Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Галаев, Заметка о группах голономии псевдоримановых многообразий, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 821–827

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:34:58

Заметка о группах голономии псевдоримановых многообразий

А. С. Галаев

Для произвольной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ построена полиномиальная псевдориманова метрика сигнатуры $(r + 2, s + 2)$, алгебра голономии этой метрики содержит $\mathfrak{h}$ в качестве подалгебры. Этот результат указывает на существенное отличие алгебр голономии псевдоримановых многообразий с индексом большим или равным 2 от алгебр голономии римановых и лоренцевых многообразий.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm9305

1. Введение. Группа голономии линейной связности на n -мерном многообразии содержится в группе Ли $GL(n, \mathbb{R})$ и является важным инвариантом связности. Хано и Одзеки [1] показали, что всякая связная линейная группа Ли $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ может быть реализована как группа голономии пространства линейной связности. Эта связность, как правило, имеет ненулевое кручение. Напротив, отсутствие кручения налагает некоторое алгебраическое условие на группу голономии. Это условие использовал Берже для получения классификации связных групп голономии римановых многообразий и связных неприводимых групп голономии пространств линейных связностей без кручения [2]. Позднее списки Берже были уточнены. Классификация связных неприводимых групп голономии пространств линейных связностей без кручения получена в [3]. Наиболее важным результатом оказалась классификация связных групп голономии римановых многообразий, получившая много применений в геометрии и теоретической физике [4]–[7]. В последнее время возникает интерес к псевдоримановым многообразиям. Недавно была получена классификация связных групп голономии лоренцевых многообразий [8], [9]. Заметим, что изучение связных групп голономии равносильно изучению алгебр голономии, т.е. соответствующих алгебр Ли. Рассмотрим лоренцево многообразие размерности $n + 2 \geq 4$. Его алгебра голономии содержится в лоренцевой алгебре Ли $\mathfrak{so}(1, n + 1)$. Достаточно рассматривать подалгебры, содержащиеся в максимальной алгебре, сохраняющей некоторую изотропную прямую пространства Минковского,

$$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)_\ell = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n)) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Чешской Республики (проект CZ.1.07/2.3.00/20.0003).

С алгеброй $\mathfrak{g}$ связана ее проекция $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{so}(n)$. Ключевым является факт, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ представляет собой алгебру голономии некоторого риманова многообразия. Отметим, что максимальная подалгебра псевдоортогональной алгебры Ли $\mathfrak{so}(r+2, s+2)$, $r+s \geq 2$, сохраняющая некоторое двумерное изотропное подпространство псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{r+2, s+2}$, имеет вид

$$(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(r, s)) \ltimes (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{r, s} \ltimes \mathbb{R}).$$

В заметке для произвольной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ построена полиномиальная псевдориманова метрика сигнатуры $(r+2, s+2)$, алгебра голономии этой метрики равна $\mathfrak{h} \ltimes (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{r, s} \ltimes \mathbb{R})$. Оказывается, что алгебра голономии псевдориманова многообразия сигнатуры $(r+2, s+2)$, т.е. с индексом большим или равным 2, может зависеть от произвольной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r, s)$. Это указывает на необозримость алгебр голономии псевдоримановых многообразий с индексом большим или равным 2. В частности, алгебра голономии псевдориманова многообразия сигнатуры $(2, n+2)$, $n \geq 2$, может зависеть от произвольной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, что показывает принципиальное отличие от случая лоренцевых многообразий. В некотором смысле, полученный результат аналогичен результату [1]. Другие результаты о группах голономии псевдоримановых многообразий можно найти в обзоре [10].

