Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Липатов, Классификация коциклов над эргодическими автоморфизмами со значениями в группе Лоренца. Рекуррентность коциклов, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 869–877

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:22:31

Классификация коциклов над эргодическими автоморфизмами со значениями в группе Лоренца. Рекуррентность коциклов

М. Е. Липатов

Доказывается, что любой $SO_0(1, d)$ -значный коцикл над эргодическим, сохраняющим вероятностную меру автоморфизмом когомологичен коциклу, имеющему одну из трех специальных форм, а также исследуется свойство рекуррентности таких коциклов.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm9309

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – стандартное вероятностное пространство и T – эргодический автоморфизм Ω , сохраняющий меру P . Пусть $A: \Omega \rightarrow G$ – некоторый случайный элемент со значениями в топологической группе G , снабженной борелевской сигма-алгеброй $\mathcal{B}(G)$. Рассмотрим следующую случайную последовательность, являющуюся аналогом случайного блуждания со стационарными приращениями:

$$A_n(\omega) := \begin{cases} A(T^{n-1}\omega) \cdots A(\omega), & n \geq 1, \\ \text{Id}, & n = 0, \\ A^{-1}(T^n\omega) \cdots A^{-1}(T^{-1}\omega), & n \leq -1. \end{cases}$$

Такое случайное блуждание на группе G называется *коциклом* (над T), порожденным случайным элементом $A(\omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Случайные элементы $A: \Omega \rightarrow G$ и $B: \Omega \rightarrow G$ (и порождаемые ими коциклы $A_n(\omega)$ и $B_n(\omega)$) называются *когомологичными*, если для некоторого случайного элемента $C: \Omega \rightarrow G$ имеем

$$B(\omega) = C^{-1}(T\omega)A(\omega)C(\omega) \quad \text{п.н.} \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00982-а).

Последнее соотношение равносильно тому, что

$$B_n(\omega) = C^{-1}(T^n \omega) A_n(\omega) C(\omega) \quad \text{п.н.} \quad (2)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$.

В эргодической теории представляют интерес вопросы классификации коциклов, в частности, нахождение канонической формы, к которой можно привести произвольный коцикл, принимающий значения в некоторой группе, с помощью сопряжения, описанного формулами (1), (2).

Согласно результату Циммера [1] любой коцикл со значениями в связной вещественной полупростой группе Ли G с конечным центром когомологичен коциклу со значениями в аменабельной подгруппе. В статье [2] Мур описал все максимальные аменабельные подгруппы в таких группах G , удовлетворяющие так называемому условию изотропной связности, показав, что они представляют собой $2^{\text{rk}_{\mathbb{R}} G}$ классов сопряженных подгрупп, два из которых – класс максимальных компактных подгрупп и класс минимальных параболических подгрупп. Заметим, что справедливы аналоги результатов Циммера и Мура для произвольных связных локально компактных групп G [2], [3].

По мультипликативной теореме Оселедца [4] в случае $G = \text{GL}(d, \mathbb{R})$ всякий коцикл $A_n(\omega)$, порожденный случайной матрицей $A(\omega)$, удовлетворяющей условию $E \log^+ \|A(\omega)^{\pm 1}\| < \infty$, когомологичен блочно-диагональному коциклу, блоки которого отвечают различным показателям Ляпунова коцикла $A_n(\omega)$. В работе [5] для той же группы G доказывается, что произвольный G -значный коцикл когомологичен блочно-треугольному коциклу с блочно-конформными подкоциклами на диагонали. В статьях [6], [7] аналогичные теоремы были получены для $d = 2$ с помощью метода конформных барицентров. В настоящей работе с помощью этого метода мы получаем классификацию коциклов со значениями в собственной ортохронной группе Лоренца $\text{SO}_0(1, d)$.

