_i + 1) \times (2k_i + 1))$ -блок, где $k_i \geq 0$. В частности, если $k_i = 0$, то A_i и B_i – это две нулевые (1×1) -матрицы

$$A_i = (0), \quad B_i = (0).$$

Пару блочно-диагональных матриц (1.1), состоящую из жордановых и кронемеровых блоков, мы будем называть *формой Жордана–Кroneкера* пары форм A и B . Несложно показать, что форма Жордана–Кroneкера пары форм A и B определена однозначно с точностью до перестановки блоков (см. теорему 4).

2. Самосопряженные операторы в симплектическом пространстве. Вначале рассмотрим случай, когда одна из форм невырождена. (Без ограничения общности можно считать, что это форма B .) Переформулируем задачу.

Для простоты в этом пункте, если специально не оговорено противное, мы будем считать, что $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ (по поводу случая $\text{char } \mathbb{K} = 2$ см. замечание 2).

Напомним, что любая билинейная форма $B: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ задает отображение $B: V \rightarrow V^*$ по формуле

$$\langle u, Bv \rangle = B(u, v),$$

где $\langle u, Bv \rangle$ – это значение ковектора Bv на векторе u . Если билинейная форма невырождена, т.е. $\text{Ker } B = 0$, то описанное отображение является изоморфизмом $V \simeq_B V^*$.

Рассмотрим оператор $P = B^{-1}A: V \rightarrow V$, заданный формулой

$$B(u, Pv) = A(u, v).$$

Оператор P самосопряжен относительно обеих форм A и B :

$$A(Pu, v) = A(u, Pv), \quad B(Pu, v) = B(u, Pv).$$

В дальнейшем нам потребуются следующие простые утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если оператор P , действующий в симплектическом пространстве (V, B) , самосопряжен, то ортогональное дополнение к любому инвариантному подпространству $W \subset V$ также инвариантно. То есть*

$$PW \subset W \implies PW^\perp \subset W^\perp.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $v \in W^\perp$ и любого $u \in W$ имеем $B(u, Pv) = B(Pu, v) = 0$, так как $Pu \in W$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть P – самосопряженный оператор в симплектическом пространстве (V, B) над полем $\mathbb{K}$, характеристика которого не равна 2. Тогда для любого вектора $v \in V$ все векторы $v, Pv, \dots, P^n v, \dots$ попарно ортогональны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$B(P^i v, P^j v) = B(P^{i+j} v, v) = B(v, P^{i+j} v) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $\text{char } \mathbb{K} = 2$ утверждение 2 останется верным, если дополнительно потребовать, что $B(v, Pv) = 0$ для всех векторов $v \in V$. Действительно,

$$B(P^i v, P^j v) = B(P^k v, P^k v) = 0,$$

если $i + j = 2k$, и

$$B(P^i v, P^j v) = B(P^k v, P(P^k v)) = 0,$$

если $i + j = 2k + 1$.

Теорема 1 теперь может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого самосопряженного оператора $P: V^{2n} \rightarrow V^{2n}$, действующего на симплектическом пространстве (V^{2n}, B) над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$, характеристика которого не равна 2, существует такой базис V^{2n} , что матрицы оператора P и формы B одновременно приводятся к блочно-диагональному виду*

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & \ddots \\ & & & P_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_k \end{pmatrix}.$$

При этом каждая пара блоков P_i и B_i имеет вид

$$P_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda & & \\ \hline & & & \lambda & 1 & \\ & 0 & & & \lambda & \ddots \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \lambda \end{array} \right),$$

$$B_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & 0 & & & & \ddots \\ \hline -1 & & & & & 1 \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & 0 & \\ & & & -1 & & \end{array} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Доказательство разобьем на два шага.

Шаг 1. Вначале докажем утверждение в случае, когда оператор P нильпотентный: $P^m = 0$.

