Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев, Наилучшие полиномиальные приближения и перечисления некоторых функциональных классов в L_2 , *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 908–917

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9306>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:20:54

Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2

М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев

Получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых модуль непрерывности m -го порядка функции определен при помощи функции Стеклова. Для классов функций, задаваемых указанными модулями непрерывности, получены точные значения различных n -поперечников.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9306

1. Всюду далее $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+$ – множество всех положительных чисел. Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу вещественных 2π -периодических функций f , имеющих конечную норму

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Символом $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка, не превосходящего $n - 1$. Хорошо известно [1], что для произвольной $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

величина ее наилучшего полиномиального приближения элементами подпространства $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1} \} = \|f - S_{n-1}(f, x)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где

$$S_{n-1}(f, x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– частная сумма порядка $n - 1$ ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \in \mathbb{N}$.

Под *модулем непрерывности m -го порядка* функции $f \in L_2$ понимаем величину

$$\omega_m(f, t) = \sup\{\|\Delta_h^m(f; \cdot)\| : |h| \leq t\}, \quad (2)$$

где

$$\Delta_h^m(f; x) := \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + kh)$$

– конечная разность m -го порядка функции f в точке x с шагом h .

Под $L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$, понимаем множество 2π -периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка принадлежат пространству L_2 .

2. При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве L_2 вопросы, связанные с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \chi \cdot n^{-r} \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{t}{n}\right),$$

где $t > 0$, $f \in L_2^{(r)}$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(0)} \equiv f$, рассматривались различные экстремальные характеристики, способствующие уточнению оценок сверху констант χ (см., например, [1]–[12] и приведенную там литературу).

В [13] нами была рассмотрена следующая экстремальная характеристика:

$$\chi_{m,n,r,p}(h) := \sup \left\{ \frac{2^m n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/p}} : f \in L_2^{(r)}, f^{(r)} \neq \text{const} \right\}, \quad (3)$$

где $h > 0$, $0 < p \leq 2$, и доказано, что для произвольных $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$ справедливо равенство

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \left\{ \int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}.$$

При этом полученная точная оценка величины (3), в частности, при $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$, содержала ранее доказанный результат Вакарчука [11].

Пусть

$$S_h(f; x) := \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt, \quad h > 0,$$

– функция Стеклова элемента $f \in L_2$. При этом полагаем

$$S_{h,k}(f) := S_h(S_{h,k-1}(f)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad S_{h,0}(f) \equiv f,$$

и пусть I – единичный оператор в пространстве L_2 . Определим согласно [10] разности первого и высших порядков следующим образом:

$$\tilde{\Delta}_h^1(f; x) := S_h(f; x) - f(x) = (S_h - I)(f; x),$$

$$\tilde{\Delta}_h^m(f; x) = \tilde{\Delta}_h^1(\tilde{\Delta}_h^{m-1}(f; \cdot); x) = (S_h - I)^m(f; x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_{h,k}(f; x),$$

где $m = 2, 3, 4, \dots$. Используя указанные обозначения, рассмотрим следующую экстремальную характеристику гладкости:

$$\tilde{\Omega}_m(f; t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\|\tilde{\Delta}_h^m(f; \cdot)\| : 0 < h \leq t\}, \quad (4)$$

которую назовем *обобщенным модулем непрерывности m -го порядка* функции $f \in L_2$. В [12], в частности, доказано, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^{r-m} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^{\pi/n} \tilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt \right)^m} = \frac{1}{(\pi - \text{Si}(\pi))^m}, \quad (5)$$

где $\text{Si}(t) = \int_0^t x^{-1} \sin x dx$ – интегральный синус.

Следующее утверждение является обобщением равенств (5).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$ и $h \in \mathbb{R}_+$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^{r-1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \tilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/p}} = \left\{ \int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}. \quad (6)$$

3. Для формулировки последующих результатов напомним необходимые понятия и определения.

Пусть $S = \{\varphi \in L_2 : \|\varphi\| \leq 1\}$ – единичный шар в L_2 ; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подпространство в L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\}, \quad (7)$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\sup\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset L_2\}, \quad (8)$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\} : \Lambda_n \subset L_2\}, \quad (9)$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{M}\} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\}, \quad (10)$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M}\} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\} \quad (11)$$

называют соответственно *бернштейновским*, *гельфандовским*, *колмогоровским*, *линейным*, *проекционным n -поперечниками*. Между перечисленными выше n -поперечниками в гильбертовом пространстве L_2 справедливы следующие соотношения [14], [15]:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (12)$$

Далее, для $\mathfrak{M} \subset L_2$ полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) = \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Пусть $\Phi(t)$ – непрерывная неубывающая положительная в области $\mathbb{R}_+$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$.