2. Рекуррентность и консервативность. Одним из когомологических инвариантов коциклов является свойство их рекуррентности, аналогичное возвратности случайных блужданий. Обозначим

$$\mathcal{F}_+ := \{B \in \mathcal{F} : P(B) > 0\}.$$

Пусть G – локально компактная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Коцикл $A_n(\omega)$ называется *рекуррентным*, если для любого $B \in \mathcal{F}_+$ и любой окрестности U нейтрального элемента группы G найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$P(B \cap T^{-n}B \cap \{A_n(\omega) \in U\}) > 0.$$

Рекуррентность матричных коциклов равносильна условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\omega) - \text{Id}\| = 0 \quad \text{п.н.,}$$

что доказывается так же, как аналогичное утверждение для абелевой группы G в [8].

Рассмотрим косое произведение

$$T_A: \Omega \times G \rightarrow \Omega \times G, \quad (\omega, g) \mapsto (T\omega, A(\omega)g),$$

которое является сохраняющим меру преобразованием пространства

$$(\Omega \times G, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(G), \mathbb{P} \times m_G),$$

где m_G – левая мера Хаара на группе G . Заметим, что

$$T_A^n(\omega, g) = (T^n\omega, A_n(\omega)g).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество $W \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(G)$ называется *блуждающим* для T_A , если множества $\{T_A^{-n}W\}_{n=0}^\infty$ попарно не пересекаются. Преобразование T_A называется *консервативным*, если не существует T_A -блуждающего множества $W \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(G)$ положительной меры.

Полезен следующий критерий консервативности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [7]. *Косое произведение T_A консервативно тогда и только тогда, когда коцикл $A_n(\omega)$ рекуррентен.*

Рекуррентность коциклов со значениями в группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ изучалась в работах [7] и [9]. Случай одной из канонических форм $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -значных коциклов рассматривался в [10]. Рекуррентности коциклов со значениями в группе унитарных верхних треугольных матриц посвящена статья [11]. В данной работе изучается рекуррентность коциклов, принимающих значения в группе $\mathrm{SO}_0(1, d)$.

3. Основные результаты. Заметим, что минимальной параболической подгруппой группы $\mathrm{SO}_0(1, d)$ является стабилизатор точки на абсолюте ∂H^d гиперболического пространства H^d ; в дальнейшем через H^d будет обозначаться его гиперболическая модель

$$\{(x_0, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_d^2 = 1, x_0 > 0\}.$$

Обозначим через $I_\Delta(\omega)$ – индикатор множества Δ , а через I_r – единичную матрицу r -го порядка. Сформулируем наши основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Любой $\mathrm{SO}_0(1, d)$ -значный случайный элемент кохомологичен либо случайной матрице*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k(\omega) \end{pmatrix},$$

где $k(\omega)$ – некоторый $\mathrm{SO}(d)$ -значный случайный элемент, либо случайному элементу со значениями в минимальной параболической подгруппе группы $\mathrm{SO}_0(1, d)$, либо случайному элементу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\pi I_\Delta(\omega)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\pi I_\Delta(\omega)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{d-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\psi(\omega)) & \mathrm{sh}(\psi(\omega)) & 0 \\ \mathrm{sh}(\psi(\omega)) & \mathrm{ch}(\psi(\omega)) & 0 \\ 0 & 0 & k(\omega) \end{pmatrix} \quad (3)$$

для некоторой случайной величины ψ , случайного элемента $k: \Omega \rightarrow \mathrm{SO}(d-1)$ и $\Delta \in \mathcal{F}$ такого, что $\exp(i\pi I_\Delta(\omega))$ не кохомологично 1.

Используя изоморфизм $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_0(1, 3)$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любой $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -значный случайный элемент когомологичен либо случайному элементу со значениями в группе $SU(2)$, либо верхней треугольной случайной матрице, либо случайному элементу, равному диагональной случайной матрице на множестве $\overline{\Delta}$ и антидиагональной случайной матрице на множестве Δ , где $\Delta \in \mathcal{F}$ такое, что $\exp(i\pi I_\Delta(\omega))$ не когомологично 1.*

Так как любой G -значный коцикл $A_n(\omega)$ над сохраняющим меру преобразованием рекуррентен на множестве $\Omega \setminus \{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\omega) = \infty\}$ [7], то коциклы, отвечающие первой специальной форме из теоремы 1, рекуррентны. Рассмотрим третий случай.