Выделим один блок. Допустим, что степень нильпотентности оператора P равна m , т.е.

$$P^m = 0, \quad P^{m-1} \neq 0.$$

Рассмотрим произвольный вектор $e_1 \in V$ такой, что $P^{m-1}e_1 \neq 0$. Пусть $e_i = P^{i-1}e_1$. Тогда подпространство $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ изотропно. Также несложно проверить, что векторы e_i линейно независимы.

Так как форма B невырождена на V , существует вектор $f_m \in V$ такой, что

$$B(e_i, f_m) = \delta_m^i.$$

Существование такого вектора f_m также легко вытекает из следующих двух простых утверждений из линейной алгебры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Любое изотропное подпространство симплектического пространства содержится в некотором лагранжевом подпространстве.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Любой базис $e_1, \dots, e_n$ лагранжева подпространства $L \subset (V, B)$ можно расширить до симплектического базиса e_i, f_j пространства (V, B) :

$$B(e_i, f_j) = \delta_j^i.$$

Положим $f_i = P^{m-i}f_m$. Тогда векторы e_i, f_j образуют базис жорданова блока. Легко видеть, что

$$B(e_i, e_j) = 0, \quad B(f_i, f_j) = 0 \quad (2.1)$$

(это утверждение 2). Также несложно проверить, что

$$B(e_i, f_j) = \delta_j^i.$$

Действительно,

$$B(e_i, f_j) = B(e_i, P^{m-j} f_m) = B(P^{m-j} e_i, f_m) = B(e_{m+i-j}, f_m) = \delta_m^{m+i-j} = \delta_j^i.$$

Отсюда следует, что векторы e_i, f_j линейно независимы. В базисе $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m$ матрицы ограничения оператора P и формы B на подпространство $W = \langle e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m \rangle$ равны соответственно

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & & & & & & & \\ & 1 & & 0 & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & 0 & \\ \hline & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом нам удалось выделить один жорданов блок. Используя утверждение 1, можно перейти от пространства V к подпространству $W^\perp$ – ортогональному дополнению к W относительно формы B . Выделяя в пространстве $W^\perp$ аналогичным образом жордановы блоки, мы получим требуемый вид матриц оператора и формы в нильпотентном случае.

Шаг 2. Общий случай. Пространство V распадается в прямую сумму корневых подпространств оператора P

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V^\lambda.$$

Напомним, что корневое подпространство с собственным значением λ состоит из всех векторов $v \in V$ таких, что $(P - \lambda E)^m v = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть P – самосопряженный оператор в симплектическом пространстве (V, B) . Тогда корневые подпространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны относительно формы B :

$$V^\lambda \perp_B V^\mu, \quad \lambda \neq \mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda \neq \mu$, то ограничение оператора $P - \lambda E$ на V^μ является невырожденным оператором. Поэтому для любого вектора $v \in V^\mu$ корректно определен вектор $w = (P - \lambda E)^{-1} v \in V^\mu$, задаваемый равенством $(P - \lambda E)w = v$.

Для любых $e_\lambda \in V^\lambda, e_\mu \in V^\mu$ имеем

$$\begin{aligned} B(e_\lambda, e_\mu) &= B(e_\lambda, (P - \lambda E)(P - \lambda E)^{-1} e_\mu) = B((P - \lambda E)e_\lambda, (P - \lambda E)^{-1} e_\mu) = \dots \\ &= B((P - \lambda E)^m e_\lambda, (P - \lambda E)^{-m} e_\mu) = 0. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Остается применить шаг 1 к ограничению оператора $P - \lambda E$ на соответствующее корневое подпространство для каждого собственного значения λ .

Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что доказательство теоремы 2 также является доказательством теоремы Жордана–Кroneкера в случае, если $\text{char } \mathbb{K} = 2$ и форма B невырождена. Действительно, несложно проверить, что условие $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ использовалось только при доказательстве равенства (2.1). Это равенство останется верным согласно замечанию 1.

3. Доказательство теоремы Жордана–Кroneкера. Без ограничения общности можно считать, что форма B вырождена: $\text{Ker } B \neq 0$. (Если форма B невырождена, то все доказано, см. теорему 2 и замечание 2.)