2. Результаты. Рассмотрим псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{r+2, s+2}$ с псевдоевклидовой метрикой η сигнатуры $(r+2, s+2)$, $r+s = n \geq 2$. Зафиксируем базис $p_1, p_2, e_1, \dots, e_n, q_1, q_2$ пространства $\mathbb{R}^{r+2, s+2}$ такой, что η имеет следующие ненулевые значения:

$$\eta(p_1, q_1) = \eta(p_2, q_2) = 1, \quad \eta(e_i, e_i) = \epsilon_i, \quad \epsilon_1 = \dots = \epsilon_r = -1, \quad \epsilon_{r+1} = \dots = \epsilon_n = 1.$$

Рассмотрим подалгебру

$$\mathfrak{so}(r+2, s+2)_{\langle p_1, p_2 \rangle} \subset \mathfrak{so}(r+2, s+2),$$

сохраняющую изотропное подпространство $\text{span}\{p_1, p_2\} \subset \mathbb{R}^{r+2, s+2}$. Эта алгебра Ли имеет следующий матричный вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} B & -(E_{r,s}X)^t & 0 & -c \\ & -(E_{r,s}Y)^t & c & 0 \\ 0 & 0 & A & X & Y \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & -B^t \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), A \in \mathfrak{so}(r, s), \\ X, Y \in \mathbb{R}^{r, s}, c \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\},$$

где $E_{r,s} = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. Получаем разложение

$$\mathfrak{so}(r+2, s+2)_{\langle p_1, p_2 \rangle} = (\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(r, s)) \ltimes (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{r, s} \ltimes \mathbb{R}),$$

где знак $\ltimes$ указывает на то, что в правой от него части находится идеал.

Для произвольной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ определим подалгебру

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(E_{r,s}X)^t & 0 & -c \\ 0 & 0 & -(E_{r,s}Y)^t & c & 0 \\ 0 & 0 & A & X & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{h}, X, Y \in \mathbb{R}^{r, s}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

алгебры $\mathfrak{so}(2, n+2)_{(p_1, p_2)}$. Обозначим элемент алгебры $\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}}$ через (A, X, Y, c) . Укажем ненулевые скобки Ли:

$$[(A, 0, 0, 0), (A_1, X, Y, 0)] = ([A, A_1], AX, AY, 0), \quad (2.1)$$

$$[(0, X, 0, 0), (0, 0, Y, 0)] = (0, 0, 0, \eta(X, Y)). \quad (2.2)$$

Имеет место разложение

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \ltimes (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{r,s} \ltimes \mathbb{R}).$$

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ алгебра $\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}}$ является алгеброй голономии некоторого псевдориманова многообразия сигнатуры $(r+2, s+2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ построим псевдориманову метрику на пространстве $\mathbb{R}^{r+s+4}$ и покажем, что алгебра голономии этой метрики в точке 0 совпадает с $\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}}$.

Построение метрики. Зафиксируем элементы $B_1, \dots, B_N \in \mathfrak{h}$, порождающие алгебру Ли $\mathfrak{h}$. Рассмотрим матрицы $(B_{j\alpha}^i)_{i,j=1}^n$ этих элементов относительно базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^{r,s}$. Условие $B_\alpha \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ влечет

$$\epsilon_j B_{j\alpha}^i = -\epsilon_i B_{i\alpha}^j.$$

Пусть $v, z, x^1, \dots, x^n, u, w$ – стандартные координаты на $M = \mathbb{R}^{r+s+4}$. Рассмотрим псевдориманову метрику

$$g = 2 dv du + 2 dz dw + \sum_{i=1}^n \epsilon_i (dx^i)^2 + \sum_{i=1}^n 2A_i dx^i dw + f(du)^2 + f(dw)^2,$$

где

$$A_i = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^n A_{ij\alpha} x^j u^\alpha, \quad A_{ij\alpha} = \epsilon_i B_{j\alpha}^i, \quad f = \sum_{i=1}^n (x^i)^2.$$

Метрика g имеет сигнатуру $(r+2, s+2)$. Пусть $\mathfrak{hol}$ – алгебра голономии этой метрики в точке 0. Рассмотрим базис

$$p_1 = (\partial_v)_0, \quad p_2 = (\partial_z)_0, \quad e_1 = (\partial_1)_0, \dots, e_n = (\partial_n)_0, \quad q_1 = (\partial_u)_0, \quad q_2 = (\partial_w)_0$$

касательного пространства $T_0 M$. Получаем $\eta = g_0$, это позволяет отождествить $(T_0 M, g_0)$ с $(\mathbb{R}^{r+2, s+2}, \eta)$, а алгебру $\mathfrak{hol}$ с подалгеброй в $\mathfrak{so}(r+2, s+2)$.