ТЕОРЕМА 2. *Коцикл, порожденный случайной матрицей, когомологичной случайной матрице (3), для которой $E|\psi(\omega)| < \infty$ и $\Delta \in \mathcal{F}$ такое, что $\exp(i\pi I_\Delta(\omega))$ не когомологично 1, рекуррентен.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}} \mathrm{SO}_0(1, d) = 1$, то в теореме 1 представлены все классы максимальных аменабельных (изотропно связных) подгрупп группы $\mathrm{SO}_0(1, d)$, а именно, в первом и втором случае задействованы соответственно максимальная компактная и минимальная параболическая подгруппа. В третьем случае теоремы порождаемый коцикл принимает значение в аменабельной группе, изоморфной полупрямому произведению $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{R} \times \mathrm{SO}(d-1))$, связная компонента которой содержится в минимальной параболической подгруппе.

4. Группа Мёбиуса и конформный барицентр. Обозначим через B^d единичный шар $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Группой Мёбиуса $\mathrm{Möb}(B^d)$ называется группа преобразований пространства $\mathbb{R}^d$, оставляющих инвариантным B^d и полученных с помощью композиций четного числа инверсий относительно $\partial B^d = S^{d-1}$ ($x \mapsto x^* = x/|x|^2$) и сохраняющих ориентацию подобий*

$$x \mapsto akx + b, \quad k \in \mathrm{SO}(d), \quad a \in \mathbb{R}_+, \quad b \in \mathbb{R}^d.$$

Известно [12], что любое преобразование Мёбиуса из $\mathrm{Möb}(B^d)$, переводящее точку $p \in B^d$ в 0, можно представить в виде kM_p , где $k \in \mathrm{SO}(d)$,

$$M_p x = -p + (1 - |p|^2)(x^* - p)^*, \quad x \in B^d.$$

Пусть $P(S^{d-1})$ – множество всех вероятностных мер на S^{d-1} ,

$$\tilde{P}(S^{d-1}) := \left\{ \mu \in P(S^{d-1}) : \mu(\{u\}) < \frac{1}{2} \quad \forall u \in S^{d-1} \right\}.$$

Положим

$$\xi_\mu(x) := \mathrm{grad} \int_{S^{d-1}} \ln \frac{\sqrt{1 - |x|^2}}{|x - u|} d\mu(u)$$

для $\mu \in P(S^{d-1})$ и $x \in B^d$, где градиент берется относительно метрики Лобачевского, определенной формулой

$$ds^2 = \frac{|dx|^2}{(1 - |x|^2)^2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [13]. Для любой меры $\mu \in \tilde{P}(S^{d-1})$ существует единственный нуль в B^d функции $\xi_\mu(x)$, который называется конформным барицентром $b(\mu)$ меры μ .

При $d > 2$ доказательство предложения 2 проводится так же, как в случае $d = 2$, рассмотренном в [7]. Группа $\text{Möb}(B^d)$ действует на множестве $P(S^{d-1})$ по формуле

$$g\mu(\cdot) = \mu(g^{-1}\cdot), \quad \text{где } g \in \text{Möb}(B^d), \quad \mu \in P(S^{d-1}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [13]. Для всех $g \in \text{Möb}(B^d)$ и $\mu \in \tilde{P}(S^{d-1})$ имеем

$$b(g\mu) = gb(\mu).$$

5. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим гомеоморфизм

$$\sigma: B^d \rightarrow H^d, \quad x \mapsto \left(\frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}, \frac{2x}{1 - |x|^2} \right).$$

Известно [12], что отображение

$$kM_p \mapsto \sigma kM_p \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \widetilde{M}_p,$$

где

$$\widetilde{M}_p := \begin{pmatrix} \frac{1 + |p|^2}{1 - |p|^2} & \frac{-2p^T}{1 - |p|^2} \\ \frac{-2p}{1 - |p|^2} & I_d + \frac{2pp^T}{1 - |p|^2} \end{pmatrix}$$

осуществляет изоморфизм из $\text{Möb}(B^d)$ на $\text{SO}_0(1, d) = \sigma \text{Möb}(B^d) \sigma^{-1}$ (элементы данных групп здесь рассматриваются как преобразования B^d и H^d соответственно).