Выделим один блок. Точнее, выделим либо кронекеров блок, либо жорданов блок с собственным значением ∞ . Прежде всего, заметим, что если $e_1, \dots, e_k, f_0, \dots, f_{k-1}$ – базис жорданова блока с собственным значением ∞ , то в базисе $f_0, e_1, f_1, \dots, f_{k-1}, e_k$ матрицы форм имеют вид

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Если же $e_1, \dots, e_k, f_0, f_1, \dots, f_k$ – базис кронекерова блока, то в базисе $f_0, e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_k, f_k$ матрицы форм имеют вид

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Поэтому, чтобы выделить кронекеров блок или жорданов блок с собственным значением ∞ , нужно сделать следующее:

- 1) разложить пространство в прямую сумму подпространств ортогональных относительно обеих форм A и B :

$$V = U \oplus W, \quad U \perp_{A,B} W;$$

- 2) найти базис e_i, f_j пространства U такой, что

$$A(e_i, f_j) = \delta_{j+1}^i, \quad B(e_i, f_j) = \delta_j^i,$$

а все остальные пары базисных векторов ортогональны относительно A и B .

Здесь $i = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, m-1$ для жорданова $(2m \times 2m)$ -блока, и $i = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, m$ для кронекерова $((2m+1) \times (2m+1))$ -блока.

Выделим искомый блок за несколько шагов. На нечетных шагах мы будем искать векторы f_i , а на четных – векторы e_j . Блок будет выделен, как только нам не удастся найти очередной вектор.

Шаг 1. Возьмем произвольный вектор $f_0 \in \text{Ker } B$ и любое дополнительное подпространство $W_1 \subset V$:

$$\langle f_0 \rangle \oplus W_1 = V.$$

Шаг 2. Если существует такой вектор $e_1 \in W_1$, что

$$A(e_1, f_0) = 1,$$

то положим $U_2 = \langle e_1, f_0 \rangle$ и $W_2 = U_2^{\perp A}$. Если же такого вектора e_1 нет, то алгоритм завершил свою работу. При этом нам удалось выделить один кронекеров (1×1) -блок, так как $f_0 \in \text{Ker } A \cap \text{Ker } B$.

Таким образом (если алгоритм не завершил свою работу на первом шаге), после двух шагов матрицы форм имеют вид

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ \hline & & A_2 \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array} \right).$$

Шаг $2k+1$. После $2k$ шагов уже построены подпространства U_{2k} , W_{2k} и базис $f_0, e_1, f_1, \dots, f_{k-1}, e_k$ пространства U_{2k} такие, что

1) все векторы e_i, f_j ортогональны пространству W_{2k} относительно формы A :

$$U_{2k} \perp_A W_{2k};$$

2) все векторы, возможно, кроме вектора e_k , ортогональны подпространству W_{2k} относительно формы B :

$$U_{2k-1} \perp_B W_{2k},$$

где $U_{2k-1} = \langle f_0, e_1, f_1, \dots, f_{k-1} \rangle$;

3) при этом ограничения форм A и B на подпространство U_{2k} определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} A(e_i, f_j) &= \delta_{j+1}^i, & A(e_i, e_j) &= 0, & A(f_i, f_j) &= 0, \\ B(e_i, f_j) &= \delta_j^i, & B(e_i, e_j) &= 0, & B(f_i, f_j) &= 0. \end{aligned}$$

Проще говоря, матрицы форм имеют вид

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \\ \hline & & & & & 0 & \\ & & & & & & A_{2k} \end{array} \right),$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & -1 & 0 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & -1 & 0 & & \\ \hline & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & B_{2k-1} \end{array} \right).$$

Выделим в пространстве $\widehat{W}_{2k-1} = W_{2k} \oplus \langle e_k \rangle$ еще один блок матрицы B . Если существует такой вектор $f_k \in W_{2k}$, что

$$B(e_k, f_k) = 1,$$

то положим

$$U_{2k+1} = U_{2k} \oplus \langle f_k \rangle \quad \text{и} \quad W_{2k+1} = U_{2k+1}^{\perp_B} \cap \widehat{W}_{2k-1}.$$

Если же такого вектора $f_k \in W_{2k}$ нет, то алгоритм завершил свою работу.

