Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Скалыга, Аналогии неравенств В. Маркова, А. Шеффера и Р. Даффина на выпуклых телах, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 146–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm931>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:58:39

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВ В. МАРКОВА, А. ШЕФФЕРА И Р. ДАФФИНА НА ВЫПУКЛЫХ ТЕЛАХ

В. И. Скалыга

Пусть X – банахово пространство над $\mathbb{R}$. Через $\mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ обозначим пространство всех полиномов степени не выше n , отображающих X в $\mathbb{R}$, т. е. множество всех отображений вида

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n u_j(x, \dots, x) \quad (x \in X),$$

где $u_j: X^j \rightarrow \mathbb{R}$ – j -линейное непрерывное отображение. В дальнейшем $\|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})}$ – норма функционала k -й производной по Фреше полинома P_n в точке x в пространстве $\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})$ всех ограниченных k -линейных функционалов из X^k в $\mathbb{R}$. Значение k -линейного отображения

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00768.

$\nabla^k P_n(x)$ на векторах $(h_1, \dots, h_k)$ будем обозначать как $\nabla^k P_n(x)[h_1, \dots, h_k]$. Если $h_1 = \dots = h_s = h$, то $\nabla^k P_n(x)[h_1, \dots, h_k] = \nabla^k P_n(x)[h^s, h_{s+1}, \dots, h_k]$. Ниже множество V – всегда выпуклое ограниченное замкнутое тело в банаховом пространстве X . Множество всех таких тел обозначим через W . Тело K всегда принадлежит W и симметрично относительно θ -нуля пространства X ; B – шар единичного радиуса с центром в нуле. Положим

$$\|P_n\|_V = \sup_{x \in V} |P_n(x)|, \quad \|\nabla^k P_n\|_V = \sup_{x \in V} \|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})};$$

∂V – граница тела V , $\mathring{V} = V \setminus \partial V$, $B_n(V) = \{P_n : P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R}), \|P_n\|_V \leq 1\}$. Будем использовать следующие характеристики тела V : пусть $x_0 \in \mathring{V}$; тогда $\rho(x, x_0)$ – значение функционала Минковского на векторе $x - x_0$ относительно тела $V - x_0$;

$$r_h(x_0) = \max\{t : [x_0 - th, x_0 + th] \subset V, \|h\| = 1\}, \\ r(x_0) = \sup\{r : B(x_0, r) \subset V\}, \quad r(V) = \sup_{x_0 \in V} r(x_0).$$

Если $V = K$, то положим $\rho(x, \theta) = \rho(x)$, $r_h(\theta) = r_h$. В работах [1] и [2] независимо и одновременно получено равенство

$$\sup_{\substack{V \in W \\ P_n \in B_n(V)}} \|\nabla P_n\|_V \omega_V = 2n \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4n} \right), \quad X \neq \mathbb{R},$$

где ω_V – ширина тела V .

В работе [3] для класса $K = B \subset X$ доказана оценка

$$|\nabla P_n(x)[h]| \leq n \min \left\{ \left(\frac{1 - P_n^2(x)}{1 - \|x\|^2} \right)^{1/2}, n \right\}, \quad x \in K, \quad \|P_n\|_K \leq 1.$$

Л. А. Харрис [4] получил оценку для шара $B \subset X$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $k = 1, \dots, n$,

$$\|P_n^{(k)}(x)[h^k]\| \leq 2^{2k-1} T_n^{(k)}(1) \|P_n\|_B, \quad x \in B, \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

В настоящей работе рассматриваются, в основном, оценки для старших производных полиномов на телах K и V .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $G_{n-1} \in \mathfrak{P}_{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $H_n(1) > 0$, $G_{n-1}(1) > 0$; нули H_n и G_{n-1} соответственно $\{x_i\}_1^n$ и $\{y_i\}_1^{n-1}$ лежат на $(-1, 1)$ и взаимно разделены, т. е. $x_n < y_{n-1} < \dots < y_1 < x_1$; $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$. Если для полинома $P_{n-k} \in \mathfrak{P}_{n-k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(x)| \leq |H_n^{(k)}(x) + i((1-x^2)^{1/2} G_{n-1}(x))^{(k)}|, \quad x \in (\beta_{n-k+1}^{(k)}, \beta_1^{(k)}), \quad i^2 = -1,$$

