Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Ибрагимов, К. К. Кудайбергенов, С. Ж. Тле-
муратов, Ж. Х. Сейпуллаев, Геометрическое описание
предсопряженного пространства к атомической комму-
тативной алгебре фон Неймана, *Матем. заметки*, 2013,
том 93, выпуск 5, 728–735

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:57:12

Геометрическое описание предсопряженного пространства к атомической коммутативной алгебре фон Неймана

М. М. Ибрагимов, К. К. Кудайбергенов,
С. Ж. Тлеумуратов, Ж. Х. Сейпуллаев

Дано описание сильно гранево симметричных пространств, которые изометрически изоморфны к предсопряженному пространству атомической коммутативной алгебры фон Неймана.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm9314

1. Введение. Одной из важных задач теории операторных алгебр является геометрическая характеристизация пространств состояний операторных алгебр. В связи с этим в середине 80-х годов прошлого века появилась работа Фридмана и Руссо [1], в которой были введены гранево симметричные пространства, основной целью введения которых является геометрическая характеристизация предсопряженных пространств JBW^* -троек, допускающих алгебраическую структуру. Многие из свойств, требуемых в этих характеристизациях, являются естественными предположениями для пространств состояний физических систем. Такие пространства рассматриваются как геометрическая модель для состояний квантовой механики. В работе [2] доказано, что предсопряженное пространство для алгебры фон Неймана и более общих JBW^* -троек является нейтральным сильно гранево симметричным пространством.

Проект классификации гранево симметричных пространств был начат в [3], где была дана геометрическая характеристизация комплексных гильбертовых пространств и комплексных спин факторов. Было дано описание JBW^* -троек ранга 1 и 2, факторов Картана типа 1 и 4. Позже Фридман и Руссо в работе [4] получили описание атомических гранево симметричных пространств. А именно, было показано, что нейтральное сильно гранево симметричное пространство линейно изометрично к предсопряженному пространству одного из факторов Картана типа 1–6 при условии, что оно удовлетворяет четырем естественным и физическим аксиомам, которые выполняются в предсопряженных пространствах JBW^* -троек.

В 2004 г. в работе Нейла и Руссо [5] были найдены геометрические условия, при которых гранево симметрическое пространство является изометричным предсопряженному пространству JBW^* -тройки. В частности, было доказано, что всякое нейтральное сильно гранево симметричное пространство разлагается в прямую сумму атомических и не атомических сильно гранево симметричных пространств.

Настоящая работа посвящена описанию сильно гранево симметричных пространств, которые изометрически изоморфны к предсопряженному пространству атомичной коммутативной алгебры фон Неймана.

2. Предварительные сведения. Пусть Z – действительное или комплексное нормированное пространство. Элементы $x, y \in Z$ называются *ортгональными*, обозначение $x \diamond y$, если

$$\|x + y\| = \|x - y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Подмножества $S, T \subset Z$ называются *ортгональными*, обозначение $(S \diamond T)$, если $x \diamond y$ для всех $(x, y) \in S \times T$. Для подмножества S пространства Z положим

$$S^\diamond = \{x \in Z : x \diamond y \ \forall y \in S\}$$

и назовем $S^\diamond$ *ортгональным дополнением* к S . Выпуклое подмножество F единичного шара $Z_1 = \{x \in Z : \|x\| \leq 1\}$ называется *гранью*, если включение

$$\lambda y + (1 - \lambda)z \in F, \quad \text{где } y, z \in Z_1, \quad \lambda \in (0, 1),$$

влечет $y, z \in F$. Грань F единичного шара называется *выставленной по норме*, если

$$F = F_u = \{x \in Z : u(x) = 1\}$$

для некоторого $u \in Z^*$ с $\|u\| = 1$. Элемент $u \in Z^*$ называется *проективной единицей*, если $\|u\| = 1$ и $u(y) = 0$ при всех $y \in F_u^\diamond$ (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Выставленная по норме грань F_u из Z_1 называется *симметричной гранью*, если существует линейная изометрия S_u из Z на Z такая, что $S_u^2 = I$, и множество неподвижных точек которой в точности совпадает с топологической прямой суммой замыкания $\overline{\text{sp}} F_u$ линейной оболочки грани F_u и ее ортогонального дополнения $F_u^\diamond$, т.е. совпадает с $(\overline{\text{sp}} F_u) \oplus F_u^\diamond$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. Пространство Z называется *слабо симметричным пространством* (*WFS-пространством*), если каждая выставленная по норме грань из Z_1 симметрична.