Шаг $2k + 2$. После предыдущих шагов уже построены подпространства U_{2k+1} , W_{2k+1} и базис $f_0, e_1, f_1, \dots, e_k, f_k$ пространства U_{2k+1} такие, что

- 1) все векторы e_i, f_j ортогональны подпространству W_{2k+1} относительно формы B :

$$U_{2k+1} \perp_B W_{2k+1};$$

- 2) все векторы, возможно, за исключением f_k , ортогональны подпространству W_{2k+1} относительно формы A :

$$U_{2k} \perp_A W_{2k+1},$$

где $U_{2k} = \langle f_0, e_1, f_1, \dots, e_k \rangle$;

- 3) при этом ограничения форм A и B на подпространство U_{2k+1} определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} A(e_i, f_j) &= \delta_{j+1}^i, & A(e_i, e_j) &= 0, & A(f_i, f_j) &= 0, \\ B(e_i, f_j) &= \delta_j^i, & B(e_i, e_j) &= 0, & B(f_i, f_j) &= 0. \end{aligned}$$

На этот раз матрицы форм имеют вид

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ \hline & & & & & 0 \\ & & & & & A_{2k} \end{array} \right),$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \\ \hline & & & & 0 & B_{2k+1} \end{array} \right).$$

Выделим в пространстве $\widehat{W}_{2k} = W_{2k+1} \oplus \langle f_k \rangle$ еще один блок матрицы A . Если существует такой вектор $e_{k+1} \in W_{2k}$, что

$$A(e_{k+1}, f_k) = 1,$$

то положим

$$U_{2k+2} = U_{2k+1} \oplus \langle e_{k+1} \rangle \quad \text{и} \quad W_{2k+2} = U_{2k+2}^{\perp A} \cap \widehat{W}_{2k}.$$

Если же такого вектора $e_{k+1} \in W_{2k+1}$ не существует, то процедура выделения блока завершена.

Ясно, что описанный процесс завершится, так как подпространства U_i образуют семейство вложенных подпространств

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots,$$

размерность которых монотонно возрастает: $\dim U_i = i$.

Если процесс остановится на нечетном шаге (не удалось найти вектор e_{k+1}), то будет выделен кронекеров блок (U_{2k+1} будет кронекеровым $((2k+1) \times (2k+1))$ -блоком). Если же процесс остановится на четном шаге (не нашли вектор f_k), то U_{2k} будет жордановым $(2k \times 2k)$ -блоком с собственным значением ∞ .

Теорема Жордана–Кронекера полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На самом деле можно было обойтись и без теоремы 2. Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то всегда существует вырожденная линейная комбинация форм $A + \lambda B$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Если поле $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым, то теорема 2 останется верной тогда и только тогда, когда все собственные значения оператора P принадлежат полю $\mathbb{K}$, или, что эквивалентно, если характеристический многочлен оператора P разлагается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$ (так же, как и в теореме о жордановой нормальной форме). Кронекеровы блоки и жордановы блоки с собственным значением ∞ можно выделить над любым полем (мы не пользовались алгебраической замкнутостью поля в этой части доказательства).

4. Вещественная теорема Жордана–Кронекера. Существует естественный вещественный аналог теоремы Жордана–Кронекера.

ТЕОРЕМА 3. Любые две кососимметрические билинейные формы A и B на вещественном конечномерном векторном пространстве V можно одновременно привести к блочно-диагональному виду; при этом каждый блок будет либо кронекеровым блоком, либо жордановым блоком с собственным значением $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

либо вещественным жордановым блоком с комплексным собственным значением $\lambda = \alpha + i\beta$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \Lambda & E & \\ & & & \Lambda & & \ddots \\ & & 0 & & \ddots & E \\ & & & & & \Lambda \\ \hline -\Lambda & & & & & \\ -E & -\Lambda & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & -E & -\Lambda & & \end{array} \right),$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & E & & \\ & & & E & & \ddots \\ & & 0 & & \ddots & E \\ \hline -E & & & & & \\ & -E & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -E & & \end{array} \right).$$

Здесь Λ и E – это (2×2) -матрицы:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем два доказательства этой теоремы.

