Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Михайлова, Об индексах избегаемости палиндромов, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 634–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9313>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:36:08

Об индексах избегаемости палиндромов

И. А. Михайлова

Пусть Σ и Δ – два непустых конечных, но не обязательно различных, множества (алфавита). Как обычно, через Σ^+ (соответственно Δ^+) обозначается множество всех непустых слов над алфавитом Σ (соответственно Δ). Отображение $h: \Delta^+ \mapsto \Sigma^+$ называется *морфизмом*, если для любых слов $p, q \in \Delta^+$ выполняется равенство $h(p)h(q) = h(pq)$. Будем говорить, что слово $u \in \Sigma^+$ *избегает* слово $p \in \Delta^+$, если для любого морфизма $h: \Delta^+ \mapsto \Sigma^+$ слово $h(p)$ не является подсловом слова u . Слово p называется *k-избегаемым*, если существует бесконечная последовательность слов u_i над некоторым k -буквенным алфавитом такая, что каждое слово u_i избегает p . Наконец, слово p *избегаемо*, если существует число k такое, что p является k -избегаемым; в противном случае слово p *неизбежно*. Наименьшее число k такое, что слово k -избегаемо, называется *индексом избегаемости* этого слова. Для произвольного избегаемого слова задача нахождения его индекса избегаемости не решена, открытым остается вопрос и о сложности этой задачи (см. обзор [1]). Для слов некоторых типов удается получать те или иные верхние оценки на индекс избегаемости. Так, например, Петров [2] показал, что индекс избегаемости произвольного полного слова не превосходит 4 (*полным* называется слово, в котором каждая буква встречается дважды и для любых различных букв x и y в этом слове слова xu и yx являются его подсловами). В данной заметке указан еще один естественный класс слов, для которых имеется абсолютная (т.е. не зависящая от числа букв) оценка индекса избегаемости.

Напомним, что слово $p = a_1a_2 \dots a_n$ называется *палиндромом*, если оно совпадает со своим зеркальным образом $\overleftarrow{p} = a_n \dots a_2a_1$. Мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Индекс избегаемости произвольного избегаемого палиндрома не зависит от числа букв, входящих в запись этого слова, и не превосходит 16.*

Избегаемый палиндром $abacbdbacaba$ не принадлежит ни к одному из рассматривавшихся ранее классов избегаемых слов и о его индексе избегаемости ничего не было известно.

Для доказательства утверждения нам понадобятся дополнительные сведения об избегаемых словах.

1. Свободные стирания. Пусть u – слово над алфавитом Σ . Пара подмножеств $B, C \subseteq \Sigma$ называется *связкой* в слове u , если для любого двухбуквенного подслова xu слова u выполняется $x \in B \Leftrightarrow u \in C$. Множество $A \subseteq B \setminus C$ называется *свободным* в слове u . Удаление из слова u всех букв из свободного множества A будем называть *свободным стиранием* и обозначать через δ_A , а результат его применения к слову u – через u_A . Последовательность $\delta_{A_1}, \delta_{A_2}, \dots, \delta_{A_k}$ называется *последовательностью свободных стираний*, если δ_{A_1} – свободное стирание в слове u , δ_{A_2} – свободное стирание в слове u_{A_1} и т.д.

Следующая теорема [3] поясняет связь между избегаемыми словами и свободными стираниями в словах.

ТЕОРЕМА 2. *Слово u является неизбежным тогда и только тогда, когда существует последовательность свободных стираний такая, что результат ее применения к слову u – пустое слово.*

Зафиксируем слова $u \in \Sigma^+$, $p \in \Delta^+$ и морфизм $h: \Delta^+ \mapsto \Sigma^+$ такие, что $h(p)$ – подслово слова u . Рассмотрим множество $D \subseteq \Sigma$ и обозначим множество $\{x \in \Delta \mid h(x) \in D^+\}$ через $\overline{D}$. Построим новый морфизм $h_D: (\Delta \setminus \overline{D})^+ \mapsto (\Sigma \setminus D)^+$ по правилу $h_D(x) = (h(x))_D$. Тогда будет верна следующая лемма [4].

ЛЕММА 1. Пусть $u = u_1 h(p) u_2 \in \Sigma^+$ для некоторого нестирающего морфизма h и слова $p \in \Delta^+$, множество $D \subseteq \Sigma$ свободно в слове u . Тогда множество $\overline{D}$ свободно в слове p и

$$h_D(p_{\overline{D}}) = (h(p))_D.$$

2. Доказательство теоремы 1. Построим последовательность слов над алфавитом из 16 букв, которая является частным случаем конструкции, предложенной Сапиром в [4]. Рассмотрим матрицу P размера 16×4 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_\Sigma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} & a_{14} \\ a_{31} & a_{12} & a_{33} & a_{14} \\ a_{41} & a_{12} & a_{43} & a_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{42} & a_{13} & a_{44} \\ a_{21} & a_{42} & a_{23} & a_{44} \\ a_{31} & a_{42} & a_{33} & a_{44} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через Σ множество букв $\{a_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 4\}$. Матрица P_Σ получена заменой элементов в матрице P на буквы из Σ по правилу: числу i , стоящему в j -м столбце, соответствует буква a_{ij} . Для каждого $1 \leq j \leq 4$ обозначим $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq 4\}$ через Σ_j , тогда $\Sigma = \bigcup_{j=1}^4 \Sigma_j$.

