Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Спиридонова, О некоторых конечномерных полупростых алгебрах Хопфа размерности $n(n+1)$, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 253–269

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9308>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:37:58

О некоторых конечномерных полупростых алгебрах Хопфа размерности $n(n+1)$

С. Ю. Спиридонова

В работе изучаются конечномерные полупростые алгебры Хопфа над алгебраически замкнутым полем, имеющие в своем полупростом разложении лишь одно неодномерное слагаемое, в предположении, что группа групповых элементов в дуальной алгебре Хопфа циклическа и имеет минимальный порядок. При данных ограничениях получено детальное описание коумножения и антипода.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Задача классификации конечномерных алгебр Хопфа является одной из важных задач в теории алгебр Хопфа. Для некоторых размерностей она к настоящему времени уже полностью решена, например, для размерностей p , p^2 и $2p^2$, где p – простое, классификация алгебр Хопфа была получена в работах [1]–[5]. Большой прогресс в решении данной задачи достигнут также и для некоторых других размерностей, см., например, [6]. При этом о конечномерных полупростых алгебрах Хопфа известно значительно меньше, чем о конечномерных точечных алгебрах Хопфа. В связи с этим классификация конечномерных полупростых алгебр Хопфа представляет большой интерес.

В настоящей работе исследуются конечномерные полупростые алгебры Хопфа размерности $n(n+1)$ вида

$$H = \bigoplus_{h \in G} k e_h \oplus \text{Mat}(n, k) E, \quad (1.1)$$

где k – алгебраически замкнутое поле, характеристика которого взаимно проста с $\dim H$, G – циклическая группа порядка n , а множество $\{e_h, h \in G\}$ является системой ортогональных центральных идемпотентов в H .

Классификация конечномерных полупростых алгебр Хопфа, которые в своем полупростом разложении имеют лишь одно неодномерное слагаемое, особенно интересна, так как такие алгебры реализуют в некотором смысле минимальный некоммутативный случай. Одномерные слагаемые в полупростом разложении соответствуют групповым элементам двойственной алгебры Хопфа H^* , а порядок группы $G = G(H^*)$ групповых элементов H^* делит n^2 [7; § 3.1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-0058).

В [8; §§ 1, 2] доказано, что коумножение в H имеет вид

$$\Delta(x) = \begin{cases} \sum_h [(h \rightharpoonup x) \otimes e_h + e_h \otimes (x \leftharpoonup h)] + \Delta'(x), & x \in \text{Mat}(n, k), \\ \sum_{f \in G} e_f \otimes e_{f^{-1}h} + \Delta_h, & x = e_h, \end{cases}$$

где

$$\Delta_h = [1 \otimes (h^{-1} \rightharpoonup)]\Delta_1 = [(\leftharpoonup h^{-1}) \otimes 1]\Delta_1 \quad \text{для всех } h \in G, \\ \Delta': \text{Mat}(n, k) \longrightarrow \text{Mat}(n, k) \otimes \text{Mat}(n, k)$$

– гомоморфизм алгебр, не сохраняющий единицу, а левое и правое действия $f \rightharpoonup x$ и $x \leftharpoonup f$ элементов $f \in H^*$ на $x \in H$ задаются по правилу: если

$$\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)},$$

то

$$f \rightharpoonup x = \sum x_{(1)} \langle f, x_{(2)} \rangle, \quad x \leftharpoonup f = \sum \langle f, x_{(1)} \rangle x_{(2)}.$$

При этом коассоциативность коумножения в таких алгебрах Хопфа эквивалентна следующим условиям на Δ' , [8; §§ 1, 2]:

$$(1 \otimes \Delta')\Delta_1 = (\Delta' \otimes 1)\Delta_1, \quad (1.2)$$

$$\Delta'(x \leftharpoonup h) = [(\leftharpoonup h) \otimes 1]\Delta'(x), \quad (1.3)$$

$$[1 \otimes (h \rightharpoonup)]\Delta'(x) = \Delta'(h \rightharpoonup x), \quad (1.4)$$

$$[1 \otimes (\leftharpoonup h)]\Delta'(x) = [(h \rightharpoonup) \otimes 1]\Delta'(x), \quad (1.5)$$

$$[\Delta'(E) \otimes E][y \otimes \Delta_1] = [(\Delta' \otimes 1)\Delta'(y)](E \otimes \Delta_1), \quad (1.6)$$

$$(\Delta_1 \otimes E)[(1 \otimes \Delta')\Delta'(y)] = [\Delta_1 \otimes y][E \otimes \Delta'(E)], \quad (1.7)$$

$$[\Delta'(E) \otimes E][(1 \otimes \Delta')\Delta'(x)] = [(\Delta' \otimes 1)\Delta'(x)][E \otimes \Delta'(E)] \quad (1.8)$$

для всех $x \in \text{Mat}(n, k)$, $h \in G$, где через E обозначаем единичную матрицу из $\text{Mat}(n, k)$.

Алгебры Хопфа рассматриваемого вида подразделяются на два больших класса, [8; § 4]. Для алгебр Хопфа из первого класса $rk\Delta_1 = 1$, а для алгебр из второго класса верно

$$(\Delta_1 \otimes E)(E \otimes \Delta_1) = (E \otimes \Delta_1)(\Delta_1 \otimes E) = 0.$$

При этом из [8; § 4] известно, что случай $\Delta' = 0$ реализуется тогда и только тогда, когда $|G| = n^2$. Такие алгебры были исследованы в [9]. В настоящей работе рассматривается класс алгебр Хопфа с полупростым разложением

$$H = \bigoplus_{h \in G} ke_h \oplus \text{Mat}(n, k)E,$$

для которых $\Delta' \neq 0$ и $rk\Delta_1 = 1$. В этом случае, как показано в [8; § 4], верно следующее:

$$h \rightharpoonup x = A_h x A_h^{-1}, \quad x \leftharpoonup h = B_h x B_h^{-1}, \quad (1.9)$$

где матрицы $A_h, B_h \in GL(n, k)$, $h \in G$, таковы, что

$$A_h A_f = \lambda_{hf} A_{hf}, \quad \lambda_{hf} \in k^*, \quad (1.10)$$

$$B_h = \omega_h U A_h^t U^{-1}, \quad \omega_h \in k^*, \quad (1.11)$$

$$\text{tr } A_h = n \delta_{e,h}, \quad (1.12)$$

где $U \in GL(n, k)$ – некоторая (косо)симметричная матрица. Далее, известно из [8; §§ 4, 6], что антипод имеет вид

$$S(x) = \begin{cases} Ux^t U^{-1}, & x \in \text{Mat}(n, k), \\ e_{h^{-1}}, & x = e_h, \end{cases}$$

а для Δ_1 верно

$$\Delta_1 = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n E_{ij} \otimes S(E_{ji}),$$

где E_{ij} – матричные единицы. При этом на антипод и гомоморфизм Δ' накладываются вследствие [8; § 1] дополнительное условие

$$\mu(1 \otimes S)\Delta'(x) = \mu(S \otimes 1)\Delta'(x) = 0. \quad (1.13)$$

Также известно, что коединица в алгебре Хопфа рассматриваемого типа имеет вид

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in \text{Mat}(n, k), \\ \delta_{e,h}, & x = e_h, \text{ где } e - \text{единица в группе } G. \end{cases}$$

Таким образом, чтобы наделить полупростую конечномерную алгебру рассматриваемого вида структурой алгебры Хопфа, необходимо задать матрицы A_h, B_h , $h \in G$, матрицу U и гомоморфизм алгебр Δ' так, чтобы все указанные условия выполнялись.