Для каждой симметричной грани F_u определяются сжимающие проекторы $P_k(F_u)$, $k = 0, 1, 2$, на Z следующим образом. Во-первых, $P_1(F_u) = (I - S_u)/2$ является проектором на собственное подпространство, соответствующее собственному значению -1 симметрии S_u . Далее определим $P_2(F_u)$ и $P_0(F_u)$ как проекторы из Z на $\overline{\text{sp}} F_u$ и $F_u^\diamond$ соответственно, т.е. $P_2(F_u) + P_0(F_u) = (I + S_u)/2$. Проекторы $P_k(F_u)$ называются *геометрическими пирсовскими проекторами*.

Проективная единица u из Z^* называется *геометрическим трипотентом*, если F_u является симметричной гранью и $S_u^* u = u$ для симметрии S_u , соответствующей F_u . Через $\mathcal{GT}$ и $\mathcal{SF}$ обозначим множество всех геометрических трипотентов и симметричных граней соответственно, и соответствие $\mathcal{GT} \ni u \mapsto F_u \in \mathcal{SF}$ является биективным (см. [6; предложение 1.6]). Для каждого геометрического трипотента u из сопряженного *WFS-пространства* Z обозначим пирсовские проекторы через $P_k(u) = P_k(F_u)$, $k = 0, 1, 2$. Далее,

$$U = Z^*, \quad Z_k(u) = Z_k(F_u) = P_k(u)Z, \quad U_k(u) = U_k(F_u) = P_k(u)^*(U)$$

и, следовательно, имеет место разложение Пирса

$$Z = Z_2(u) + Z_1(u) + Z_0(u), \quad U = U_2(u) + U_1(u) + U_0(u).$$

Трипотенты u и v называются *ортогональными*, если $u \in U_0(v)$ (что влечет $v \in U_0(u)$) или, эквивалентно, $u \pm v \in \mathcal{GT}$ (см. [1; лемма 2.5]). Более общо, элементы a и b из U называются *ортогональными*, если один из них принадлежит $U_2(u)$ и другой принадлежит $U_0(u)$ для некоторого геометрического трипотента u . Заметим, что если $u, v \in \mathcal{GT}$ ортогональны, то

$$Z_2(u + v) = Z_2(u) + Z_2(v) + Z_1(u)Z_1(v), \quad Z_0(u + v) = Z_0(u) \cap Z_0(v)$$

(см. [6; лемма 1.8]).

Сжимающий проектор Q на Z называется *нейтральным*, если для каждого $x \in Z$ равенство $\|Qx\| = \|x\|$ влечет $Qx = x$. Пространство Z называется *нейтральным*, если для каждой симметричной грани F_u проектор $P_2(u)$, соответствующий симметрии S_u , является нейтральным. Пространство Z называется *атомическим*, если каждая симметричная грань из Z_1 содержит крайнюю точку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [1]. *WFS-пространство Z называется сильно гранево симметричным пространством (SFS-пространством), если для каждой выставленной по норме грани F_u из Z_1 и каждого $g \in Z^*$ с $\|g\| = 1$ и $F_u \subset F_g$ имеем $S_u^*g = g$, где S_u – симметрия, соответствующая F_u .*

Содержательными примерами нейтральных сильно гранево симметричных пространств являются гильбертово пространство, предсопряженное пространство к алгебре фон Неймана или JBW^* -алгебре и, более общее, предсопряженное пространство к JBW^* -тройкам. Кроме того, геометрическим трипотентам соответствует ненулевые частичные изометрии в алгебре фон Неймана и трипотенты в JBW^* -тройках (см. [2]).

В нейтральном сильно гранево симметричном пространстве Z каждый ненулевой элемент допускает *полярное разложение* [6; теорема 4.3]: для $0 \neq x \in Z$ существует единственный геометрический трипотент $v = v_x$ с $v(x) = \|x\|$ и $\langle v, x^\diamond \rangle = 0$. Если $x, y \in Z$, то $x \diamond y$ в том и только том случае, когда $v_x \diamond v_y$ (см. [1; следствие 1.3, (б) и лемма 2.1]). Геометрический трипотент $u \in U$ называется *минимальным*, если $\dim U_2(v) = 1$. Отметим, что если u – минимальный геометрический трипотент, то существует такой элемент $z \in Z$, что $P_2(u)(x) = u(x)z$ для всех $x \in Z$.