Для простоты будем предполагать, что мы уже выделили все кронекеровы блоки и жордановы блоки с собственным значением $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (это можно сделать, см. замечание 3), а затем разложили пространство в прямую сумму корневых подпространств оператора $P = B^{-1}A$. (Здесь под корневым подпространством, отвечающим паре комплексно-сопряженных собственных значений $\alpha \pm i\beta$, мы имеем в виду ядро $\text{Ker}(P^2 - 2\alpha P + (\alpha^2 + \beta^2)E)^N$, где N – достаточно большое натуральное число.) Аналогично доказательству утверждения 5 можно показать, что корневые подпространства, отвечающие различным парам комплексно-сопряженных собственных значений, попарно ортогональны относительно обеих форм A и B .

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно комплексифицировать пространство и применить комплексную теорему Жордана–Кroneкера. Несложно проверить, что если $e_1 + i\widehat{e}_1, \dots, e_n + i\widehat{e}_n, f_1 + i\widehat{f}_1, \dots, f_n + i\widehat{f}_n$ – базис комплексного жорданова блока с собственным значением $\lambda = \alpha + i\beta$, то

$$\sqrt{2}e_1, \quad \sqrt{2}\widehat{e}_1, \quad \dots, \quad \sqrt{2}e_n, \quad \sqrt{2}\widehat{e}_n, \quad \sqrt{2}f_1, \quad -\sqrt{2}\widehat{f}_1, \quad \dots, \quad \sqrt{2}f_n, \quad -\sqrt{2}\widehat{f}_n$$

– базис вещественного жорданова блока с комплексным собственным значением $\alpha + i\beta$. Чтобы доказать это, следует учесть, что векторы $e_j + i\widehat{e}_j$ и $f_k + i\widehat{f}_k$ ортогональны сопряженным векторам $e_l - i\widehat{e}_l$ и $f_m - i\widehat{f}_m$, так как они принадлежат различным корневым подпространствам оператора $P = B^{-1}A$.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В каждом корневом подпространстве оператора P , соответствующем паре комплексно-сопряженных собственных значений $\alpha \pm i\beta$, существует комплексная структура J , самосопряженная относительно A и B .

Эта комплексная структура J – это полупростая часть оператора $(P - \alpha E)/\beta$. Оператор J действительно является комплексной структурой, т.е. $J^2 = -E$, так как характеристический полином оператора $(P - \alpha E)/\beta$ равен $(t^2 + 1)^n$. Оператор J самосопряжен, так как он является полиномом от P .

Определим следующие комплексные билинейные формы на V :

$$A^{\mathbb{C}}(u, v) = A(u, v) - iA(u, Jv) \quad \text{и} \quad B^{\mathbb{C}}(u, v) = B(u, v) - iB(u, Jv).$$

Формы $A^{\mathbb{C}}$ и $B^{\mathbb{C}}$ являются корректно определенными комплексными кососимметрическими билинейными формами на V , так как оператор J самосопряжен относительно A и B .

Осталось применить комплексную теорему Жордана–Кронекера и заметить, что если $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ – базис комплексного жорданова блока с собственным значением $\lambda = \alpha + i\beta$, то

$$e_1, -Je_1, \dots, e_n, -Je_n, f_1, Jf_1, \dots, f_n, Jf_n$$

– базис вещественного жорданова блока с комплексным собственным значением $\alpha + i\beta$.

5. Единственность формы Жордана–Кронекера. Докажем теперь, что количество и типы блоков в форме Жордана–Кронекера определены однозначно.