Как доказано в [8; § 9], в рассматриваемом случае порядок группы $G = G(H^*)$ равен nq , где q делит n . В настоящей работе изучается минимальный возможный случай $|G| = n$, G – циклическая группа.

В пп. 2–4 данной работы доказывается, что при данных ограничениях матрицы A_h, B_h , $h \in G$, определены в некотором смысле однозначно, а матрица U мономиальна. В п. 5 установлена структура гомоморфизма Δ' . Далее, в п. 6 введены понятия обобщенной кокоммутативности и сильной некокоммутативности и доказан ряд утверждений касательно таких классов алгебр Хопфа. В п. 8 показано, что обобщенно-кокоммутативные алгебры Хопфа рассматриваемого вида существуют только при $n = p^f - 1$, где p – простое, f – натуральное, что является обобщением известного аналогичного факта для кокоммутативных алгебр Хопфа вида (1.1). Также в п. 8 предложена конструкция гомоморфизма Δ' для кокоммутативных алгебр Хопфа вида (1.1) при $n = 2^f - 1$, где f – натуральное. В заключение, эти рассуждения иллюстрируются в п. 9 примерами трех алгебр Хопфа, построенных в данной работе для $n = 3$, $n = 4$ и $n = 7$, в дополнение к известному примеру групповой алгебры симметрической группы третьей степени.

Все необходимые определения можно найти в книге [7].

2. Матрица A_g . Пусть G – циклическая группа порядка n с порождающим элементом g . Заметим, что функция λ_{hf} из (1.10) является 2-коциклом, поэтому в силу [10] можно считать, что $\lambda_{hf} = 1$ для всех $h, f \in G$, если группа G циклическая. Значит, отображения $h \mapsto A_h$ и $h \mapsto B_h$, $h \in G$, являются линейными представлениями группы G . В силу того, что группа G абелева, существует базис, в котором все матрицы A_h , $h \in G$, диагональны, т.е.

$$A_{g^k} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

где $k = 1, \dots, n$, а λ_i , $i = 1, \dots, n$, – некоторые корни степени n из единицы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для алгебры Хопфа вида (1.1) условие (1.12) эквивалентно тому, что все диагональные элементы λ_i матрицы A_g , соответствующей этой алгебре Хопфа, различны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что из (1.12) следует, что все λ_i различны. Рассмотрим элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

и степенные суммы

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Формулы Ньютона, связывающие σ_k и s_k , имеют вид

$$k\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} s_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \sigma_{k-i}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Из (1.12) следует, что

$$s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \operatorname{tr} A_{g^k} = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, n-1, \\ n, & k = n. \end{cases}$$

Используя формулы Ньютона, получаем

$$\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, n-1, \\ (-1)^{n-1}, & k = n. \end{cases}$$

Таким образом, по формулам Виета, связывающим коэффициенты многочлена со значениями элементарных симметрических многочленов от его корней, получаем, что характеристический многочлен для A_g равен $x^n - 1$. Он не имеет кратных корней, так как взаимно прост со своей производной. Получили, что все λ_i различны.

Пусть теперь все элементы λ_i различны. Докажем, что выполнено условие (1.12). Так как λ_i – различные корни степени n из единицы, то они и только они являются корнями многочлена $f(x) = x^n - 1$. По формулам Виета получаем, что

$$\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, n-1, \\ (-1)^{n-1}, & k = n. \end{cases}$$

С помощью формул Ньютона находим

$$\operatorname{tr} A_{g^k} = s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, n-1, \\ n, & k = n, \end{cases}$$

что завершает доказательство теоремы 2.1.

3. Матрица B_g . Рассмотрим алгебру Хопфа вида (1.1) и базис, в котором все матрицы A_h , $h \in G$, диагональны. Воспользуемся результатом предыдущего пункта и заметим, что для $\Delta'(E)$ верно следующее:

$$\begin{aligned} \Delta'(E) &= E \otimes E - \sum_{h \in G} \Delta_h = E \otimes E - \sum_{h \in G} \left(\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n S(E_{ij}) \otimes (h \rightharpoonup E_{ji}) \right) \\ &= E \otimes E - \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \left(S(E_{ij}) \otimes \sum_{k=0}^{n-1} A_{g^k} E_{ij} A_{g^k}^{-1} \right) \\ &= E \otimes E - \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \left(S(E_{ij}) \otimes \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_i^k \lambda_j^{-k}) E_{ij} \right) = E \otimes E - \sum_{i=1}^n S(E_{ii}) \otimes E_{ii}, \end{aligned}$$

так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_i \lambda_j^{-1})^k = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

поскольку $\lambda_i \lambda_j^{-1} = \varepsilon$ – неединичный корень степени n из единицы, и поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k = \frac{1 - \varepsilon^n}{1 - \varepsilon} = 0.$$

Итак, в алгебре Хопфа вида (1.1) имеем

$$\Delta'(E) = E \otimes E - \sum_{i=1}^n S(E_{ii}) \otimes E_{ii} = E \otimes E - \sum_{i=1}^n E_{ii} \otimes S(E_{ii}). \quad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Для алгебры Хопфа вида (1.1) соответствующие ей матрицы B_h , $h \in G$, диагональны в том же базисе, в котором диагональны матрицы A_h , $h \in G$. При этом все диагональные элементы матрицы B_g различны, где g – образующий элемент группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим E в (1.3) и возьмем в качестве h образующий элемент группы G , тогда, с одной стороны, получим

$$\Delta'(E \leftarrow g) = \Delta'(B_g E B_g^{-1}) = \Delta'(E).$$

С другой стороны, воспользуемся вторым равенством в (3.1) и получим

$$[(\leftarrow g) \otimes 1] \Delta'(E) = E \otimes E - \sum (B_g E_{ii} B_g^{-1}) \otimes S(E_{ii}).$$

Приравняв обе стороны и снова воспользуемся вторым равенством в (3.1). Получаем

$$E \otimes E - \sum_{i=1}^n E_{ii} \otimes S(E_{ii}) = E \otimes E - \sum_{i=1}^n (B_g E_{ii} B_g^{-1}) \otimes S(E_{ii}).$$

Из этого находим, что $E_{ii} = B_g E_{ii} B_g^{-1}$ для любого i . Пусть $B_g = (b_{ij})$. Из эквивалентного равенства $B_g E_{ii} = E_{ii} B_g$ следует $b_{ik} = 0$ для любых $i \neq k$. Следовательно, матрица B_g диагональна. Для любого элемента $h = g^k \in G$, $0 < k \leq n$, имеем $B_h = B_{g^k} = (B_g)^k$. Поэтому матрицы B_h также диагональны в том же базисе, в котором диагональны A_h , $h \in G$.