Говорят [3], что нейтральное SFS-пространство Z *удовлетворяет свойству PE (point exposed)*, если каждая крайняя точка шара Z_1 является выставленной по норме точкой.

На множестве геометрических трипотентов *отношение порядка* вводится следующим образом: если $u, v \in \mathcal{GT}$, то положим $u \leq v$, если $F_u \subset F_v$. Отметим, что это определение эквивалентно тому, что $P_2(u)^*v = u$ или $v - u$ либо равно нулю, либо геометрический трипотент, ортогональный к u (см. [6; лемма 4.2]).

3. Основной результат. Далее везде Z – нейтральное сильно гранево симметричное пространство такое, что существует геометрический трипотент e такой, что $P_2(e) = I$, т.е. $Z_2(e) = Z$. Обозначим

$$\nabla = \{u \in \mathcal{GT} : u \leq e\} \cup \{0\}.$$

Известно [6; предложение 4.5], что относительно порядка “ $\leq$ ” множество ∇ является полной ортомодулярной решеткой с ортодополнением $u^\perp = e - u$.

Сначала докажем несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 1. *Если ∇ является булевой алгеброй, то для любого $u \in \nabla$, $u \neq 0$, имеет место*

- а) $P_1(u) = 0$;
- б) $P_2(u) = P_0(u^\perp)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $u \in \nabla$, $u \neq 0$. Сначала покажем, что

$$F_e \subseteq \overline{\text{sp}} F_u \oplus \overline{\text{sp}} F_{u^\perp}.$$

Предположим обратное, т.е. пусть найдется элемент

$$a \in F_e \setminus \overline{\text{sp}} F_u \oplus \overline{\text{sp}} F_{u^\perp}.$$

Определим на подпространстве $\text{sp}\{a\} \oplus \overline{\text{sp}} F_u \oplus \overline{\text{sp}} F_{u^\perp}$ функционал g следующим образом:

$$g(\lambda a + x) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in \overline{\text{sp}} F_u \oplus \overline{\text{sp}} F_{u^\perp}.$$

По теореме Хана–Банаха продолжим, сохраняя норму, функционал g на Z , и его обозначим также через g . Тогда

$$\begin{aligned} \|g\| &= 1, & g(a) &= 1, \\ g|_{\overline{\text{sp}} F_u \oplus \overline{\text{sp}} F_{u^\perp}} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Возьмем трипотент $v \in Z^*$ такой, что $F_g = F_v$. Тогда в силу (3.1) имеем

$$\begin{aligned} v(a) &= 1, \\ v|_{\overline{\text{sp}} F_u \oplus \overline{\text{sp}} F_{u^\perp}} &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Покажем, что $u \wedge v = 0$, $u^\perp \wedge v = 0$. Действительно, если предполагать, что $u \wedge v \neq 0$, то существует элемент $x \in Z_1$ такой, что $u(x) = v(x) = 1$. Тогда $x \in F_u$. Поэтому из (3.2) имеем $v(x) = 0$, что не так. Таким образом,

$$u \wedge v = 0, \quad u^\perp \wedge v = 0.$$

Теперь из $a \in F_e \cap F_v$ имеем, что $e \wedge v \neq 0$. С другой стороны, из того, что ∇ – булева алгебра, получим

$$e \wedge v = (u \vee u^\perp) \wedge v = (u \wedge v) \vee (u^\perp \wedge v) = 0 \vee 0 = 0.$$

Это противоречит тому, что $e \wedge v \neq 0$. Из полученного противоречия следует, что

$$F_e \subseteq \overline{\text{sp}} F_u \oplus \overline{\text{sp}} F_{u^\perp}.$$

Так как $\overline{\text{sp}} F_e = Z$, то

$$Z = \overline{\text{sp}} F_u \oplus \overline{\text{sp}} F_{u^\perp}. \tag{3.3}$$

Теперь покажем, что $P_1(u) = 0$. Равенство (3.3) означает, что

$$I = P_2(u) + P_2(u^\perp).$$

Отсюда

$$P_1(u) + P_0(u) = I - P_2(u) = P_2(u^\perp),$$

т.е.

$$P_1(u) + P_0(u) = P_2(u^\perp). \quad (3.4)$$

Так как $P_1(u)P_0(u) = 0$ и $P_2(u^\perp) \subseteq P_0(u)$, то $P_1(u)P_2(u^\perp) = 0$. Умножив обе части равенства (3.4) на $P_1(u)$, имеем

$$P_1(u)[P_1(u) + P_0(u)] = P_1P_2(u^\perp),$$

т.е.

