Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Э. Гришанина, Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников, Об асимптотической устойчивости в целом и седле в бесконечности, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 624–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9311>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:03:28

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об асимптотической устойчивости в целом и седле в бесконечности

Г. Э. Гришанина, Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников

Методы нелинейного анализа широко используются в теории управления, оптимизации и других областях, причем эти методы позволили получить существенные результаты [1]–[4] в ряде задач теории колебаний, теории устойчивости, в задачах о колебательных процессах в системах автоматического регулирования.

Внимание теории устойчивости движения обращено на исследование действия возмущающих факторов на движение системы, при этом возмущающие силы не учтены в уравнениях движения, так как они малы по сравнению с основными силами. Эти возмущающие силы в общем случае неизвестны. Если они действуют непрерывно, то сформулированные уравнения движения отличаются от истинных, и нужно учесть поправочные члены. Результат действия возмущений, как известно [5], не будет одинаковым для всех движений. Движения, на которые влияние возмущений незначительно и для которых возмущенное движение мало отличается от невозмущенного, называются *устойчивыми*. Если же возмущенное движение сильно отличается от невозмущенного даже при очень малых возмущающих силах, то такие движения называются *неустойчивыми*. Исследование устойчивости нелинейных систем, как известно [6], может иметь широкое практическое применение и является актуальным вплоть до настоящего времени [7].

В данной работе найдены признаки асимптотической устойчивости и устойчивости в целом нелинейных систем.

Рассмотрим систему

$$x' = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное векторное поле. Будем предполагать, что каждое решение $x(t)$ уравнения (1) однозначно определено начальным условием $x(0) = y$ и может быть продолжено на всей оси $(-\infty, +\infty)$. Через $\varphi(t, y)$ обозначим решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y$, т.е. $\varphi(0, y) = y$. Пусть x_0 – стационарное решение уравнения (1):

$$F(x_0) = 0.$$

Стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ называется *устойчивым (по Ляпунову)* [8], если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|\varphi(t, y) - x_0\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y: \|y - x_0\| < \delta, \quad (2)$$

($\|\cdot\|$ – норма в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и для некоторого $\delta_0 > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, y) - x_0\| = 0 \quad \forall y: \|y - x_0\| < \delta. \quad (3)$$

Стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ называется *асимптотически устойчивым в целом*, если оно устойчиво и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, y) - x_0\| = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Свойство асимптотической устойчивости в целом тесно связано с поведением решения системы (1) в окрестности бесконечно удаленной точки. В связи с этим приведем еще одно понятие, характеризующее поведение решения уравнения (1) на бесконечности. Будем говорить, что система (1) имеет *седло в бесконечности* [8], если существует последовательность решений $x_k(t)$ системы (1), удовлетворяющая условиям

$$\sup_k (\|x_k(0)\| + \|x_k(T_k)\|) < \infty, \quad (5)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T_k} (\|x_k(t)\|) = \infty. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть стационарное решение $x(t) = x_0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом. Тогда система (1) не имеет седла в бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противоположное. Тогда существует последовательность решений $x_k(t)$, удовлетворяющая условиям (5) и (6). В силу ограниченности последовательности $x_k(0)$ без ограничения общности можно считать, что $x_k(0) \rightarrow y_0$ при $k \rightarrow \infty$. (В силу теоремы Вейерштрасса ограниченная последовательность в конечномерном пространстве имеет сходящуюся подпоследовательность.) В силу устойчивости в целом стационарного решения $x(t) = x_0$ системы (1) решение $\varphi(t, y_0)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, y_0) - x_0\| = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$M = \sup_{t \geq 0} \|\varphi(t, y_0)\| < \infty. \quad (8)$$

В силу (6) существуют такие числа t_k , что

$$\begin{aligned} \|x_k(t_k)\| &= M + 1 + \|x_0\|, \\ \|x_k(t)\| &< M + 1 + \|x_0\|, \quad 0 \leq t < t_k \end{aligned}$$

при достаточно больших k .