Через $W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi)$, $m, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место неравенство

$$\left(\int_0^t \tilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}; \tau) d\tau \right)^{1/p} \leq \Phi(t).$$

Далее, следуя [12], [16], через t_* обозначим величину аргумента $t \in \mathbb{R}_+$ функции $(\sin t)/t$, при котором эта функция достигает на $\mathbb{R}_+$ своего наименьшего значения. Легко подсчитать, что t_* есть минимальный положительный корень уравнения $t = \operatorname{tg} t$, $4.49 < t_* < 4.51$.

Введем обозначение

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* := \begin{cases} 1 - \frac{\sin t}{t}, & 0 < t \leq t_*, \\ 1 - \frac{\sin t_*}{t_*}, & t \geq t_*. \end{cases} \quad (13)$$

В принятых обозначениях имеет место следующая общая

ТЕОРЕМА 2. Если мажоранта $\Phi(t)$ при любых $h \in \mathbb{R}_+$, $1/r < p \leq 2$, $m, n, r \in \mathbb{N}$ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \geq \int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp} dt \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \right)^{-1}, \quad (14)$$

то имеют место равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}(W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi); L_2) &= \lambda_{2n}(W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi); L_2) = E_{n-1}(W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi)) \\ &= n^{-r+1/p} \left\{ \int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников (7)–(11). При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (14), не пусто.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В самом деле, если $f \in L_2^{(r)}$ и

$$f(x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– ряд Фурье функции $f(x)$, то, как известно [10],

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_m^2(f^{(r)}; t) &= \sup\{\|\tilde{\Delta}_h^m(f^{(r)}; \cdot)\|^2 : h \in [0; t]\} \\ &= \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m} : h \in [0; t] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользовавшись следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского (см., например, [15; с. 104]):

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}, \quad 0 < p \leq 2,$$

и соотношением (16), получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^h \tilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/p} &\geq \left(\int_0^h \left[\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right)^{2m} \right]^{p/2} dt \right)^{1/p} \\ &\geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \left(k^{pr} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right)^{mp} dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Докажем, что функция натурального аргумента

$$\psi(k) = k^{pr} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right)^{mp} dt$$

строго возрастает в области $Q = \{k : k \geq n\}$, а потому

$$\min\{\psi(k) : k \in Q\} = \psi(n) = n^{pr} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp} dt. \quad (18)$$

Действительно, вычислив производную $\psi'(u)$, для $u \geq n$ имеем

$$\psi'(u) = u^{rp-1} \left\{ h \left(1 - \frac{\sin uh}{uh} \right)^{mp} + (rp-1) \int_0^h \left(1 - \frac{\sin ut}{ut} \right)^{mp} dt \right\} > 0,$$

и соотношение (18) доказано.

Таким образом, из (17) с учетом (1) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\int_0^h \tilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/p} &\geq n^r E_{n-1}(f) \left(\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp} dt \right)^{1/p} \\ &= n^{r-1/p} E_{n-1}(f) \left(\int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из неравенства (19) имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^{r-1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \tilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/p}} \leq \left(\int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p}. \quad (20)$$

Оценивая снизу величину, стоящую в левой части неравенства (20), для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f_0) &= 1, \quad \tilde{\Omega}_m(f_0^{(r)}; t) = n^r \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^m, \\ \int_0^h \tilde{\Omega}_m^p(f_0^{(r)}; t) dt &= n^{rp-1} \int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^{r-1/p} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \tilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/p}} &\geq \frac{n^{r-1/p} E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \tilde{\Omega}_m^p(f_0^{(r)}; t) dt \right)^{1/p}} \\ &= \left(\int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (21)$$

Сравнивая неравенства (20) и (21), получим требуемое равенство (6). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из неравенства (20) для любой функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}(f) \leq n^{-r+1/p} \left(\int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \left(\int_0^h \tilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/p}. \quad (22)$$

Учитывая определение класса $W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi)$ и соотношения (12), из неравенства (22) получаем оценку сверху для всех n -поперечников (7)–(11) при $h = \pi/n$:

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi); L_2) &\leq \lambda_{2n-1}(W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi); L_2) \leq E_{n-1}(W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi)) \\ &\leq n^{-r+1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Для оценки снизу бернштейновского n -поперечника класса $W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi)$ введем в рассмотрение $(2n+1)$ -мерную сферу полиномов

$$S_{2n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ T_n \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| = n^{-r+1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и покажем, что имеет место включение $S_{2n+1} \subset W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi)$.