Доказательство второй части теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 2.1 ввиду того, что из (1.11) следует выполнение условий, аналогичных (1.12), для матриц B_h , $h \in G$.

4. Мономиальность матрицы U .

ТЕОРЕМА 4.1. *Матрица U , соответствующая алгебре Хопфа вида (1.1), мономиальна в базисе, в котором A_g и B_g диагональны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A_g = \sum_i \lambda_i E_{ii}, \quad B_g = \sum_i \mu_i E_{ii}, \quad U = (u_{ij}).$$

Рассмотрим равенство (1.11) и перейдем от матриц B_h к матрицам $B'_h = \omega_h^{-1} B_h$, что возможно, так как матрицы B_h определены в (1.9) с точностью до ненулевого множителя. Матрицы B'_h всюду далее будем обозначать через B_h . В силу диагональности матрицы A_g и цикличности группы G приводим равенство (1.11) к виду $U A_g = B_g U$. Другими словами,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 u_{11} & \dots & \lambda_n u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 u_{n1} & \dots & \lambda_n u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 u_{11} & \dots & \mu_1 u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_n u_{n1} & \dots & \mu_n u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если $u_{kl} \neq 0$, то $\lambda_l = \mu_k$.

Допустим, что в k -й строке матрицы U имеются два ненулевых элемента u_{kl} и u_{km} , $l \neq m$. Тогда $\lambda_l = \mu_k$ и $\lambda_m = \mu_k$, что противоречит теореме 2.1. Значит, в произвольной k -й строке матрицы U имеется только один ненулевой элемент. Аналогично, с помощью теоремы 3.1 доказываем, что в произвольном l -м столбце матрицы U имеется только один ненулевой элемент.

5. Эквивалентность некоторых условий и коумножение от матричных элементов. Воспользуемся теоремой 4.1. Пусть $\sigma \in S_n$ и

$$U = \sum_{r=1}^n u_r E_{r\sigma(r)} \quad (5.1)$$

– мономиальная матрица, соответствующая некоторой алгебре Хопфа вида (1.1). Так как она должна быть при этом (косо)симметричной [8], то перестановка σ является произведением транспозиций и обратна самой себе. При этом имеем $u_{\sigma(i)} = \pm u_i$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *В алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей U из (5.1) верны следующие равенства:*

$$\begin{aligned} S(E_{ij}) &= \frac{u_j}{u_i} E_{\sigma(j)\sigma(i)}, & \Delta_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes \frac{u_i}{u_j} E_{\sigma(i)\sigma(j)}, \\ \Delta'(E) &= E \otimes E - \sum_{i=1}^n E_{ii} \otimes E_{\sigma(i)\sigma(i)} = E \otimes E - \sum_{i=1}^n E_{\sigma(i)\sigma(i)} \otimes E_{ii}, \\ g \rightharpoonup E_{ij} &= \frac{\lambda_i}{\lambda_j} E_{ij}, & E_{ij} \leftharpoonup g &= \frac{\lambda_{\sigma(i)}}{\lambda_{\sigma(j)}} E_{ij}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$U^{-1} = \sum_{r=1}^n u_r^{-1} E_{\sigma(r)r} = \sum_{r=1}^n u_{\sigma(r)}^{-1} E_{r\sigma(r)},$$

получаем

$$S(E_{ij}) = U E_{ji} U^{-1} = \frac{u_j}{u_i} E_{\sigma(j)\sigma(i)}.$$

При этом при $i = j$ находим $S(E_{ii}) = E_{\sigma(i)\sigma(i)}$. Из этого и (3.1) получаем третье требуемое равенство. Теперь вычислим B_g и найдем действия $g \rightharpoonup x$ и $x \leftharpoonup g$. Имеем

$$A_g^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} E_{ii}, \quad B_g^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_{\sigma(i)}^{-1} E_{ii},$$

а значит, подставив это в (1.9), получим, что действия имеют указанный вид. Для завершения доказательства воспользуемся равенством $S(E_{ij}) = (u_j/u_i) E_{\sigma(j)\sigma(i)}$ и найдем Δ_1 .

Теперь рассмотрим гомоморфизм алгебр Δ' . Пусть

$$\Delta'(E_{ij}) = \sum_{k,l,p,q=1}^n \omega_{klpq}^{ij} E_{kl} \otimes E_{pq}. \quad (5.3)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *Условие коассоциативности (1.2) в алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей U из (5.1) эквивалентно условию*

$$\frac{u_i}{u_j} \omega_{klpq}^{\sigma(i)\sigma(j)} = \frac{u_p}{u_q} \omega_{ijk l}^{\sigma(p)\sigma(q)} = \frac{u_k}{u_l} \omega_{pqij}^{\sigma(k)\sigma(l)}$$

для всех i, j, k, l, p, q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляем Δ_1 , найденное в утверждении 5.1, в (1.2). Слева получаем

$$\begin{aligned} (1 \otimes \Delta')\Delta_1 &= (1 \otimes \Delta') \left(\frac{1}{n} \sum_{ij} E_{ij} \otimes \frac{u_i}{u_j} E_{\sigma(i)\sigma(j)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{ij} \frac{u_i}{u_j} E_{ij} \otimes \left(\sum_{klpq=1}^n \omega_{klpq}^{\sigma(i)\sigma(j)} E_{kl} \otimes E_{pq} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{ij} \sum_{klpq=1}^n \left(\frac{u_i}{u_j} \omega_{klpq}^{\sigma(i)\sigma(j)} \right) E_{ij} \otimes E_{kl} \otimes E_{pq}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\Delta' \otimes 1)\Delta_1 &= (\Delta' \otimes 1) \left(\frac{1}{n} \sum_{ij} E_{ij} \otimes \frac{u_i}{u_j} E_{\sigma(i)\sigma(j)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{ij} \frac{u_i}{u_j} \left(\sum_{abcd=1}^n \omega_{abcd}^{ij} E_{ab} \otimes E_{cd} \right) \otimes E_{\sigma(i)\sigma(j)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{ij} \sum_{abcd=1}^n \left(\frac{u_i}{u_j} \omega_{abcd}^{ij} \right) E_{ab} \otimes E_{cd} \otimes E_{\sigma(i)\sigma(j)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{ij} \sum_{klpq=1}^n \left(\frac{u_p}{u_q} \omega_{ijkl}^{\sigma(p)\sigma(q)} \right) E_{ij} \otimes E_{kl} \otimes E_{pq}. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты перед равными тензорными тройками, получим первое требуемое равенство. Затем заменой индексов получим второе требуемое равенство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. Условие коассоциативности (1.3) в алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей U из (5.1) эквивалентно условию

$$\text{если } \frac{\lambda_{\sigma(i)}}{\lambda_{\sigma(j)}} \neq \frac{\lambda_{\sigma(k)}}{\lambda_{\sigma(l)}}, \quad \text{то } \omega_{klpq}^{ij} = 0 \quad \text{для всех } p, q,$$