ТЕОРЕМА 4. *Рассмотрим конечномерное векторное пространство V над алгебраически замкнутым или вещественным полем $\mathbb{K}$. Тогда форма Жордана–Кронекера произвольной пары кососимметрических билинейных форм A и B на пространстве V определена однозначно с точностью до перестановки блоков.*

Разобьем доказательство теоремы 4 на две части: вначале в утверждении 6 докажем однозначную определенность набора жордановых блоков, а затем – в утверждении 7 – однозначность набора кронекеровых блоков.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Количество и типы жордановых блоков в форме Жордана–Кронекера определены однозначно (с точностью до перестановки этих блоков).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 6. Пусть вначале в разложении Жордана–Кронекера нет кронекеровых блоков. Без ограничения общности можно считать, что форма B невырождена. Тогда форма Жордана–Кронекера пары форм A и B однозначно определяется жордановой нормальной формой оператора $P = B^{-1}A$. В вещественном случае форма Жордана–Кронекера определяется вещественной жордановой нормальной формой оператора P .

Общий случай сводится к невырожденному следующим образом. Рассмотрим подпространство $I \subset V$, порожденное ядрами форм общего положения (мы будем считать, что форма $A + \lambda B$ общего положения, если $rk(A + \lambda B) \geq rk(A + \mu B)$ для любой другой формы $A + \mu B$):

$$I = \bigoplus_{\lambda - \text{общ. пол.}} \text{Ker}(A + \lambda B).$$

Рассмотрим далее подпространство $I^\perp$, состоящее из всех векторов $v \in V$, ортогональных к подпространству I относительно всех форм $A + \lambda B$, $\lambda \in \overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ (если $\lambda = \infty$, то под $A + \lambda B$ мы будем формально понимать форму B):

$$I^\perp = \{v \in V \mid (A + \lambda B)(u, v) = 0 \quad \forall u \in I \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{K}}\}.$$

Используя теорему Жордана–Кroneкера, несложно проверить, что пространство I изотропно относительно всех форм $A + \lambda B$, $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$, поэтому корректно определено ограничение каждой формы $A + \lambda B$ на пространство $J = I^\perp/I$. Также, используя теорему Жордана–Кroneкера, несложно проверить, что факторпространство $(J, A|_J, B|_J)$ изоморфно сумме всех жордановых блоков вне зависимости от выбора формы Жордана–Кroneкера пространства (V, A, B) . (Мы будем говорить, что две тройки (V_i, A_i, B_i) , $i = 1, 2$, изоморфны, если существует изоморфизм пространств V_1 и V_2 , переводящий формы A_1 и B_1 соответственно в формы A_2 и B_2).

Пространство $J = I^\perp/I$ определено однозначно (т.е. не зависит от выбора формы Жордана–Кroneкера пространства (V, A, B)), поэтому количество и типы жордановых блоков в форме Жордана–Кroneкера произвольной пары кососимметрических форм A и B тоже определены однозначно.

Утверждение 6 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Количество и размеры кронекеровых блоков в форме Жордана–Кroneкера определены однозначно (с точностью до перестановки этих блоков).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 7. Вектор с полиномиальными коэффициентами

$$\vec{f}(\mu) = f_0 + \dots + \mu^k f_k,$$

где $f_0, \dots, f_k \in V$, а μ рассматривается как формальный параметр, мы будем называть *цепочкой*, если $\vec{f}(\mu) \in \text{Ker}(B - \mu A)$. Обозначим через $Z_{\leq m}$ множество всех цепочек $\vec{f}(\mu)$ таких, что $\deg(\vec{f}(\mu)) \leq m$.

Количество и размеры кронекеровых блоков можно легко найти при помощи следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Если в форме Жордана–Кroneкера пары форм A и B присутствует M кронекеровых блоков размера $(2p_i + 1) \times (2p_i + 1)$, $i = 1, \dots, M$, то*

$$\dim Z_{\leq m} = \sum_{p_i \leq m} (m - p_i + 1). \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 8. Без ограничения общности можно считать, что форма B – форма общего положения (иными словами, в форме Жордана–Кroneкера нет жордановых блоков с собственным значением ∞).