то справедливы следующие неравенства

$$|P_{n-k}^{(s)}(x)| \leq |H_n^{(k+s)}(x) + i((1-x^2)^{1/2} G_{n-1}(x))^{(k+s)}|, \quad x \in [-1, 1], \\ |P_{n-k}^{(s)}(x)| \leq |H_n^{(k+s)}|, \quad x \notin (\beta_{n-k-s+1}^{(k+s)}, \beta_1^{(k+s)}), \quad s = 0, \dots, n-k,$$

где $\beta_{n-k-s+1}^{(k+s)}$ – минимальный нуль, $\beta_1^{(k+s)}$ – максимальный нуль функции $((1-x^2)^{1/2} \times G_{n-1}(x))^{(k+s)}$ на $[-1, 1]$.

Теорема 1 доказана в [5] при $k = 0$, $s = 1$ и в [6] при $k = 0$. При $k = 0$ и $H_n(x) = T_n(x)$, $G_{n-1}(x) = T'_n(x)/n$ теорема 1 получена в [7]. Теорема 1 является элементом доказательства последующих неравенств.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x, x_0 \in \overset{\circ}{V} \subset X$, $P_n \in B_n(V)$, $\|h\| = 1$. Тогда

$$|\nabla P_n(x)[h]| \leq n r_h^{-1}(x_0)(1 - \rho^2)^{-1/2} \min\{(1 + \rho)(1 - P_n^2(x))^{1/2}, \sqrt{2}\}, \quad (1)$$

где $\rho = \rho(x, x_0)$.

Неравенство (1) является объединением двух неравенств. Первое получено в [8], для доказательства второго используется оценка первой производной в точке тригонометрического полинома, нормированного на отрезке меньше, чем период [9].

ЛЕММА 1 (основная). Пусть $S_n(x) = \sin(n \arccos x) = n^{-1}(1 - x^2)^{1/2} T'_n(x)$ и

$$M_{n,k}(x) = |T_n^{(k)}(x) + i S_n^{(k)}(x)|, \quad x \in (-1, 1), \quad i^2 = -1.$$

Тогда выполнены соотношения

$$M_{n,k}^2(x) = y^{-2k} \sum_0^{k-1} \alpha_i^{(k)}(n) y^{-2i}, \quad y = (1 - x^2)^{1/2}, \quad \alpha_i^{(k)}(n) > 0, \quad i = 0, \dots, k-1;$$

$$M_{n,2p+1}(0) = n \prod (n^2 - (2i-1)^2), \quad i = 1, \dots, p, \quad p = 0, 1, \dots,$$

$$M_{n,2p}(0) = \prod (n^2 - (2i)^2), \quad i = 0, \dots, p-1, \quad p = 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_i^{(k+1)} = \alpha_i^{(k+1)}(n) = (n^2 - k^2) \left\{ \frac{k+i}{k-i} \right\} \alpha_i^{(k)}, \quad i = 0, \dots, k-1,$$

$$\alpha_k^{(k+1)} = M_{n,k+1}^2(0) - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(k+1)}.$$

Лемма 1 лежит в основе доказательства всех неравенств типа Шеффера и Даффина, предложенных в данной работе. Пусть $\xi_1^{(k)}$ – максимальный нуль функции $S_n^{(k)}(x)$ на $[-1, 1]$. Введем обозначение

$$N_{n,k}(x) = \begin{cases} M_{n,k}(x), & |x| \leq \xi_1^{(k)}, \\ |T_n^{(k)}(x)|, & |x| \geq \xi_1^{(k)}. \end{cases}$$

Из леммы 1 и теоремы 1 вытекает

ЛЕММА 2. Пусть для полинома $P_{n-k} \in \mathfrak{P}_{n-k}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ выполнено неравенство

$$|P_{n-k}(x)(1 - x^2)^{k/2}| \leq 1 \quad \text{при} \quad |x| \leq \xi_1^{(k)}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|P_{n-k}(x)| < \frac{N_{n,k}(x)}{M_{n,k}(0)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

При $k = 1$ это результат Г. Поля и Г. Серё [10]. При помощи леммы 2 осуществляется переход от бернштейновских оценок к оценкам типа Шеффера и Даффина для выпуклых тел.