$$P_1(u) = 0.$$

б) Заметим, что если $u, v \in \mathcal{GT}$ ортогональны, то в силу [6; лемма 1.8] имеем

$$P_2(u + v) = P_2(u) + P_2(v) + P_1(u)P_1(v).$$

Так как $P_1(u) = P_1(u^\perp) = \{0\}$, то

$$I = P_2(u^\perp) + P_0(u^\perp), \quad (3.5)$$

и

$$I = P_2(e) = P_2(u + u^\perp) = P_2(u) + P_2(u^\perp),$$

т.е.

$$I = P_2(u) + P_2(u^\perp). \quad (3.6)$$

Из равенств (3.5) и (3.6) получим, что $P_2(u) = P_0(u^\perp)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если ∇ – булева алгебра и $v_i \in \nabla$, $v_i \diamond v_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, то

$$P_2\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) = \sum_{i=1}^n P_2(v_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $v_i \diamond v_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, в силу [6; следствие 3.4] для $i \neq j$ имеем

$$\begin{aligned} P_2(v_i)P_2(v_j) &= 0, \\ P_2(v_i)P_0(v_j) &= P_2(v_i), \\ P_0(v_i)P_0(v_j) &= P_0(v_i + v_j). \end{aligned}$$

В силу леммы 1, а) имеем $P_2(v_i) + P_0(v_i) = I$. Отсюда, используя выше указанные соотношения, имеем

$$I = I^n = \prod_{i=1}^n [P_2(v_i) + P_0(v_i)] = \sum_{i=1}^n P_2(v_i) + \prod_{i=1}^n P_0(v_i) = \sum_{i=1}^n P_2(v_i) + P_0\left(\sum_{i=1}^n v_i\right),$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^n P_2(v_i) + P_0\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) = I.$$

Так как

$$P_2\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) + P_0\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) = I,$$

то

$$P_2\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) = \sum_{i=1}^n P_2(v_i).$$

Лемма доказана.

Далее будем предполагать, что Z – атомическое нейтральное сильно гранево симметричное пространство с условием PE такое, что существует геометрический трипотент e такой, что $Z_2(e) = Z$.

Пусть T – максимальное семейство взаимно ортогональных минимальных геометрических трипотентов из Z^* , т.е. $T = \{v_i : v_i \diamond v_j, i \neq j, i, j \in J\}$, каждый v_i минимален и не существует минимального геометрического трипотента, ортогонального всем $v_i, i \in J$. Существование такого семейства вытекает из леммы Цорна.

ЛЕММА 3. Если T – максимальное семейство взаимно ортогональных минимальных геометрических трипотентов из Z^* и $v = \sup\{v_i : v_i \in J\}$, то $v = e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $v \neq e$. Тогда $v^\perp \neq 0$. Так как Z – атомическое SFS -пространство со свойством PE , найдется выставленная по норме точка x из $F_{v^\perp}$. Геометрический трипотент u , соответствующий точке x , является минимальным. Поэтому $u \leq v^\perp$. Так как $v^\perp \leq v_i^\perp$, то $u \leq v_i^\perp, i \in J$. Отсюда $u \diamond v_i, i \in J$. Это противоречит тому, что T максимальное семейство. Из полученного противоречия вытекает, что $v = e$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если T – максимальное семейство взаимно ортогональных минимальных геометрических трипотентов из Z^* , то T разделяет точки Z , т.е. для любого $x \in Z, x \neq 0$ найдется $v \in T$ такое, что $v(x) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T – максимальное семейство взаимно ортогональных минимальных геометрических трипотентов из Z^* . Согласно лемме 3 имеет место $\sup\{v_i : v_i \in J\} = e$.