Цепочки образуют векторное пространство, поэтому если $\vec{f}_1(\mu)$ и $\vec{f}_2(\mu)$ – две цепочки, то и любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами $\lambda_1 \vec{f}_1(\mu) + \lambda_2 \vec{f}_2(\mu)$ тоже является цепочкой. В частности, если $\vec{f}_1(\mu)$ и $\vec{f}_2(\mu)$ – две цепочки такие, что $\vec{f}_1(0) = \vec{f}_2(0)$, то их разность имеет вид $\vec{f}_1(\mu) - \vec{f}_2(\mu) = \mu \vec{g}(\mu)$, где $\vec{g}(\mu)$ – некоторая третья цепочка.

Несложно явно проверить, что если $f_0^i, e_1^i, f_1^i, e_2^i, f_2^i, \dots, e_k^i, f_k^i$ – базис i -го кронекерова блока, в котором матрицы форм имеют вид (3.1), то вектор $\vec{F}_i(\mu) =$

$f_0^i + \mu f_1^i + \dots + \mu^k f_k^i$ является цепочкой. Так как форма B общего положения, для любого вектора $f \in \text{Ker } B$ существует такая линейная комбинация $\vec{F}(\mu) = \sum \lambda_i \vec{F}_i(\mu)$, где $\lambda_i \in \mathbb{K}$, что $\vec{F}(0) = f$. Поэтому многочлены вида $\mu^j \vec{F}_i(\mu)$ образуют базис пространства $\mathcal{Z}_{\leq m}$.

Требуемую формулу (5.1) для размерности пространства $\mathcal{Z}_{\leq m}$ легко получить, явно описав все векторы вида $\mu^j \vec{F}_i(\mu)$, лежащие в $\mathcal{Z}_{\leq m}$: это векторы

$$\vec{F}_1(\mu), \quad \mu \vec{F}_1(\mu), \quad \dots \quad \mu^{m-p_1} \vec{F}_1(\mu), \quad \vec{F}_2(\mu), \quad \dots \quad \mu^{m-p_M} \vec{F}_M(\mu).$$

Утверждение 8 доказано.

Так как пространства цепочек $\mathcal{Z}_{\leq m}$ не зависят от выбора формы Жордана–Кронекера пространства (V, A, B) , то из утверждения 8 следует, что количество и размеры кронекеровых блоков тоже определены инвариантно. Утверждение 7 доказано.

Теорема 4 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**:4-5 (2009), 431–454.
- [2] И. М. Гельфанд, И. С. Захаревич, “Спектральная теория пучка кососимметрических дифференциальных операторов 3-го порядка на S^1 ”, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:2 (1989), 1–11.
- [3] F. J. Turiel, “Classification locale simultanée de deux formes symplectiques compatibles”, *Manuscripta Math.*, **82**:3-4 (1994), 349–362.
- [4] F. J. Turiel, *On the Local Theory of Veronese Webs*, [arXiv:math.DG/0011.3098v1](https://arxiv.org/abs/math/0011001).
- [5] F. J. Turiel, *The Local Product Theorem for Bihamiltonian Structures*, [arXiv:math.SG/0605.1107v1](https://arxiv.org/abs/math/0605110).
- [6] I. S. Zakharevich, *Kronecker Webs, Bihamiltonian Structures, and the Method of Argument Translation*, [arXiv:math.SG/0605.1107v3](https://arxiv.org/abs/math/0605110).
- [7] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 396–415.
- [8] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:2 (1978), 46–56.
- [9] А. Т. Фоменко, “О симплектических структурах и интегрируемых системах на симметрических пространствах”, *Матем. сб.*, **115**:2 (1981), 263–280.
- [10] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [11] R. C. Thompson, “Pencils of complex and real symmetric and skew matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **147** (1991), 323–371.

И. К. Козлов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ikozlov90@gmail.com

Поступило

16.12.2011

Исправленный вариант

26.12.2012