Пусть $\delta > 0$ выбрано из условия устойчивости стационарного решения $x(t) \equiv x_0$ таким образом, что

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &< 1, \quad t \geq 0, \\ \|x(0) - x_0\| &< \delta. \end{aligned}$$

Тогда решение $x_k(t)$ при больших k и $0 \leq t < t_k$ не попадает в шар

$$B(x_0, \delta) = \{x : \|x - x_0\| < \delta\}.$$

Действительно, если $x_k(\tau) \in B(x_0, \delta)$ при некотором $\tau \in [0, t_k)$, то по выбору δ имеем $\|x_k(t) - x_0\| < 1$ при $t \geq \tau$,

$$\|x_k(t)\| = \|x_k(t) - x_0 + x_0\| \leq 1 + \|x_0\| < M + 1 + \|x_0\| \quad \text{при всех } t \geq \tau.$$

Покажем, что числовая последовательность t_k ограничена. Допустим, что t_k неограничена. Без ограничения общности можно считать, что $t_k \rightarrow \infty$. Пусть $T > 0$ – фиксированное число. Тогда $[0, T] \subset [0, t_k]$ при $k > k_0(T)$, и поэтому

$$\|x_k(t) - x_0\| \geq \delta \quad \text{при } k > k_0(T), \quad 0 \leq t \leq T.$$

В силу произвольности $T > 0$ это противоречит асимптотической устойчивости в целом решения $x(t) \equiv x_0$. Полученное противоречие доказывает ограниченность t_k .

Тогда без ограничения общности можно считать, что $t_k \rightarrow t_0$ при $k \rightarrow \infty$, поэтому

$$x_k(t_k) \rightarrow \varphi(t_0, y_0), \quad k \rightarrow \infty.$$

Это противоречит выбору t_k . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом. Тогда система (1) не имеет ограниченных на всей оси решений, отличных от $x(t) \equiv x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x_0(t) \neq x_0$ – ограниченное решение системы (1), т.е.

$$\|x_0(t)\| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$\varepsilon_0 = \sup_{t \geq 0} \|x_0(t) - x_0\| > 0.$$

Выберем $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\|\varphi(t, y) - x_0\| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad t \geq 0, \quad \|y - x_0\| < \delta_0.$$

Покажем, что

$$\|x_0(t) - x_0\| \geq \delta_0 \quad \forall t \leq 0. \quad (9)$$

Действительно, если последнее неравенство не имеет места, то существует $t_0 \leq 0$ такое, что $\|x_0(t_0) - x_0\| < \delta_0$.

В силу выбора δ_0 решение $\varphi(t, y_0)$, где $y_0 = x_0(t_0)$, удовлетворяет условию

$$\|\varphi(t, y_0) - x_0\| < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \forall t \geq 0.$$

Так как $\varphi(t, y_0) = x_0(t + t_0)$, то последнее неравенство имеет вид

$$\|x_0(t + t_0) - x_0\| < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \forall t \geq 0,$$

откуда в силу свойства верхней грани имеем

$$\sup_{t \geq 0} \|x_0(t) - x_0\| \leq \sup_{t \geq t_0} \|x_0(t) - x_0\| = \sup_{t \geq 0} \|x_0(t + t_0) - x_0\| \leq \frac{\varepsilon_0}{2},$$

что противоречит определению ε_0 . Неравенство (9) доказано.