Пусть $A(\omega)$ – произвольный $\text{SO}_0(1, d)$ -значный случайный элемент. Для любой $\text{SO}_0(1, d)$ -значной измеримой функции $B(\omega)$ будем обозначать

$$\overline{B}(\cdot) := \sigma^{-1} B(\cdot) \sigma: \Omega \rightarrow \text{Möb}(B^d).$$

Рассмотрим следующее косое произведение:

$$\overline{T}: \Omega \times S^{d-1} \rightarrow \Omega \times S^{d-1}, \quad (\omega, x) \mapsto (T\omega, \overline{A}(\omega)x).$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех $\overline{T}$ -инвариантных мер на $\Omega \times S^{d-1}$ с маргинальной мерой P на Ω . Из компактности сферы S^{d-1} следует, что $\mathfrak{M}$ не пусто. Кроме того, каждую меру $\bar{\mu} \in \mathfrak{M}$ можно представить в виде $P(d\omega) \mu_\omega(dx)$, где $\{\mu_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – измеримое семейство мер из $P(S^{d-1})$ [14]. Заметим, что инвариантность меры $\bar{\mu}$ равносильна условию $\mu_{T\omega} = \overline{A}_\omega \mu_\omega$ P -п.н. Для всякой эргодической меры $\bar{\mu} \in \mathfrak{M}$ (крайней точки выпуклого множества $\mathfrak{M}$) с вероятностью 1 соответствующая случайная мера μ_ω либо непрерывна, либо имеет вид

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{x_j(\omega)}$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$ и некоторых всюду не совпадающих случайных точек $x_j(\omega)$ на сфере S^{d-1} . Зафиксируем некоторую эргодическую меру $\bar{\mu} \in \mathfrak{M}$.

Пусть $N \geq 3$ либо мера μ_ω непрерывна. Тогда по предложению 2 почти наверное существует барицентр $b(\mu_\omega)$, доопределим который на множестве меры 0, например, точкой $0 \in \mathbb{R}^d$. Из инвариантности $\bar{\mu}$ и предложения 3 следует, что почти наверное имеет место равенство

$$b(\mu_{T\omega}) = \bar{A}(\omega)b(\mu_\omega).$$

Возьмем $\bar{C}(\omega) = M_{-b(\mu_\omega)}$. Тогда, так как $\bar{C}(\omega)0 = b(\mu_\omega)$, получаем

$$\bar{C}^{-1}(T\omega)\bar{A}(\omega)\bar{C}(\omega)0 = 0 \quad \text{п.н.}, \quad \bar{C}^{-1}(T\omega)\bar{A}(\omega)\bar{C}(\omega) = k(\omega) \quad \text{п.н.}$$

для некоторого случайного элемента $k: \Omega \rightarrow \text{SO}(d)$. Положим $C(\omega) = \widetilde{M}_{-b(\mu_\omega)}$. Тогда

$$C^{-1}(T\omega)A(\omega)C(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k(\omega) \end{pmatrix} \quad \text{п.н.}$$

Рассмотрим случай $N = 1$. Обозначим через e_i i -й стандартный базисный вектор в $\mathbb{R}^d$ и через $\tilde{k}(v_1, v_2)$ – такое вращение из $\text{SO}(d)$, которое переводит вектор v_1 в вектор v_2 и является тождественным преобразованием на ортогональном дополнении $\text{span}\{v_1, v_2\}^\perp$ относительно стандартного евклидова скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $\mathbb{R}^d$. Для $\bar{C}(\omega) = \tilde{k}(e_1, x_1(\omega))$ вследствие инвариантности меры $\bar{\mu}$ имеем

$$\bar{C}^{-1}(T\omega)\bar{A}(\omega)\bar{C}(\omega)e_1 = e_1 \quad \text{п.н.}$$

Значит, для

$$C(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{k}(e_1, x_1(\omega)) \end{pmatrix}$$

получаем

$$C^{-1}(T\omega)A(\omega)C(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k(\tilde{a}(\omega), e_1) \end{pmatrix} \cdot \widetilde{M}_{a(\omega)} \quad \text{п.н.}$$

для некоторого случайного вектора $a: \Omega \rightarrow B^d$ и некоторого вращения $k(\tilde{a}(\omega), e_1)$ из $\text{SO}(d)$, переводящего вектор $\tilde{a}(\omega) = M_{a(\omega)}e_1$ в вектор e_1 . Случайный элемент в правой части принимает значения в стабилизаторе точки $(+\infty, +\infty, 0, \dots, 0) \in \partial H^d$.