Обозначим через B_i слово, записанное в i -й строке матрицы P_Σ . Слова B_i , где $1 \leq i \leq 16$, называются *блоками* и обладают следующими очевидными свойствами [4].

ЛЕММА 2. В каждом блоке все буквы различны, на j -й позиции стоит буква из Σ_j . Два различных блока не содержат одинаковых двухбуквенных подслов.

Рассмотрим морфизм $\gamma: \Sigma^+ \mapsto \Sigma^+$ такой, что $\gamma(a_{ij}) = B_{(i-1)4+j}$. Покажем, что каждое из слов $\gamma^m(a_{11})$, где $m \geq 0$, избегает все избегаемые палиндромы.

Предположим противное: существует (наименьшее) число m такое, что для некоторого избегаемого палиндрома $p \in \Delta^+$ и морфизма $h: \Delta^+ \mapsto \Sigma^+$ слово $h(p)$ является подсловом слова $\gamma^m(a_{11})$. Без ограничения общности можно считать, что $h(p) = \gamma^m(a_{11})$. Пусть xy – некоторое двухбуквенное подслово слова p . Так как $p = \overleftarrow{p}$, то yx также будет его подсловом. В силу леммы 2 вторые индексы всех букв в каждом блоке возрастают от 1 до 4, поэтому $h(x)$ и $h(y)$ в слове $\gamma^m(a_{11})$ могут располагаться только так, как показано на рис. 1.

Рис. 1. Иллюстрация к доказательству теоремы 1.

Таким образом, число “границ” образов букв внутри блока не больше двух и, следовательно, в каждом блоке можно выбрать двухбуквенное подслово, которое для любой буквы либо лежит внутри образа этой буквы, либо не пересекается с ним. Зафиксируем некоторый набор таких двухбуквенных подслов и будем называть их *маркерами*. По лемме 2 каждое двухбуквенное подслово однозначно определяет блок. Каждому маркеру сопоставим новую букву t_B и обозначим множество этих букв через T .

Определим морфизм

$$\bar{h}: \Delta^+ \mapsto (\Sigma \cup T)^+,$$

где $\bar{h}(x)$ – это слово $h(x)$, в котором все маркеры заменены на соответствующие буквы из T . Рассмотрим слово

$$\bar{h}(p) = P_1 t_1 Q_1 P_2 t_2 Q_2 \dots P_\ell t_\ell Q_\ell,$$

где P_i (Q_i) – префикс (суффикс) соответствующего блока. Следуя [4], будем называть это слово *квази-целым* (поскольку целыми в [4] назывались слова из Σ^+ , которые можно разбить на блоки). В [4] было показано, что последовательность стираний $\delta_{\Sigma_1}, \delta_{\Sigma_2}, \delta_{\Sigma_3}, \delta_{\Sigma_4}$ является свободной в любом квази-целом слове. Результат применения этой последовательности к слову $\bar{h}(p)$ – это слово $\Lambda = t_1 t_2 \dots t_\ell \in T^+$.

По лемме 1 последовательность $\delta_{\Sigma_1}, \delta_{\Sigma_2}, \delta_{\Sigma_3}, \delta_{\Sigma_4}$ порождает последовательность свободных стираний в слове p , результат применения которой обозначим через p' . Заметим, что после стирания некоторого множества букв в палиндроме в результате снова получится палиндром. Определим морфизм $\varphi: T^+ \mapsto \Sigma^+$ по правилу

$$\varphi(t_B) = a_{ij}, \quad \text{если} \quad \gamma(a_{ij}) = B.$$

Тогда легко видеть, что

$$\varphi(t_1 t_2 \dots t_\ell) = \gamma^{m-1}(a_{11}).$$

По лемме 1 образ палиндрома p' при некотором морфизме является подсловом Λ и, следовательно, слово $\varphi(\Lambda) = \gamma^{m-1}(a_{11})$ не избегает p' . Напомним, число m было выбрано таким, что $\gamma^{m-1}(a_{11})$ избегает все избегаемые палиндромы. Откуда получаем, что слово p' неизбежно, и по теореме 2 слово p также будет неизбежно, что приводит к противоречию и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. D. Currie, *Theoret. Comp. Sci.*, **339**:1 (2005), 7–18. [2] А. Н. Петров, *Матем. заметки*, **44**:4 (1988), 517–522. [3] D. R. Bean, A. Ehrenfeucht, G. F. McNulty, *Pacific J. Math.*, **85**:2 (1979), 261–294. [4] M. V. Sapir, *Combinatorics on Words with Applications*, LITP Report 32, Université Paris 7, 1995.

И. А. Михайлова

Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург

E-mail: inna.mikhaylova@gmail.com

Поступило

10.10.2011