Вычисление алгебры голономии. Построенная метрика – аналитическая. Из доказательства теоремы 9.2 из [11] следует, что $\mathfrak{hol}$ порождается элементами вида

$$\nabla_{\partial_{a_\alpha}} \cdots \nabla_{\partial_{a_1}} R(\partial_a, \partial_b)(0) \in \mathfrak{so}(T_0 M, g_0) = \mathfrak{so}(r+2, s+2), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots,$$

где ∇ – связность Леви-Чивита, определяемая метрикой g , а R – тензор кривизны. Индексы a, b, c будут пробегать все координаты на M , индексы i, j, k будут принимать значения $1, \dots, n$. Связность Леви-Чивита определяется своими компонентами Γ_{bc}^a , $\nabla_{\partial_b} \partial_c = \sum_a \Gamma_{bc}^a \partial_a$, которые можно вычислить по формуле

$$\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a = \frac{1}{2} \sum_d g^{ad} (\partial_c g_{bd} + \partial_b g_{cd} - \partial_d g_{bc}),$$

где (g^{ab}) – матрица, обратная к матрице (g_{ab}) метрики g . Компоненты тензора кривизны, определяемые равенством $R(\partial_a, \partial_b)\partial_c = \sum_d R_{cab}^d \partial_d$, могут быть найдены следующим образом:

$$R_{cab}^d = \partial_a \Gamma_{bc}^d - \partial_b \Gamma_{ac}^d + \sum_e (\Gamma_{bc}^e \Gamma_{ae}^d - \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d).$$

Для матрицы (g^{ab}) имеем

$$(g^{ab}) = \begin{pmatrix} -fE_2 & C & E_2 \\ C^t & E_{r,s} & 0 \\ E_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ -\epsilon_1 A_1 & \cdots & -\epsilon_n A_n \end{pmatrix}.$$

Для нахождения алгебры голономии нам понадобятся только следующие компоненты связности:

$$\Gamma_{jk}^i = 0, \quad \Gamma_{ju}^i = 0, \quad \Gamma_{jw}^i = \sum_{\alpha=1}^N B_{j\alpha}^i u^\alpha, \quad (2.3)$$

$$\Gamma_{vb}^a = \Gamma_{zb}^a = 0, \quad \Gamma_{ia}^u = \Gamma_{ia}^w = 0, \quad (2.4)$$

$$\Gamma_{ij}^1 = \Gamma_{ij}^2 = 0, \quad \Gamma_{iu}^1 = x^i, \quad \Gamma_{iw}^2 = x^i + \sum_k \epsilon_k A_k (\partial_i A_k - \partial_k A_i), \quad (2.5)$$

следующие компоненты тензора кривизны:

$$R_{juw}^i = \sum_{\alpha=1}^n \alpha B_{j\alpha}^i u^{\alpha-1}, \quad R_{jab}^i = 0, \quad \text{если } \{a\} \cup \{b\} \neq \{u, w\}, \quad (2.6)$$

и следующие компоненты тензора кривизны в точке 0:

$$R_{iiu}^v(0) = 1, \quad R_{iiw}^z(0) = 1. \quad (2.7)$$

Вычисление этих величин не составляет сложности. Заметим, что имеет место рекуррентная формула

$$\nabla_{a_\alpha} \cdots \nabla_{a_1} R_{cab}^d = \partial_{a_\alpha} \nabla_{a_{\alpha-1}} \cdots \nabla_{a_1} R_{cab}^d + [\Gamma_{a_\alpha}, \nabla_{a_{\alpha-1}} \cdots \nabla_{a_1} R(\partial_a, \partial_b)]_c^d, \quad (2.8)$$

где Γ_{a_α} обозначает оператор с матрицей $(\Gamma_{ba_\alpha}^a)$.