Пусть $B_{n,k}(t) = k^{k/2} n(n-1) \cdots (n-k+1)(1-t^2)^{-k/2}$, $t \in [-1, 1]$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $1 \leq k+s \leq n$, $\|h_i\| = 1$, $i = 1, \dots, k$, $x = x/\|x\|$. Имеет место неравенство

$$|\nabla^{k+s} P_n(x)[h_1, \dots, h_k, \bar{x}^s]| \leq \frac{B_{n,k}(0) N_{n,k+s}(\rho(x))}{M_{n,k}(0) r_{h_1} \cdots r_{h_k} r_{\bar{x}}^s}.$$

При доказательстве теоремы 3 используется неравенство Бернштейна для тригонометрического полинома, теорема 1 и лемма 2.

Из теоремы 3 при $k = 1$ получаем оценку

$$\sup_{\substack{P_n \in B_n(K) \\ h \in \partial B}} |\nabla^{1+s} P_n(x)[h, \bar{x}^s]| r_h \leq \frac{N_{n,1+s}(\rho(x))}{r_x^s}. \quad (2)$$

В (2) равенство достигается для x , при которых $S_n^{(1+s)}(\rho(x)) = 0$ или $\rho(x) \geq \xi_1^{(1+s)}$. Из (2) следует неравенство

$$\sup_{\substack{P_n \in B_n(K) \\ h_i \in \partial B}} |\nabla^k P_n(\theta)[h_1, h_2^{k-1}]| r_{h_1} r_{h_2}^{k-1} \leq N_{n,k}(0). \quad (3)$$

Если $n - k$ четное, то в (3) будет равенство.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $x_0 \in \mathring{V} \subset X$, $P_n \in B_n(V)$, $\|h_i\| = 1$, $i = 1, \dots, k$, $\bar{x} = (x - x_0)/\|x - x_0\|$. Тогда имеет место неравенство

$$|\nabla^{k+s} P_n(x)[h_1, \dots, h_k, \bar{x}^s]| \leq \frac{B_{n,k}(0) \tilde{N}_{n,k+s}(\rho) \rho^s}{M_{n,k}(0) r_1 \dots r_k \|x - x_0\|^s},$$

где $\rho = \rho(x, x_0)$, $r_i = r_{h_i}(x_0)$, $i = 1, \dots, k$, $\tilde{N}_{n,k}(\rho) = 2^k N_{n,k}(2\rho - 1)$.

Теорема 4 доказывается при помощи теорем 1, 2 и леммы 2.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $K \subset X$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h\| = 1$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| \leq \frac{n(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \{\operatorname{ctg}(\alpha(-\delta\varepsilon)/(2n)) / 2 + \rho/(1 - \rho^2)^{1/2}\}}{(1 - \rho^2)r_h^2}, \quad (4)$$

где $x \in \mathring{K}$, $\varepsilon = P_n(x)$, $\alpha(\varepsilon) = \arccos \varepsilon$, $\delta = \operatorname{sgn} \nabla^2 P_n(x)[h, h]$, $\rho = \rho(x)$;

$$|\nabla^2 P_n(x)[h, h]| < c_1 N_{n,2}(\rho(x)) r_h^{-2} \leq \frac{c_1 T_n^{(2)}(1)}{r_h^2}, \quad c_1 = 1.0858, \quad x \in K. \quad (5)$$

Доказательство неравенства (4) основано на экстремальных свойствах полинома Золотарева. Даже в одномерном случае оно дополняет неравенство Шеффера и Даффина для второй производной. Неравенство (5) выводится из неравенства (4), теоремы 1 и леммы 1.