Теперь рассмотрим последовательность решений

$$x_k(t) = x_0(t - k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Очевидно, последовательность $\{x_k(t)\}$ равномерно ограничена, поэтому без ограничения общности можем считать, что $x_k(0) \rightarrow y_0$ при $k \rightarrow \infty$. В силу непрерывной зависимости решений от начальных данных $x_k(t) \rightarrow \varphi(t, y_0)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно на каждом отрезке. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в неравенстве

$$\|x_k(t) - x_0\| = \|x_0(t - k) - x_0\| \geq \delta_0, \quad t \leq k,$$

получим

$$\|\varphi(t, y_0) - x_0\| \geq \delta_0 \quad \forall t. \quad (10)$$

Неравенство (10) противоречит асимптотической устойчивости в целом решения системы (1). Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы. Теорема доказана.

Теоремы 1, 2 допускают обращение, а именно справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ системы (1) устойчиво. Пусть система (1)

- 1) не имеет ограниченных решений, отличных от стационарного решения $x(t) \equiv x_0$;
- 2) не имеет седла в бесконечности.

Тогда стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу устойчивости стационарного решения системы (1) по $\varepsilon = 1$ можно выбрать $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\|\varphi(t, y) - x_0\| < 1 \quad \forall t \geq 0, \quad y: \|y - x_0\| < \delta_0.$$

Покажем, что имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, y) - x_0\| = 0, \quad \|y - x_0\| < \delta_0. \quad (11)$$

В противном случае для некоторого y_0 , $\|y_0 - x_0\| < \delta_0$, существует последовательность t_k , $t_k \rightarrow +\infty$, такая, что

$$\|\varphi(t_k, y_0) - x_0\| \geq \delta_1 > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Рассмотрим последовательность решений $x_k(t)$,

$$x_k(t) = \varphi(t + t_k, y_0), \quad k = 1, 2, \dots$$

В силу выбора y_0 имеем

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_0\| &= \|\varphi(t + t_k, y_0) - x_0\| \leq 1, & t + t_k \geq 0, \\ \|x_k(t)\| &\leq \|x_0\| + \|x_k(t) - x_0\| \leq \|x_0\| + 1, & t \leq -t_k. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_k(0)\}$ ограничена, поэтому без ограничения общности можем считать, что $x_k(0) \rightarrow y^*$, следовательно, $x_k(t) \rightarrow \varphi(t, y^*)$ равномерно на каждом отрезке (в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных и условий (13)). Переходя к пределу в (13), получим $\|\varphi(t, y^*)\| \leq \|x_0\| + 1$ при любом t . А в силу (12) $\|y^* - x_0\| \geq \delta_1$. Таким образом, $\varphi(t, y^*)$ – ограниченное решение уравнения (1), отличное от стационарного решения $x(t) \equiv x_0$. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства (11).

Рассмотрим множество

$$U = \{z = \varphi(t, y) : t < 0, \|y - x_0\| < \delta_0\}.$$

В силу непрерывной зависимости решения $\varphi(t, y)$ от начальных данных и от t множество U открыто. Теперь покажем, что множество U замкнуто.

Пусть $z_k \in U$ и $z_k \rightarrow z_0$ при $k \rightarrow \infty$,

$$z_k = \varphi(t_k, y_k), \quad t_k < 0, \quad \|y_k - x_0\| < \delta_0.$$

Покажем, что $z_0 \in U$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\|z_0 - x_0\| \geq \delta_0$, так как в случае $\|z_0 - x_0\| < \delta_0$ очевидно, что $z_0 \in U$. В силу (11) для каждой точки z_k существует такое $\tau_k > 0$, что

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, z_k) - x_0\| &> \frac{\delta_0}{2}, & 0 \leq t < \tau_k, \\ \|\varphi(\tau_k, z_k) - x_0\| &= \frac{\delta_0}{2}. \end{aligned}$$

Так как система (1) не имеет седла в бесконечности, то последовательность решений $\varphi(t, z_k)$ удовлетворяет условию

$$M_0 = \sup_k \max_{0 \leq t \leq \tau_k} \|\varphi(t, z_k)\| < \infty.$$

Покажем, что числовая последовательность τ_k ограничена. Действительно, при предположении противоположного можно считать, что $\tau_k \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим последовательность решений $\varphi(t, u_k)$, где $u_k = \varphi(\tau_k/2, z_k)$. Тогда

$$\|\varphi(t, u_k) - x_0\| \geq \frac{\delta}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$\|\varphi(t, u_k)\| \leq M_0, \quad -\frac{\tau_k}{2} \leq t \leq \frac{\tau_k}{2}. \quad (15)$$