Доказательство включения $\mathfrak{hol} \subset \mathfrak{g}^{\mathfrak{h}}$. Равенства $\Gamma_{vb}^a = \Gamma_{zb}^a = 0$ означают, что векторные поля ∂_v, ∂_z параллельны, т.е. $\nabla \partial_v = \nabla \partial_z = 0$. Согласно принципу голономии $\mathfrak{hol}$ обнуляет векторы $p_1 = (\partial_v)_0, p_2 = (\partial_z)_0$, что влечет включение $\mathfrak{hol} \subset \mathfrak{g}^{so(r,s)}$. Остается доказать, что $\text{pr}_{so(r,s)} \mathfrak{hol} \subset \mathfrak{h}$, т.е.

$$\text{pr}_{so(r,s)}(\nabla_{a_\alpha} \cdots \nabla_{a_1} R(\partial_a, \partial_b)(0)) \in \mathfrak{h}$$

для всех α . Равенства (2.2) и (2.3) указывают на то, что

$$\begin{aligned} \nabla_{a_\alpha} \cdots \nabla_{a_1} R_{jab}^i &= \partial_{a_\alpha} \nabla_{a_{\alpha-1}} \cdots \nabla_{a_1} R_{jab}^i \\ &+ [\text{pr}_{so(r,s)} \Gamma_{a_\alpha}, \text{pr}_{so(r,s)}(\nabla_{a_{\alpha-1}} \cdots \nabla_{a_1} R(\partial_a, \partial_b))]_j^i. \end{aligned}$$

Заметим, что если $\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(r,s)}\Gamma_{a_\alpha} \neq 0$, то $a_\alpha = w$, в этом случае

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(r,s)}\Gamma_w = \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha u^\alpha.$$

Теперь включение $\mathfrak{hol} \subset \mathfrak{g}^{\mathfrak{h}}$ легко доказать, используя индукцию и (2.3), (2.6).

Доказательство включения $\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{hol}$. Равенства (2.7) влекут $\{(0, X, Y, 0) \mid X, Y \in \mathbb{R}^{r,s}\} \subset \mathfrak{hol}$. Используя (2.2), получаем $\{(0, 0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\} \subset \mathfrak{hol}$. Из (2.3) и (2.8) следует равенство

$$(\nabla_u)^\beta R_{juw}^i = (\partial_u)^\beta R_{juw}^i = \sum_{\alpha=\beta+1}^N \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-\beta) B_{j\alpha}^i u^{\alpha-\beta-1}$$

для всех $0 \leq \beta \leq N-1$. В частности,

$$(\nabla_u)^\beta R_{juw}^i(0) = (\beta+1)! B_{j\beta+1}^i, \quad 0 \leq \beta \leq N-1,$$

т.е.

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(r,s)}(\nabla_{\partial_u})^{\beta-1} R(\partial_u, \partial_w)(0) = \beta! B_\beta, \quad 1 \leq \beta \leq N.$$

Так как алгебра Ли $\mathfrak{h}$ порождается элементами $B_1, \dots, B_N$, то последнее равенство влечет включение $\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{hol}$. Теорема доказана.

3. Соотнесение со случаем лоренцевых многообразий. Сравним полученный результат с классификацией алгебр голономии лоренцевых многообразий [8], [9]. Алгебра голономии $(n+2)$ -мерного лоренцева многообразия является подалгеброй лоренцевой алгебры Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)$, $n \geq 0$. Рассмотрим базис $p, e_1, \dots, e_n, q$ пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,n+1}$ такой, что метрика Минковского η имеет только следующие ненулевые значения: $\eta(p, q) = \eta(e_i, e_i) = 1$. Подалгебра $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$, сохраняющая изотропную прямую $\mathbb{R}p$, имеет вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -X^t & 0 \\ 0 & A & X \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, A \in \mathfrak{so}(n), X \in \mathbb{R}^n \right\} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n)) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Достаточно рассматривать подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$, содержащиеся в $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$. Для произвольной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ рассмотрим подалгебру

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -X^t & 0 \\ 0 & A & X \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{h}, X \in \mathbb{R}^n \right\} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n \subset \mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}.$$

Лейстнер [9] доказал следующее нетривиальное утверждение: *если $\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}}$ является алгеброй голономии лоренцева многообразия, то подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ обязана быть алгеброй голономии некоторого риманова многообразия.* Доказательство основано на том, что алгебра голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ произвольного псевдориманова многообразия сигнатуры (r, s) порождается образами алгебраических тензоров кривизны,

последние принадлежат пространству $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, состоящему из 2-форм на $\mathbb{R}^{r,s}$ со значениями в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющих первому тождеству Бьянки