другими словами,

$$\text{если } \omega_{klpq}^{ij} \neq 0, \quad \text{то } \frac{\lambda_{\sigma(i)}}{\lambda_{\sigma(j)}} = \frac{\lambda_{\sigma(k)}}{\lambda_{\sigma(l)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим условие (1.3). С одной стороны,

$$\Delta'(E_{ij} \leftarrow g) = \Delta' \left(\frac{\lambda_{\sigma(i)}}{\lambda_{\sigma(j)}} E_{ij} \right) = \frac{\lambda_{\sigma(i)}}{\lambda_{\sigma(j)}} \sum_{k,l,p,q} \omega_{klpq}^{ij} E_{kl} \otimes E_{pq}.$$

С другой стороны,

$$[(\leftarrow g) \otimes 1]\Delta'(E_{ij}) = \sum_{k,l,p,q} \frac{\lambda_{\sigma(k)}}{\lambda_{\sigma(l)}} \omega_{klpq}^{ij} E_{kl} \otimes E_{pq}.$$

Если $\lambda_{\sigma(i)}/\lambda_{\sigma(j)} \neq \lambda_{\sigma(k)}/\lambda_{\sigma(l)}$, то чтобы полученное выше равенство выполнялось, необходимо $\omega_{klpq}^{ij} = 0$. В случае $\omega_{klpq}^{ij} \neq 0$ на него можно сократить и получить $\lambda_{\sigma(i)}/\lambda_{\sigma(j)} = \lambda_{\sigma(k)}/\lambda_{\sigma(l)}$, что завершает доказательство.

Аналогичным образом доказываются следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. Условие коассоциативности (1.4) в алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей U из (5.1) эквивалентно условию

$$\text{если } \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \neq \frac{\lambda_p}{\lambda_q}, \quad \text{то } \omega_{klpq}^{ij} = 0 \quad \text{для всех } k, l,$$

другими словами,

$$\text{если } \omega_{klpq}^{ij} \neq 0, \quad \text{то } \frac{\lambda_i}{\lambda_j} = \frac{\lambda_p}{\lambda_q}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.5. Условие коассоциативности (1.5) в алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей U из (5.1) эквивалентно условию

$$\text{если } \frac{\lambda_{\sigma(p)}}{\lambda_{\sigma(q)}} \neq \frac{\lambda_k}{\lambda_l}, \quad \text{то } \omega_{klpq}^{ij} = 0 \quad \text{для всех } i, j,$$

другими словами,

$$\text{если } \omega_{klpq}^{ij} \neq 0, \quad \text{то } \frac{\lambda_{\sigma(p)}}{\lambda_{\sigma(q)}} = \frac{\lambda_k}{\lambda_l}.$$

Из утверждений 5.3 и 5.4 получаем следующий результат.

ЛЕММА 5.1. Если $k \neq l$ или $p \neq q$, то $\omega_{klpq}^{ii} = 0$.

Итак, получили, что общий вид $\Delta'(E_{ij})$ упрощается для случая $i = j$:

$$\Delta'(E_{ii}) = \sum_{k,p=1}^n \omega_{kkpp}^{ii} E_{kk} \otimes E_{pp}. \quad (5.4)$$

ЛЕММА 5.2. Для любых i, k, p , коэффициент ω_{kkpp}^{ii} в разложении (5.4) равен либо нулю, либо единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Δ' – гомоморфизм, то $(\Delta'(E_{ii}))^2 = \Delta'(E_{ii})$. Из этого получаем, что $(\omega_{kkpp}^{ii})^2 = \omega_{kkpp}^{ii}$, из чего непосредственно следует утверждение данной леммы.

ЛЕММА 5.3. Если в $\Delta'(E_{ii})$ слагаемое $E_{kk} \otimes E_{pp}$ присутствует в разложении (5.4) с ненулевым коэффициентом, то во всех остальных $\Delta'(E_{jj})$ коэффициент при этом элементе $E_{kk} \otimes E_{pp}$ равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, слагаемое $E_{kk} \otimes E_{pp}$ есть с ненулевым коэффициентом в $\Delta'(E_{ii})$ и $\Delta'(E_{jj})$, $i \neq j$. Тогда оно также будет присутствовать с ненулевым коэффициентом в их произведении $\Delta'(E_{ii})\Delta'(E_{jj})$, что противоречит тому, что Δ' – гомоморфизм.

ЛЕММА 5.4. В $\Delta'(E_{ii})$ для любого k матричная единица E_{kk} встречается в разложении (5.4) не более одного раза слева и не более одного раза справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, в некотором $\Delta'(E_{ii})$ есть слагаемые $E_{kk} \otimes E_{pp}$ и $E_{kk} \otimes E_{rr}$. Тогда вследствие утверждения 5.2 элемент из матричного квадрата $E_{\sigma(i)\sigma(i)} \otimes E_{kk}$ будет присутствовать с ненулевыми коэффициентами одновременно в $\Delta'(E_{\sigma(p)\sigma(p)})$ и в $\Delta'(E_{\sigma(r)\sigma(r)})$, что противоречит лемме 5.3. Аналогично доказывается для левых множителей из $\Delta'(E_{ii})$.

ТЕОРЕМА 5.1. В алгебре Хопфа вида (1.1) для любого i в общем виде $\Delta'(E_{ii})$ из (5.4) имеется ровно $n - 1$ ненулевой коэффициент, при этом для любого $k \neq i$ матричная единица E_{kk} встречается в $\Delta'(E_{ii})$ ровно один раз слева и один раз справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида $\Delta'(E)$ в (5.2) видно, что каждое E_{kk} встречается в $\Delta'(E)$ $n - 1$ раз справа и $n - 1$ раз слева. Допустим, что в некотором $\Delta'(E_{ii})$ матричная единица E_{kk} , $k \neq i$, не встречается, например, слева. Тогда в каком-то другом $\Delta'(E_{jj})$, $j \neq k$, эта матричная единица встречается слева не менее двух раз, что противоречит лемме 5.4.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Элементу $\Delta'(E_{ii})$ можно поставить в соответствие матрицу S_i следующим образом:

$$(S_i)_{kp} = \begin{cases} 1, & \omega_{kkpp}^{ii} = 1, \\ 0, & \omega_{kkpp}^{ii} = 0. \end{cases}$$

Из теоремы 5.1 следует, что S_i будет соответствовать некоторой перестановке a_i на множестве $\{1, 2, \dots, n\}/\{i\}$, причем $a_i(k) \neq \sigma(k)$ для всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}/\{i\}$. Дополнив $a_i(i) = i$, получим, что $\Delta'(E_{ii})$ задается перестановкой $a_i \in S_n$, а именно

$$\Delta'(E_{ii}) = \sum_{k \neq i} E_{kk} \otimes E_{a_i(k)a_i(k)}.$$

Перейдем к изучению $\Delta'(E_{ij})$.