В силу ограниченности u_k без ограничения общности можно считать, что $u_k \rightarrow u_0$, тогда, переходя к пределу при фиксированном t в неравенствах (14), (15), получим

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, u_0) - x_0\| &\geq \frac{\delta}{2} \quad \forall t, \\ \|\varphi(t, u_0)\| &\leq M_0 \quad \forall t. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi(t, u_0)$ является ограниченным решением уравнения (1), отличным от стационарного решения $x(t) \equiv x_0$, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает ограниченность последовательности τ_k .

Пусть τ_0 – предельная точка последовательности τ_k . Тогда для решения $\varphi(t, z_0)$ имеет место

$$\|\varphi(\tau_0, z_0) - x_0\| = \frac{\delta_0}{2}, \quad z_0 = \varphi(t_0, y_0),$$

где $t_0 = -\tau_0 < 0$, $\|y_0 - x_0\| = \delta_0/2 < \delta_0$, что доказывает, что $z_0 \in U$.

Замкнутость множества U доказана. Таким образом, U – открытое и замкнутое множество, следовательно, $U = \mathbb{R}^n$, и в силу (11) отсюда следует асимптотическая устойчивость в целом стационарного решения $x(t) \equiv x_0$. Теорема доказана.

В заключение отметим одно свойство решений системы (1), не имеющей седла в бесконечности.

ТЕОРЕМА 4. *Для того, чтобы система (1) не имела седла в бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы существовала неубывающая функция $\sigma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ такая, что*

$$\|x(t)\| \leq \sigma(\|x(0) + x(t)\|), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (16)$$

для любого решения $x(t)$, определенного на отрезке $[0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условия (16) очевидна. Для доказательства необходимости функцию $\sigma(u)$ определим равенством

$$\sigma(u) = \sup \max_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|,$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем решениям $x(t)$ и числам T таким, что $\|x(0)\| + \|x(T)\| \leq u$. Так как система (1) не имеет седла, то $\sigma(u) < \infty$ при $0 \leq u < \infty$ и $\sigma(u_1) \leq \sigma(u_2)$ при $u_1 < u_2$. Теорема доказана.

Таким образом, установлена связь устойчивости в целом с задачей об ограниченных режимах нелинейных систем, найдены эффективные признаки асимптотической устойчивости и устойчивости в целом нелинейных систем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974. [2] А. В. Борисов, В. В. Козлов, И. С. Мамаев, *Нелинейная динам.*, **3**:3 (2007), 255–296. [3] A. V. Borisov, V. V. Kozlov, I. S. Mamaev, *Regul. Chaotic Dyn.*, **12**:5 (2007), 531–565. [4] Е. А. Барабашин, Н. Н. Красовский, *ПММ*, **18**:3 (1954), 445–450. [5] И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, Едиториал УРСС, М., 2010. [6] Н. Лузин, *Матем. сб.*, **39**:3 (1932), 6–26. [7] Г. Э. Гришанина, *Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна* – 2010, Тезисы докладов, Воронежский гос. ун-т, Воронеж, 2010, 47–48. [8] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, М., Гостехиздат, 1949.

Г. Э. Гришанина

Международный университет природы,
общества и человека “Дубна”
E-mail: anora66@mail.ru

Поступило
28.08.2011

Н. Г. Иноземцева

Международный университет природы,
общества и человека “Дубна”
E-mail: nginozv@mail.ru

Б. И. Садовников

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: b.i.sadovnikov@gmail.com,
sadovnikov@phys.msu.ru