ЛЕММА 3. Пусть $k, s \in \mathbb{Z}_+$, $k + s \leq n$. Справедливы следующие неравенства:

$$M_{n,k}(x) M_{n-k,s}(x) < M_{n,k+s}(x), \quad x \in (-1, 1), \quad \text{если } s = 1 \text{ или } k + s \leq 6; \quad (6)$$

$$M_{n,k}(0) M_{n-k,s}(0) < M_{n,k+s}(0). \quad (7)$$

Неравенства (6), (7) вытекают из леммы 1. По-видимому, неравенство (6) имеет место для $k + s \leq n$. Введем обозначение $Q^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, m\}$. Из леммы 3 вытекает

ТЕОРЕМА 6. Пусть $X = l_1^{(m)}$, $\|x\|_X = \sum_{i=1}^m |x_i|$, $P_n \in B_n(Q^m)$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} &= \max \left| \frac{\partial^k P_n(x)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_s}^{k_s}} \right| \left(s, k_i \in \mathbb{Z}_+, \sum_{i=1}^s k_i = k, 1 \leq j_i \leq m \right) \\ &\leq N_{n,k}(\rho(x)), \quad k \leq 6, \quad x \in X; \\ \|\nabla^k P_n(\theta)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} &\leq N_{n,k}(0), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $K = \{x \in \mathbb{E}^m : \sum_1^m x_i^2/a_i^2 \leq 1\}$, $P_n \in B_n(K)$, $\|h\| = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$|\nabla^k P_n(x)[h^k]| \leq \frac{N_{n,k}(\rho(x))}{r_h^k}. \quad (8)$$

Равенство в (8) достигается только при $h = x/\|x\|$, $P_n(th) = T_n(t/r_h)$ ($t \in \mathbb{R}$) в $n-k+1$ нулях функции $S_n^{(k)}(t/r_h)$ и при $|t| \geq \xi_1^{(k)} r_h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на геометрических свойствах эллипсоида, неравенстве Шеффера и Даффина [7] и лемме 1.

Из теоремы 7 и равенства Банаха [4] для нормы симметричного k -линейного функционала на X^k , где X – гильбертово пространство над $\mathbb{R}$, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $K = \{x : \sum_1^m x_i^2/a_i^2 \leq 1\}$ в $\mathbb{E}^m$ или K – шар в гильбертовом пространстве. Пусть $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_k \leq 1$. Тогда

$$\|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})} \leq \frac{N_{n,k}(\rho(x))}{r^k(K)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X = \mathbb{R}^m$ с некоторой нормой, $K = \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_1^m x_i^2 \leq 1\}$, $\|h_i\| = 1$, $i = 1, \dots, k$. Пусть $P_n \in B_n(K)$. Тогда имеет место неравенство

$$|\nabla^k P_n(x)[h_1 \dots h_k]| \leq \frac{N_{n,k}(\rho(x))}{r_{h_1} \dots r_{h_k}}.$$

При помощи теоремы 1, аналогично теореме 7, доказывается

ТЕОРЕМА 8. Пусть $K = \{x : \sum_1^m x_i^2/a_i^2 \leq 1\}$ в $\mathbb{E}^m$ или K – шар в гильбертовом пространстве. Пусть $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|h\| = 1$, $k \geq 0$ и для каждой точки $x \in K$ и для каждого отрезка $[C, D]$, такого, что $C, D \in \partial K$, $x \in [C, D]$, выполнено неравенство

$$|\nabla^k P_n(x)[(C-D)^k]| \leq 2^k M_{n,k}(t),$$

где $t = 2\|x - z\|/\|C - D\|$, z – середина отрезка $[C, D]$.

Тогда для $s \geq 0$ справедливы неравенства

$$|\nabla^{k+s} P_n(x)[h^{k+s}]| \leq \frac{N_{n,k+s}(\rho(x))}{r_h^{k+s}},$$

$$\|\nabla^{k+s} P_n(x)\|_{\mathcal{L}^{k+s}(X, \mathbb{R})} \leq \frac{N_{n,k+s}(\rho(x))}{r^{k+s}(K)}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скалыга В. И. // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 374–384.
2. Субботин Ю. Н., Васильев Ю. С. // Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 6. С. 734–735.
3. Sarantopoulos Y. // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1991. V. 110. P. 307–312.
4. The Scottish Book “Mathematics from the Scottish Cafe”. ed. R. D. Mauldin. Birkhauser, 1981.
5. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд. АН СССР, 1952.
6. Виденский В. С. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 5. С. 401–420.
7. Schaeffer A. C., Duffin R. J. // Bull. Amer. Math. Soc. 1938. V. 44. № 4. P. 289–297.
8. Скалыга В. И. // Изв. РАН. Сер. матем. 1988. Т. 62. № 2. С. 169–192.
9. Виденский В. С. // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 1. С. 13–16.
10. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978.