ЛЕММА 5.5. В $\Delta'(E_{ij})$ коэффициент при некотором $E_{ku} \otimes E_{pv}$ в разложении (5.3) не равен нулю тогда и только тогда, когда в $\Delta'(E_{ii})$ коэффициент при $E_{kk} \otimes E_{pp}$ в разложении (5.4) равен единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в $\Delta'(E_{ij})$ в разложении (5.3) некоторое $E_{ku} \otimes E_{pv}$ присутствует с ненулевым коэффициентом. Допустим, что в $\Delta'(E_{ii})$ коэффициент при $E_{kk} \otimes E_{pp}$ в разложении (5.4) равен нулю. Тогда в $\Delta'(E_{ii})\Delta'(E_{ij})$ слагаемого $E_{ku} \otimes E_{pv}$ уже не будет, что противоречит тому, что Δ' – гомоморфизм. Теперь пусть в $\Delta'(E_{ii})$ коэффициент при $E_{kk} \otimes E_{pp}$ равен единице. Допустим, что в $\Delta'(E_{ij})$ коэффициент при $E_{ku} \otimes E_{pv}$ для всех u и v равен нулю. Тогда и в произведении $\Delta'(E_{ij})\Delta'(E_{ji})$ коэффициент при $E_{kk} \otimes E_{pp}$ также равен нулю, что противоречит тому, что Δ' – гомоморфизм.

Аналогично лемме 5.5 получаем следующий результат.

ЛЕММА 5.6. В $\Delta'(E_{ij})$ коэффициент при некотором $E_{ul} \otimes E_{vq}$ в разложении (5.3) не равен нулю тогда и только тогда, когда в $\Delta'(E_{jj})$ коэффициент при $E_{ll} \otimes E_{qq}$ в разложении (5.4) равен единице.

ТЕОРЕМА 5.2. В алгебре Хопфа вида (1.1) для любых i и j в разложении (5.3) есть ровно $n - 1$ ненулевой коэффициент. При этом

- 1) для любого $k \neq i$ ровно один коэффициент ω_{klpq}^{ij} отличен от нуля;
- 2) для любого $p \neq i$ ровно один коэффициент ω_{klpq}^{ij} отличен от нуля;
- 3) для любого $l \neq j$ ровно один коэффициент ω_{klpq}^{ij} отличен от нуля;
- 4) для любого $q \neq j$ ровно один коэффициент ω_{klpq}^{ij} отличен от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого из $n - 1$ слагаемого вида $E_{kk} \otimes E_{pp}$ из разложения $\Delta'(E_{ii})$ в элементе $\Delta'(E_{ij})$ найдется по лемме 5.5 хотя бы одно слагаемое вида $E_{ku} \otimes E_{pv}$ с ненулевым коэффициентом. При этом ввиду утверждения 5.4 для u должно выполняться $\lambda_{\sigma(k)}/\lambda_{\sigma(u)} = \lambda_{\sigma(i)}/\lambda_{\sigma(j)}$. Индекс u определен однозначно, так как в силу теоремы 2.1 числа λ_s различны. Аналогично, вследствие утверждения 5.3 для v выполнено равенство $\lambda_p/\lambda_v = \lambda_i/\lambda_j$, и v определено однозначно. Аналогичным образом с помощью леммы 5.6 доказывается, что для любого $l \neq j$ и $q \neq j$ в элементе $\Delta'(E_{ij})$ найдется ровно одно слагаемое $E_{ul} \otimes E_{vq}$ с ненулевым коэффициентом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.6. Условие коассоциативности (1.6) в алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей U из (5.1) эквивалентно условию

$$\omega_{klpq}^{ij} \omega_{ij\sigma(p)\sigma(q)}^{kl} = \frac{u_p}{u_q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y = E_{ij}$, то в левой части (1.6) получаем

$$\begin{aligned} [\Delta'(E) \otimes E][E_{ij} \otimes \Delta_1] &= \left[E \otimes E \otimes E - \sum_{k=1}^n E_{kk} \otimes E_{\sigma(k)\sigma(k)} \otimes E \right] (E_{ij} \otimes \Delta_1) \\ &= E_{ij} \otimes \left(\frac{1}{n} \sum_{\alpha, \beta=1}^n E_{\alpha\beta} \otimes \frac{u_\alpha}{u_\beta} E_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} \right) - \frac{1}{n} \sum_{\alpha, \beta=1}^n E_{ij} \otimes E_{\sigma(i)\sigma(i)} E_{\alpha\beta} \otimes \frac{u_\alpha}{u_\beta} E_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} \\ &= E_{ij} \otimes \left(\frac{1}{n} \sum_{\alpha, \beta=1}^n E_{\alpha\beta} \otimes \frac{u_\alpha}{u_\beta} E_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} \right) - \frac{1}{n} \sum_{\beta=1}^n E_{ij} \otimes E_{\sigma(i)\beta} \otimes \frac{u_{\sigma(i)}}{u_\beta} E_{i\sigma(\beta)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha \neq \sigma(i)} E_{ij} \otimes E_{\alpha\beta} \otimes \frac{u_\alpha}{u_\beta} E_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}. \end{aligned}$$

В правой части получаем

$$\begin{aligned} [(\Delta' \otimes 1)\Delta'(E_{ij})](E \otimes \Delta_1) &= (\Delta' \otimes 1) \left(\sum_k \omega_{kx a_i(k) a_j(x)}^{ij} E_{kx} \otimes E_{a_i(k) a_j(x)} \right) \left(E \otimes \frac{1}{n} \sum_{\alpha, \beta=1}^n E_{\alpha\beta} \otimes \frac{u_\alpha}{u_\beta} E_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} \right) \\ &= \sum_{k, t} \omega_{kx a_i(k) a_j(x)}^{ij} \omega_{t y a_k(t) a_x(y)}^{kx} E_{ty} \otimes E_{a_k(t) a_x(y)} \otimes E_{a_i(k) a_j(x)} \\ &\quad \times \left(E \otimes \frac{1}{n} \sum_{\alpha, \beta=1}^n E_{\alpha\beta} \otimes \frac{u_\alpha}{u_\beta} E_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} \right), \end{aligned}$$

где x таково, что $\lambda_{\sigma(k)}/\lambda_{\sigma(x)} = \lambda_{\sigma(i)}/\lambda_{\sigma(j)}$, а y таково, что $\lambda_{\sigma(t)}/\lambda_{\sigma(y)} = \lambda_{\sigma(k)}/\lambda_{\sigma(x)}$. Раскрывая скобки, получаем, что справа остаются лишь те слагаемые, у которых $a_x(y) = \sigma(a_j(x))$. Из утверждений 5.3, 5.4, 5.5 следует, что если произведение коэффициентов $\omega_{kx a_i(k) a_j(x)}^{ij} \omega_{t y a_k(t) a_x(y)}^{kx}$ не равно нулю, то $a_k(t) = \sigma(a_i(k))$. При этом из равенства (1.6) имеем $t = i$, $y = j$. Теперь, приравнявая коэффициенты перед равными тензорными тройками, получаем требуемое.