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \quad X, Y, Z \in \mathbb{R}^{r,s}.$$

Для $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}})$ проекция $\text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R$ имеет вид

$$\text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R(p, \cdot) = 0, \quad \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}(\mathfrak{h}), \quad \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R(X, q) = P(X), \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

где $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{h}$ – линейное отображение, удовлетворяющее тождеству

$$\eta(P(X)Y, Z) + \eta(P(Y)Z, X) + \eta(P(Z)X, Y) = 0, \quad X, Y, Z \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ – пространство таких отображений P . Получаем, что $\mathfrak{h}$ должна порождаться образами элементов пространств $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ и $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Лейстнер показал, что из этого следует, что $\mathfrak{h}$ должна порождаться образами элементов пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$, а это означает, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – алгебра голономии некоторого риманова многообразия.

Рассмотрим теперь подалгебру $\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{so}(2, n+2)$ из предыдущего пункта, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Легко показать, что для $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}})$ проекция $\text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R(p_1, \cdot) &= \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R(p_1, \cdot) = 0, & \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} &\in \mathcal{R}(\mathfrak{h}), \\ \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R(\cdot |_{\mathbb{R}^n}, q_1), \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R(\cdot |_{\mathbb{R}^n}, q_2) &\in \mathcal{P}(\mathfrak{h}), & \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ R(q_1, q_2) &= B \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

При этом элемент $B \in \mathfrak{h}$ можно выбирать совершенно произвольно; чтобы в этом убедиться достаточно рассмотреть следующий тензор $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}})$:

$$\begin{aligned} R(q_1, q_2) &= (B, 0, 0, 0), & R(X, Y) &= (0, 0, 0, 2\eta(BX, Y)), & R(p_1, \cdot) &= R(p_2, \cdot) = 0, \\ R(X, q_1) &= (0, 0, BX, 0), & R(X, q_2) &= (0, -BX, 0, 0), & X, Y &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Принадлежность $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}})$ проверяется непосредственно. Для произвольного псевдориманова многообразия (M, g) с алгеброй голономии $\mathfrak{hol} \subset \mathfrak{so}(T_x M, g_x)$ в точке $x \in M$ имеем

$$\nabla_{Z_\alpha} \cdots \nabla_{Z_1} R_x \in \mathcal{R}(\mathfrak{hol}), \quad \alpha \geq 0, \quad Z_1, \dots, Z_\alpha \in T_x M.$$

В конструкции метрики из предыдущего пункта мы использовали это свойство и только что описанные алгебраические тензоры кривизны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Hano, H. Ozeki, “On the holonomy group of linear connections”, *Nagoya Math. J.*, **10** (1956), 97–100.
- [2] M. Berger, “Sur les groupes d’holonomie homogènes des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes”, *Bull. Soc. Math. France*, **83** (1955), 279–330.
- [3] S. Merkulov, L. Schwachhöfer, “Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections”, *Ann. of Math. (2)*, **150**:1 (1999), 77–149.
- [4] Д. В. Алексеевский, “Римановы пространства с необычными группами голономии”, *Функц. анализ и его прил.*, **2**:2 (1968), 1–10.
- [5] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Т. 2, Мир, М., 1990.

- [6] D. Joyce, *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*, Oxf. Grad. Texts Math., **12**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.
- [7] Д. В. Егоров, “QR-подмногообразия и римановы метрики с группой голономии G_2 ”, *Матем. заметки*, **90**:5 (2011), 781–784.
- [8] A. Galaev, T. Leistner, “Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications”, *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry*, ESI Lect. Math. Phys., European Math. Soc., Zürich, 2008, 53–96.
- [9] T. Leistner, “On the classification of Lorentzian holonomy groups”, *J. Differential Geom.*, **76**:3 (2007), 423–484.
- [10] A. Galaev, T. Leistner, “Recent developments in pseudo-Riemannian holonomy theory”, *Handbook of Pseudo-Riemannian Geometry and Supersymmetry*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **16**, European Math. Soc., Zürich, 2010, 581–627.
- [11] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 1, Наука, М., 1981.

А. С. Галаев

Masaryk University, Чехия

E-mail: galaevas@gmail.com

Поступило

05.12.2011