Аналогично, если $N = 2$, то выбирая $\bar{C}(\omega)$ так, чтобы

$$\bar{C}(\omega)e_1 = x_1(\omega) \quad \text{и} \quad \bar{C}(\omega)(-e_1) = x_2(\omega),$$

получаем, например, для

$$C(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{ch}(\varphi(\omega)) & 0 & \text{sh}(\varphi(\omega)) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sh}(\varphi(\omega)) & 0 & \text{ch}(\varphi(\omega)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{d-2} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} K(\omega) = & \tilde{k}(\tilde{k}(M_{p(\omega)}e_1, x_1(\omega))M_{p(\omega)}(e_1) \\ & - \langle \tilde{k}(M_{p(\omega)}e_1, x_1(\omega))M_{p(\omega)}(e_1), x_1(\omega) \rangle x_1(\omega), x_2(\omega) \\ & - \langle x_2(\omega), x_1(\omega) \rangle x_1(\omega)) \\ & \times \tilde{k}(M_{p(\omega)}e_1, x_1(\omega)), \end{aligned}$$

$$p(\omega) = \sqrt{3 - \sqrt{8 - \langle x_1(\omega), x_2(\omega) \rangle}} e_2, \quad \text{ch}(\varphi(\omega)) = \frac{4 - \sqrt{8 - \langle x_1(\omega), x_2(\omega) \rangle}}{\sqrt{8 - \langle x_1(\omega), x_2(\omega) \rangle} - 2},$$

что случайная матрица $C^{-1}(T\omega)A(\omega)C(\omega)$ оставляет инвариантным множество

$$\{(+\infty, \pm\infty, 0, \dots, 0)\} \subset \partial H^d$$

и, следовательно, для некоторого $\Delta \in \mathcal{F}$ равна

$$\begin{pmatrix} \text{ch}(\psi(\omega)) & \text{sh}(\psi(\omega)) & 0 \\ \text{sh}(\psi(\omega)) & \text{ch}(\psi(\omega)) & 0 \\ 0 & 0 & k_1(\omega) \end{pmatrix}$$

при почти всех $\omega \in \overline{\Delta}$ и

$$\begin{pmatrix} \text{ch}(\psi(\omega)) & \text{sh}(\psi(\omega)) & 0 \\ -\text{sh}(\psi(\omega)) & -\text{ch}(\psi(\omega)) & 0 \\ 0 & 0 & k_2(\omega) \end{pmatrix}$$

при почти всех $\omega \in \Delta$ для некоторых измеримых функций

$$\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad k_1: \Omega \rightarrow \text{SO}(d-1), \quad k_2: \Omega \rightarrow \{M \in O(d-1) : \det M = -1\}.$$

Эргодичность меры $\bar{\mu}$ эквивалентна тому, что $\exp(i\pi I_\Delta(\omega))$ не когомологично единице. Теорема 1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать рекуррентность коцикла, порожденного случайной матрицей (3). Обозначим

$$N(\omega) := \begin{pmatrix} \exp(i\pi I_\Delta(\omega)) & 0 \\ 0 & I_{d-2} \end{pmatrix} \cdot k(\omega)$$

и рассмотрим сохраняющий меру автоморфизм

$$\tilde{T}: (\omega, l, \varphi, M) \mapsto (T\omega, l + I_\Delta(\omega) \pmod{2}, \varphi + \exp(i\pi l)\psi(\omega), N(\omega)M)$$

стандартного пространства с мерой

$$(\Omega \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R} \times O(d-1), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{Z}_2) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(O(d-1)), \mathbf{P} \times \mu \times \lambda \times \nu),$$