Аналогично утверждению 5.6 получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.7. Условие коассоциативности (1.7) в алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей U из (5.1) эквивалентно условию

$$\omega_{klpq}^{ij} \omega_{\sigma(k)\sigma(l)ij}^{pq} = \frac{u_k}{u_l}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.8. Условие коассоциативности (1.8) в алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей U из (5.1) эквивалентно условию

$$\omega_{klpq}^{ij} \omega_{stuv}^{kl} = \omega_{st\alpha\beta}^{ij} \omega_{uvpq}^{\alpha\beta},$$

где все коэффициенты ненулевые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим (1.8), положив $x = E_{\xi\eta}$. Слева получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{k,l,p,q,s,t,u,v,\alpha,\beta,\gamma,\delta} \omega_{klpq}^{ii} \omega_{stuv}^{\xi\eta} \omega_{\alpha\beta\gamma\delta}^{uv} E_{kl} E_{st} \otimes E_{pq} E_{\alpha\beta} \otimes E_{\gamma\delta} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k,p,q,s,t,u,v,\beta,\gamma,\delta} \omega_{kspq}^{ii} \omega_{stuv}^{\xi\eta} \omega_{q\beta\gamma\delta}^{uv} E_{kt} \otimes E_{p\beta} \otimes E_{\gamma\delta}. \end{aligned}$$

Справа получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{k,l,p,q,s,t,u,v,\alpha,\beta,\gamma,\delta} \omega_{klpq}^{ii} \omega_{stuv}^{\xi\eta} \omega_{\alpha\beta\gamma\delta}^{st} E_{\alpha\beta} \otimes E_{\gamma\delta} E_{kl} \otimes E_{uv} E_{pq} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k,l,q,s,t,u,v,\alpha,\beta,\gamma} \omega_{klwq}^{ii} \omega_{stuv}^{\xi\eta} \omega_{\alpha\beta\gamma k}^{st} E_{\alpha\beta} \otimes E_{\gamma l} \otimes E_{uq}. \end{aligned}$$

Переобозначив справа индексы и приравняв коэффициенты перед равными тензорными тройками, получаем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{s,q,u,v} \omega_{kspq}^{ii} \omega_{stuv}^{\xi\eta} \omega_{q\beta\gamma\delta}^{uv} = \sum_{i=1}^n \sum_{s,q,u,v} \omega_{q\beta v\delta}^{ii} \omega_{su\gamma v}^{\xi\eta} \omega_{ktpq}^{su}$$

для всех $\xi, \eta, k, t, p, \beta, \gamma, \delta$. Используя леммы 5.1, 5.2 и 5.3, получаем

$$\sum_{u,v} \omega_{ktuv}^{\xi\eta} \omega_{p\beta\gamma\delta}^{uv} = \sum_{s,u} \omega_{su\gamma\delta}^{\xi\eta} \omega_{ktp\beta}^{su}$$

для всех $\xi, \eta, k, t, p, \beta, \gamma, \delta$. Из теоремы 5.2 следует, что в суммировании слева и справа только одно слагаемое отлично от нуля, из чего переобозначением индексов получаем требуемое.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.9. В алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей U из (5.1) следующие шесть условий на коэффициенты в общем разложении (5.3) эквивалентны:

- 1) $\omega_{klpq}^{ij} \neq 0$, 2) $\omega_{ij\sigma(p)\sigma(q)}^{kl} \neq 0$, 3) $\omega_{\sigma(k)\sigma(l)ij}^{pq} \neq 0$,
- 4) $\omega_{\sigma(i)\sigma(j)kl}^{\sigma(p)\sigma(q)} \neq 0$, 5) $\omega_{pq\sigma(i)\sigma(j)}^{\sigma(k)\sigma(l)} \neq 0$, 6) $\omega_{\sigma(p)\sigma(q)\sigma(k)\sigma(l)}^{\sigma(i)\sigma(j)} \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из утверждений 5.2, 5.6 и 5.7.

Ввиду теоремы 2.1 без ограничения общности можно считать, что

$$A_g = \sum_{i=1}^n \varepsilon^i E_{ii}, \quad (5.5)$$

где ε – первообразный корень степени n из единицы.

В следующем утверждении, как и всюду далее в работе, сложение индексов понимается по модулю n .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.10. В алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей A_g из (5.5) и матрицей U из (5.1) верно: если $\omega_{klpq}^{ij} \neq 0$, то

$$i - j = p - q, \quad \sigma(p) - \sigma(q) = k - l, \quad \sigma(k) - \sigma(l) = \sigma(i) - \sigma(j) \pmod{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем утверждения 5.3, 5.4 и 5.5, заметив, что $\varepsilon^i/\varepsilon^j = \varepsilon^k/\varepsilon^l$ верно тогда и только тогда, когда $\varepsilon^{j-i} = \varepsilon^{l-k}$, что равносильно тому, что $j - i = l - k \pmod{n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Будем говорить, что перестановка $\sigma \in S_n$ сохраняет разность, если для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполнено

$$\sigma(i) - \sigma(j) = i - j \pmod{n}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.11. Если в алгебре Хопфа вида (1.1) с матрицей A_g из (5.5) перестановка σ из (5.1) сохраняет разность, то верно следующее:

$$\text{если } \omega_{kkpp}^{ii} \neq 0, \quad \text{то } \omega_{(k+1)(k+1)(p+1)(p+1)}^{(i+1)(i+1)} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega_{kkpp}^{ii} \neq 0$. Тогда по лемме 5.5 коэффициент в разложении (5.3) при некотором $E_{ku} \otimes E_{pv}$ не равен нулю в $\Delta'(E_{i(i+1)})$. Применяя утверждение 5.10, находим, что $u = k + 1$, $v = p + 1$. Следовательно, по лемме 5.6 получаем требуемое.

6. Обобщенная кокоммутативность и сильная некокоммутативность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Будем называть алгебру Хопфа вида (1.1) *сильно некокоммутативной*, если существуют индексы i, j, k, l, p, q такие, что $\omega_{klpq}^{ij} \neq 0$ и $\omega_{pqkl}^{ij} = 0$, и *обобщенно-кокоммутативной*, если для любых индексов имеем $\omega_{klpq}^{ij} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\omega_{pqkl}^{ij} \neq 0$.

Докажем несколько утверждений об алгебрах Хопфа из этих классов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. Если n четно, а матрица U диагональна, то все соответствующие алгебры Хопфа H вида (1.1) сильно некокоммутативны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица U диагональна тогда и только тогда, когда перестановка σ тождественна. Чтобы алгебра Хопфа H была обобщенно-кокоммутативной, необходимо, чтобы все матрицы S_i из следствия 5.1 были симметричны. По доказанному выше матрица S_i соответствует перестановке a_i на множестве $\{1, 2, \dots, n\}/\{i\}$, причем $a_i(k) \neq \sigma(k)$ для всех k из множества $\{1, 2, \dots, n\}/\{i\}$. Так как n четно и перестановка σ тождественна, то условие симметричности матрицы S_i эквивалентно тому, что перестановка a_i является произведением транспозиций с непересекающимися орбитами. Так как $n - 1$ элементов при четном n нельзя разбить на непересекающиеся пары, то матрицы S_i не могут быть симметричными.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.2. Если матрица U диагональна, то все соответствующие алгебры Хопфа вида (1.1) обобщенно-кокоммутативны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица U диагональна тогда и только тогда, когда перестановка σ тождественна. Пусть некоторый коэффициент $\omega_{klpq}^{ij} \neq 0$. Тогда по утверждению 5.9 коэффициент $\omega_{\sigma(p)\sigma(q)\sigma(k)\sigma(l)}^{\sigma(i)\sigma(j)} \neq 0$. Так как перестановка σ тождественна, то получаем $\omega_{pqkl}^{ij} \neq 0$. Из этого следует, что алгебра Хопфа обобщенно-кокоммутативна.