В [16] доказано, что для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$ справедливо неравенство

$$\tilde{\Omega}_m(T_n^{(r)}, t) \leq n^r \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)_*^m \|T_n\|. \quad (24)$$

Возведем обе части неравенства (24) в степень p ($1/r < p \leq 2$) и проинтегрируем полученное соотношение по t в пределах от 0 до h . Затем в интеграле, расположенном в правой части полученного неравенства, произведем замену переменной $nt = \tau$, а также заменим норму полинома $T_n \in S_{2n+1}$ радиусом сферы. В итоге с учетом условия (14) получаем

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^h \tilde{\Omega}_m^p(T_n^{(r)}; t) dt \right)^{1/p} \\ &\leq n^r \left(\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)_*^{mp} dt \right)^{1/p} \|T_n\| \\ &= n^{r-1/p} \left(\int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)_*^{mp} dt \right)^{1/p} n^{-r+1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)_*^{mp} dt \right)^{1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \leq \Phi(h). \end{aligned}$$

Отсюда следует $S_{2n+1} \subset W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi)$. Используя неравенства (12) и определение бернштейновского n -поперечника, запишем оценку снизу рассматриваемых экстремальных характеристик

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}(W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi); L_2) \\ \geq \lambda_{2n}(W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi); L_2) \geq b_{2n}(W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi); L_2) \geq b_{2n}(S_{2n+1}; L_2) \\ = n^{-r+1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Сопоставляя неравенства (23) и (25), получаем (15).

Покажем, что функция $\Phi_*(t) = t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha := \alpha(m, p) = \pi \left\{ \int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right\}^{-1}, \quad (26)$$

удовлетворяет ограничению (14). Для числа $\alpha := \alpha(m, p)$ имеем следующую границу значений:

$$1 < \alpha < 2mp + 1. \quad (27)$$

Подставляя Φ_* в (14), получим следующее неравенство:

$$\left(\frac{nh}{\pi} \right)^\alpha \geq \int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)_*^{mp} dt \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1},$$

которое еще предстоит доказать. Полагая $nh = \mu\pi$, $0 \leq \mu < +\infty$, запишем последнее неравенство в виде

$$\mu^\alpha \geq \int_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)_*^{mp} dt \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1}. \quad (28)$$

С учетом (26) неравенство (28) примет вид

$$\frac{\pi}{\alpha} \mu^\alpha \geq \int_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)_*^{mp} dt, \quad 0 \leq \mu < +\infty.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) = \frac{\pi}{\alpha} \mu^\alpha - \int_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)_*^{mp} dt \quad (29)$$

и покажем, что для всех $\mu \in [0, +\infty)$ функция $\varphi(\mu) \geq 0$. Рассуждения проведем для трех случаев: $0 \leq \mu \leq 1$, $1 \leq \mu \leq t_*/\pi$, $t_*/\pi \leq \mu < +\infty$.

Пусть сначала $0 \leq \mu \leq 1$. Запишем функцию φ в окрестности нуля:

$$\varphi(\mu) = \frac{\pi}{\alpha} \mu^\alpha \left[1 - \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{mp} \cdot \frac{2}{2mp+1} O(\mu^{2mp+1-\alpha}) \right]. \quad (30)$$

Из (30) и (27) следует, что в бесконечно малой окрестности нуля функция φ является положительной. Покажем, что на интервале $(0, 1)$ функция φ знакопостоянна.

Рассуждая методом от противного, предположим, что существует точка $\xi \in (0, 1)$, в которой функция φ меняет знак. Поскольку из (29) следует, что $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, в силу теоремы Ролля заключаем, что производная первого порядка

$$\varphi'(\mu) = \pi \left[\mu^{\alpha-1} - \left(1 - \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \right)^{mp} \right] \quad (31)$$

должна иметь не менее двух различных нулей на интервале $(0, 1)$ и, кроме того, $\varphi'(1) = 0$. Но это невозможно, поскольку $\varphi'(\mu)$ является разностью двух функций, одна из которых выпукла вниз, а другая выпукла вверх. Из геометрических соображений очевидно, что φ' может иметь на $(0, 1)$ не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает, что $\varphi(\mu) > 0$ для любого $\mu \in [0, 1]$.

Пусть теперь $1 \leq \mu \leq t_*/\pi$. В этом случае из (31) сразу следует, что $\varphi'(\mu) > 0$ на отрезке $[1, t_*/\pi]$. Таким образом, и в этом случае неравенство (28) доказано.