где $\mu = (1/2, 1/2)$ – мера Хаара на группе $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, λ – мера Лебега на $\mathbb{R}$ и ν – мера Хаара на группе $O(d-1)$. Так как $\exp(i\pi I_\Delta(\omega))$ не когомологично 1, то автоморфизм

$$T_1: (\omega, l) \mapsto (T\omega, l + I_\Delta(\omega) \pmod{2})$$

пространства $(\Omega \times \mathbb{Z}_2, \mathbf{P} \times \mu)$ эргодичен. По теореме Аткинсона [15] аддитивный коцикл над автоморфизмом T_1 , порожденный функцией

$$f: \Omega \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, l) \mapsto \exp(i\pi l)\psi(\omega),$$

рекуррентен, поскольку $\iint f(\omega, l) d\mathbb{P}d\mu = 0$. Следовательно, по предложению 1 автоморфизм

$$T_2: (\omega, l, \varphi) \mapsto (T\omega, l + I_\Delta(\omega) \pmod{2}, \varphi + \exp(i\pi l)\psi(\omega))$$

пространства

$$(\Omega \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}, \mathbb{P} \times \mu \times \lambda)$$

консервативен, тогда автоморфизм $\tilde{T}$ как компактное расширение автоморфизма T_2 также консервативен [7]. Рассмотрим случайный элемент

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R} \times O(d-1), \quad \omega \mapsto (I_\Delta(\omega), \psi(\omega), N(\omega))$$

и порожденный им коцикл $g_n(\omega)$ над автоморфизмом T со значениями в группе $(\mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{R}) \times O(d-1)$ с операцией

$$(m, \psi, N)(l, \varphi, M) = (m + l, \varphi + \exp(i\pi l)\psi, NM).$$

По предложению 1 коцикл $g_n(\omega)$ рекуррентен, что равносильно рекуррентности матричного коцикла рассматриваемого вида. Теорема 2 доказана.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В. И. Оселедца за внимание к работе. Также автор признателен рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. J. Zimmer, “Induced and amenable ergodic actions of Lie groups”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **11**:3 (1978), 407–428.
- [2] C. C. Moore, “Amenable subgroups of semi-simple groups and proximal flows”, *Israel J. Math.*, **34**:1-2 (1979), 121–138.
- [3] R. J. Zimmer, *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Monogr. Math., **81**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.
- [4] В. И. Оселедец, “Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем”, Тр. ММО, **19**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1968, 179–210.
- [5] L. Arnold, D. C. Nguyen, V. Oseledets, “Jordan normal form for linear cocycles”, *Random Oper. Stochastic Equations*, **7**:4 (1999), 303–358.
- [6] V. I. Oseledets, *Classification of $GL(2, R)$ -Valued Cocycles of Dynamical Systems*, Report 360, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, Bremen, 1995.
- [7] Ph. Thieullen, “Ergodic reduction of random products of two-by-two matrices”, *J. Anal. Math.*, **73**:1 (1997), 19–64.
- [8] K. Schmidt, “Cocycles of Ergodic Transformation Groups”, Macmillan Lectures in Math., **1**, Macmillan Company of India, Delhi, 1977.
- [9] G. Ochs, V. I. Oseledets, *On Recurrent Cocycles and the Non-Existence of Random Fixed Points*, Report 382, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, Bremen, 1996.
- [10] М. Е. Липатов, “Рекуррентность матричных коциклов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, № 5, 61–64.
- [11] G. Greschonig, “Recurrence in unipotent groups and ergodic nonabelian group extensions”, *Israel J. Math.*, **147**:1 (2005), 245–267.

- [12] L. V. Ahlfors, *Möbius Transformations in Several Dimensions*, Ordway Professorship Lectures Math., Univ. of Minnesota, Minneapolis, MN, 1981.
- [13] A. Douady, C. J. Earle, “Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle”, *Acta Math.*, **157**:1 (1986), 23–48.
- [14] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [15] G. Atkinson, “Recurrence of co-cycles and random walks”, *J. London Math. Soc.* (2), **13**:3 (1976), 486–488.

М. Е. Липатов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: maxim.lipatov@gmail.com

Поступило

25.11.2011

Исправленный вариант

28.07.2012