ТЕОРЕМА 6.1. Если n четно, а матрица U диагональна, то соответствующих ей алгебр Хопфа вида (1.1) не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 6.1 и 6.2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.3. Если алгебра Хопфа вида (1.1) с матрицей A_g из (5.5) обобщенно-кокоммутативна, то соответствующая перестановка $\sigma \in S_n$ сохраняет разность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольные $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Для некоторых p, q, k, l коэффициент $\omega_{klpq}^{ij} \neq 0$. Тогда имеем также $\omega_{pqkl}^{ij} \neq 0$. По утверждению 5.10 из этого следует, что выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} i - j = p - q, & \quad \sigma(p) - \sigma(q) = k - l, & \quad \sigma(k) - \sigma(l) = \sigma(i) - \sigma(j); \\ i - j = k - l, & \quad \sigma(k) - \sigma(l) = p - q, & \quad \sigma(p) - \sigma(q) = \sigma(i) - \sigma(j). \end{aligned}$$

Из этих равенств получаем, что $\sigma(i) - \sigma(j) = i - j$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.4. Перестановка $\sigma \in S_n$ сохраняет разность тогда и только тогда, когда матрица U из (5.1) либо диагональна, либо

$$U = \begin{pmatrix} 0 & T \\ \pm T & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } T - \text{диагональная матрица.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перестановка $\sigma \in S_n$ сохраняет разность тогда и только тогда, когда является циклическим сдвигом. Тогда матрица $U = DP$ является произведением диагональной матрицы D на матрицу P циклического сдвига. Так как U (косо)симметрична, то матрица P симметрична. В случае нечетного n такое может быть, только когда перестановка σ единична. В случае четного n перестановка σ либо единична, либо $\sigma(i) = i + (n/2) \pmod{n}$. Единичной перестановке σ в силу (5.1) соответствует диагональная матрица, а во втором случае соответствующей матрицей U является (косо)симметричная матрица вида

$$U = \begin{pmatrix} 0 & T \\ \pm T & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } T - \text{диагональная матрица,}$$

что завершает доказательство данного утверждения.

Из утверждений 6.3 и 6.4, а также теоремы 6.1 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.2. Если алгебра Хопфа H вида (1.1) с матрицей A_g из (5.5) обобщенно-кокоммутативна, то в случае нечетного n соответствующая матрица U диагональна, а в случае четного n матрица U имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & T \\ \pm T & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } T - \text{диагональная матрица.}$$

7. Кокоммутативность и обобщенная кокоммутативность. Теперь можно показать, что определение обобщенной кокоммутативности корректно в том смысле, что класс кокоммутативных алгебр Хопфа рассматриваемого вида содержится в классе обобщенно-кокоммутативных алгебр Хопфа данного вида.

Рассмотрим автоморфизм τ алгебры $\text{Mat}(n, k) \otimes \text{Mat}(n, k)$ такой, что

$$\tau(A \otimes B) = B \otimes A \quad \text{для всех } A, B \in \text{Mat}(n, k).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. *Алгебра Хопфа вида (1.1) кокоммутативна тогда и только тогда, когда $\tau \circ \Delta' = \Delta'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что алгебра Хопфа вида (1.1) кокоммутативна тогда и только тогда, когда, во-первых, $\tau \circ \Delta' = \Delta'$ и, во-вторых, $h \rightharpoonup x = x \leftharpoonup h$ для всех $h \in G$, $x \in \text{Mat}(n, k)$. Последнее эквивалентно тому, что $A_g = \xi B_g$, $\xi \in k^*$. Ввиду $B_g = U A_g U^{-1}$ и (5.1) это выполнено тогда и только тогда, когда $\sigma \in S_n$ сохраняет разность. Заметим, что если $\tau \circ \Delta' = \Delta'$, то алгебра Хопфа обобщенно-кокоммутативна. Из утверждения 6.3 получаем, что условие $h \rightharpoonup x = x \leftharpoonup h$ всегда выполняется в случае, когда $\tau \circ \Delta' = \Delta'$. Непосредственно из этого получаем, что если $\tau \circ \Delta' = \Delta'$, то алгебра Хопфа вида (1.1) кокоммутативна. Если же алгебра Хопфа кокоммутативна, то очевидно, что $\tau \circ \Delta' = \Delta'$.

Таким образом, доказано, что класс обобщенно-кокоммутативных алгебр Хопфа вида (1.1) содержит в себе класс кокоммутативных алгебр Хопфа такого вида.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.2. *Если при некотором n существует обобщенно-кокоммутативная алгебра Хопфа вида (1.1), то при этом n существует также кокоммутативная алгебра Хопфа вида (1.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_1 – некая обобщенно-кокоммутативная алгебра Хопфа вида (1.1), и пусть ей соответствует матрица U . Заменим в матрице U все элементы на единицы и положим все ненулевые коэффициенты ω_{klpq}^{ij} в алгебре H_1 равными единице. Получим новую алгебру Хопфа H_2 , в которой все условия коассоциативности будут выполнены, и при этом $\tau \circ \Delta' = \Delta'$. Ввиду утверждения 7.1 она будет кокоммутативной.

8. Размерность и конструкция гомоморфизма Δ' в случае чисел Мерсенна. Пусть H – кокоммутативная алгебра Хопфа вида (1.1). Тогда вследствие теоремы 2.3.1 из [7] получаем, что H – групповая алгебра некоторой группы F . В [11] доказано, что если группа F имеет с точностью до изоморфизма одно n -мерное представление и n одномерных, то $n = p^f - 1$, где p – простое, f – натуральное число. Таким образом, кокоммутативные алгебры Хопфа вида (1.1) существуют только при $n = p^f - 1$, где p – простое, f – натуральное число. Применяя утверждение 7.2, получаем тот же факт для обобщенно-кокоммутативных алгебр Хопфа. Итак, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть H – обобщенно-кокоммутативная алгебра Хопфа вида (1.1). Тогда $n = p^f - 1$, где p – простое, f – натуральное число.*

Далее будем рассматривать случай нечетного n указанного выше вида, т.е. $n = 2^f - 1$, где f – натуральное число. Числа вида $n = 2^f - 1$, где f – натуральное, называются *числами Мерсенна* и представляют большой интерес в связи с тем, что среди них были найдены наибольшие известные на данный момент простые числа.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Если n нечетное и $n \neq 2^f - 1$, где f – натуральное, то обобщенно-кокоммутативных алгебр Хопфа вида (1.1) не существует.

Теперь в случае $n = 2^f - 1$, где $f \geq 2$ – натуральное число, построим гомоморфизм алгебр Δ' для кокоммутативной алгебры Хопфа вида (1.1).