Наконец, пусть $t_*/\pi \leq \mu < +\infty$. Используя соотношение (13), из (29) получаем

$$\varphi(\mu) = \frac{\pi}{\alpha} \mu^\alpha - \int_0^{t_*} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt - (\mu\pi - t_*) \left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*} \right)^{mp}.$$

Отсюда имеем

$$\varphi'(\mu) = \pi \left[\mu^{\alpha-1} - \left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*} \right)^{mp} \right] > 0, \quad \mu \in \left[\frac{t_*}{\pi}; +\infty \right).$$

Это означает, что на рассматриваемом промежутке $t_*/\pi \leq \mu < +\infty$ неравенство (28) также выполняется. Теорема 2 доказана.

Из доказанной теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 2 справедливы равенства

$$\sup\{|a_n(f)|, |b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi)\} = n^{-r+1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ суть косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без умаления общности, утверждение следствия 1 докажем для коэффициента Фурье $a_n(f)$. В самом деле, в силу ортогональности частичной суммы $S_{n-1}(f; x)$ и функции $\cos nx$, коэффициент Фурье $a_n(f)$ запишем в виде

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - S_{n-1}(f; x)] \cos nx \, dx. \quad (32)$$

Применяя к интегралу в правой части (32) неравенство Гёльдера, с учетом (1) и (15) получим оценку сверху

$$\begin{aligned} & \sup\{|a_n(f)| : f(x) \in W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m, \Phi)\} \\ & \leq \sup\{E_{n-1}(f) : f(x) \in W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m, \Phi)\} \\ & = E_{n-1}(W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m, \Phi)) \leq n^{-r+1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

С целью получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_1(x) = n^{-r+1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos nx.$$

Легко заметить, что $f_1 \in W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m, \Phi)$, а потому

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m, \Phi)\} \\ \geq |a_n(f_1)| = n^{-r+1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Сравнивая неравенства (33) и (34), получаем

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\tilde{\Omega}_m, \Phi)\} = n^{-r+1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Следствие 1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 2 при $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}(W_{1/m}^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi); L_2) &= \lambda_{2n}(W_{1/m}^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi); L_2) = E_{n-1}(W_{1/m}^{(r)}(\tilde{\Omega}_m; \Phi)) \\ &= n^{-r+m}(\pi - Si(\pi))^{-m} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников (7)–(11).

Результат следствия 2 недавно получен Вакарчуком и Забутной [16].

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.
- [2] Л. В. Тайков, “Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **20**:3 (1976), 433–438.
- [3] В. А. Юдин, “Диофантовы приближения в экстремальных задачах”, *Докл. АН СССР*, **251**:1 (1980), 54–57.
- [4] А. Г. Бабенко, “О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 ”, *Матем. заметки*, **39**:5 (1986), 651–664.
- [5] А. А. Лигун, “Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **43**:6 (1988), 757–769.
- [6] В. И. Иванов, О. И. Смирнов, *Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p* , Изд-во Тульск. гос. ун-та, Тула, 1995.
- [7] А. Г. Бабенко, Н. И. Черных, В. Т. Шевалдин, “Неравенство Джексона–Стечкина в L^2 с тригонометрическим модулем непрерывности”, *Матем. заметки*, **65**:6 (1999), 928–932.
- [8] С. Б. Вакарчук, “ K -функционалы и точные значения n -поперечников некоторых классов из L_2 ”, *Матем. заметки*, **66**:4 (1999), 494–499.
- [9] М. Г. Есмаганбетов, “Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона”, *Матем. заметки*, **65**:6 (1999), 816–820.

- [10] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, “Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ ”, *Матем. заметки*, **76**:6 (2004), 803–811.
- [11] С. Б. Вакарчук, “Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 ”, *Матем. заметки*, **78**:5 (2005), 792–796.
- [12] S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutna, “Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities”, *East J. Approx.*, **14**:4 (2008), 411–421.
- [13] М. Ш. Шабозов, “Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ ”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 616–623.
- [14] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.
- [15] A. Pinkus, “ n -Widths in Approximation Theory”, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **7**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [16] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Точное неравенство типа Джексона–Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 328–336.

М. Ш. Шабозов

Институт математики АН Республики

Таджикистан, г. Душанбе

E-mail: shabozov@mail.ru

Поступило

21.11.2011

Исправленный вариант

06.12.2012

К. Тухлиев

Худжандский государственный университет

им. акад. Б. Гафурова

E-mail: Kamaridin.t54@mail.ru