Рассмотрим ненулевые последовательности из 0 и 1 длины f . Их ровно $2^f - 1$. отождествим номер α с его записью в двоичной системе счисления и положим

$$\Delta'(E_{\alpha\alpha}) = \sum_{\beta \oplus \gamma = \alpha} E_{\beta\beta} \otimes E_{\gamma\gamma}, \quad (8.1)$$

где α, β, γ – ненулевые двоичные последовательности длины f , а $\oplus$ – сложение по модулю 2. Как и следует из теоремы 5.1, в каждом $\Delta'(E_{\alpha\alpha})$ ровно $n - 1$ ненулевых коэффициентов при слагаемых $E_{\beta\beta} \otimes E_{\gamma\gamma}$. Это следует, например, из того, что для любых α и β индекс γ определяется по ним однозначно. Положим $\sigma = e$, $U = E$, где $e \in S_n$ – тождественная перестановка, а E – единичная матрица из $\text{Mat}(n, k)$. Ввиду утверждений 5.2, 5.6, 5.7, 5.8, видно, что все условия коассоциативности (1.2), (1.6)–(1.8) выполнены. Из (8.1) непосредственно видно, что условия коассоциативности (1.13) также выполняются. При этом в качестве матрицы A_g берем диагональную матрицу с различными корнями n -й степени из единицы λ_α на диагонали. Тогда вследствие утверждений 5.3–5.5 гомоморфизм Δ' можно доопределить на недиагональных матричных единицах единственным образом:

$$\Delta'(E_{\alpha_1\alpha_2}) = \sum_{\beta_1 \oplus \gamma_1 = \alpha_1} E_{\beta_1\beta_2} \otimes E_{\gamma_1\gamma_2}, \quad (8.2)$$

где β_2, γ_2 таковы, что $\lambda_{\alpha_1}/\lambda_{\alpha_2} = \lambda_{\beta_1}/\lambda_{\beta_2} = \lambda_{\gamma_1}/\lambda_{\gamma_2}$. При этом, чтобы коумножение было корректно определено, должно выполняться $\beta_2 \oplus \gamma_2 = \alpha_2$.

9. Алгебры Хопфа для $n = 3$, $n = 4$ и $n = 7$. В заключение проиллюстрируем конструкцию из предыдущего пункта примерами для $f = 2$ и $f = 3$, $n = 3$ и $n = 7$ соответственно. Также в этом пункте будет построена алгебра Хопфа для $n = 4$.

Возьмем в качестве U единичную матрицу из $\text{Mat}(3, k)$, а матрицу A_g как в (5.5), и рассмотрим гомоморфизм (8.2). Можно проверить, что коумножение, соответствующее такому гомоморфизму Δ' и матрице A_g , коассоциативно и задает, тем самым, алгебру Хопфа вида (1.1).

Теперь рассмотрим следующий возможный нечетный случай $n = 7$. Возьмем в качестве U единичную матрицу из $\text{Mat}(7, k)$ и рассмотрим гомоморфизм (8.1). Положим

$$A_g = \varepsilon E_{11} + \varepsilon^2 E_{22} + \varepsilon^6 E_{33} + \varepsilon^3 E_{44} + \varepsilon^4 E_{55} + \varepsilon^7 E_{66} + \varepsilon^5 E_{77},$$

где g – порождающий элемент группы G , а ε – первообразный корень степени 7 из единицы. Далее, гомоморфизм Δ' можно доопределить для недиагональных матричных единиц согласно (8.2). Коумножение, соответствующее такому гомоморфизму Δ' и матрице A_g , является коассоциативным, а значит, определяет алгебру Хопфа вида (1.1).

Теперь рассмотрим случай четного n . Для $n = 2$ уже известен пример комплексной групповой алгебры симметрической группы третьей степени. Рассмотрим

случай $n = 4$. Пусть матрица

$$U = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица из $\text{Mat}(2, k)$. В качестве перестановок $a_i \in S_n$ из следствия 5.1 возьмем $a_1 = (34)$, $a_2 = (14)$, $a_3 = (12)$, $a_4 = (23)$. Возьмем матрицу A_g как в 5.5. В силу утверждения 5.11 перестановкам $a_i \in S_n$ соответствует

$$\begin{aligned} \Delta'(E_{(1+k)(1+k)}) &= E_{(2+k)(2+k)} \otimes E_{(2+k)(2+k)} + E_{(3+k)(3+k)} \otimes E_{(4+k)(4+k)} \\ &\quad + E_{(4+k)(4+k)} \otimes E_{(3+k)(3+k)}, \end{aligned}$$

где $k = 0, 1, 2, 3$. Этот гомоморфизм на диагональных матричных единицах можно дополнить значениями от недиагональных матричных единиц в соответствии с утверждениями 5.3–5.5, а именно

$$\begin{aligned} \Delta'(E_{(1+k_1)(1+k_2)}) &= E_{(2+k_1)(2+k_2)} \otimes E_{(2+k_1)(2+k_2)} + E_{(3+k_1)(3+k_2)} \otimes E_{(4+k_1)(4+k_2)} \\ &\quad + E_{(4+k_1)(4+k_2)} \otimes E_{(3+k_1)(3+k_2)}, \end{aligned}$$

где $k_1, k_2 = 0, 1, 2, 3$. Коумножение, задаваемое таким гомоморфизмом Δ' и матрицей A_g , удовлетворяет всем условиям коассоциативности и вместе с коединицей и антиподом определяет тем самым алгебру Хопфа вида (1.1).

Автор благодарит профессора В. А. Артамонова за постановку задачи, интерес к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Zhu, “Hopf algebras of prime dimension”, *Internat. Math. Res. Notices*, 1994, №1, 53–59.
- [2] A. Masuoka, “The p^n theorem for semisimple Hopf algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:3 (1996), 735–737.
- [3] M. Hilgmann, S.-H. Ng, “Hopf algebras of dimension $2p^2$ ”, *J. London Math. Soc.* (2), **80**:2 (2009), 295–310.
- [4] S.-H. Ng, “Non-semisimple Hopf algebras of dimension p^2 ”, *J. Algebra*, **255**:1 (2002), 182–197.
- [5] A. Masuoka, “Some further classification results on semisimple Hopf algebras”, *Comm. Algebra*, **24**:1 (1996), 307–329.
- [6] P. Etingof, S. Gelaki, “Semisimple Hopf algebras of dimension pq are trivial”, *J. Algebra*, **210**:2 (1998), 664–669.
- [7] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [8] В. А. Артамонов, “О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа”, *Матем. сб.*, **198**:9 (2007), 3–28.
- [9] V. A. Artamonov, I. A. Chubarov, “Properties of some semisimple Hopf algebras”, *Algebras, Representations and Applications*, Contemp. Math., **483**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 23–36.
- [10] S. MacLane, *Homology*, Grundlehren Math. Wiss., **114**, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [11] G. Seitz, “Finite groups having only one irreducible representation of degree greater than one”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**:2 (1968), 459–461.

С. Ю. Спиридонова

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: s.yu.spiridonova@gmail.com

Поступило

12.05.2010