Предположим, что существует точка $x \in Z, \|x\| = 1$ такая, что $v_i(x) = 0$ при всех $i \in J$. Так как каждый v_i является минимальным, существует $z_i \in F_{v_i}$ такое, что для любого $x \in Z$ имеет место $P_2(v_i)(x) = v_i(x)z_i$. Поскольку $v_i(x) = 0$, то $P_2(v_i)(x) = 0$. Так как $P_1(u) = 0$, то $x \in Z_0(v_i)$ для всех $i \in J$. В силу леммы 1, а) имеем $P_2(v_i^\perp) = P_0(v_i)$. Отсюда $x \in Z_2(v_i^\perp)$ для всех $i \in J$. Возьмем наименьший геометрический трипотент v такой, что $x \in F_v$. Тогда $v \diamond v_i$ для всех $i \in J$. Следовательно, $v \diamond \sup v_i$, т.е. $v \diamond e$. Поэтому $x \in P_0(e)$. Поскольку $P_0(e) = 0$, то $x = 0$. Это противоречит тому, что $x \neq 0$. Из полученного противоречия следует, что T разделяет точки Z . Лемма доказана.

Пусть $T = \{v_i\}_{i \in J}$ – максимальное семейство взаимно ортогональных минимальных геометрических трипотентов из Z^* . Положим

$$\ell_1(T) = \left\{ \{\lambda_i\}_{i \in J} : \sum_{i \in J} |\lambda_i| < +\infty \right\}.$$

Тогда $\ell_1(T)$ – банахово пространство относительно нормы

$$\|\{\lambda_i\}_{i \in J}\| = \sum_{i \in J} |\lambda_i|.$$

Следующая теорема является основным результатом работы, которая дает описание сильно гранево симметричных пространств изометрически изоморфных к сопряженному пространству атомичной коммутативной алгебры фон Неймана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Z – атомическое нейтральное сильно гранево симметричное пространство с условием PE такое, что существует геометрический трипотент e такой, что $Z_2(e) = Z$. Если ∇ – булева алгебра, то Z изометрически изоморфно пространству $\ell_1(T)$, где T – максимальное семейство взаимно ортогональных минимальных геометрических трипотентов из Z^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_i \in F_e$ такие, что $v_i(z_i) = 1$. Тогда для любого $x \in Z$ имеет место $P_2(v_i)(x) = v_i(x)z_i$, где $v_i(x) \in \mathbb{C}$, $i \in J$. Покажем, что

$$x = \sum_{i \in J} v_i(x)z_i, \quad \|x\| = \sum_{i \in J} |v_i(x)|.$$

Пусть $i_1, \dots, i_n \in J$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |v_{i_k}(x)| &= \sum_{k=1}^n |v_{i_k}(x)| \|z_{i_k}\| = [z_{i_k} \diamond z_{i_s}, k \neq s] \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n v_{i_k}(x)z_{i_k} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n P_2(v_{i_k})(x) \right\| = \left\| P_2\left(\sum_{k=1}^n v_{i_k}\right)(x) \right\| \leq \|x\|, \end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^n |v_{i_k}(x)| \leq \|x\|.$$

Отсюда ряд $\sum_{i \in J} |v_i(x)|$ сходится и $\sum_{i \in J} |v_i(x)| \leq \|x\|$. Далее для $j \in J$ имеем

$$v_j\left(x - \sum v_i(x)z_i\right) = v_j(x) - v_j(x) = 0.$$

Так как T разделяет точки Z , то $x = \sum_{i \in J} v_i(x)z_i$. Таким образом, соответствие

$$x \in Z \mapsto \{v_i(x)\}$$

является изометрическим изоморфизмом между Z и $\ell_1(T)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Z – конечномерное нейтральное сильно гранево симметричное пространство такое, что существует геометрический трипотент e такой, что $Z_2(e) = Z$. Если ∇ – булева алгебра, то Z изометрически изоморфно пространству $\mathbb{C}^n$ с нормой

$$\|z\| = |z_1| + \dots + |z_n|.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Friedman, B. Russo, “A geometric spectral theorem”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **37**:3 (1986), 263–277.
- [2] Y. Friedman, B. Russo, “Some affine geometric aspects of operator algebras”, *Pacific J. Math.*, **137**:1 (1989), 123–144.
- [3] Y. Friedman, B. Russo, “Geometry of the dual ball of the spin factor”, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **65**:1 (1992), 142–174.
- [4] Y. Friedman, B. Russo, “Classification of atomic facially symmetric spaces”, *Canad. J. Math.*, **45**:1 (1993), 33–87.
- [5] M. Neal, B. Russo, “State space of JB^* -triples”, *Math. Ann.*, **328**:4 (2004), 585–624.
- [6] Y. Friedman, B. Russo, “Affine structure of facially symmetric spaces”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **106**:1 (1989), 107–124.

М. М. Ибрагимов

Каракалпакский государственный университет
им. Бердаха, Узбекистан
E-mail: mukhtar_nukus@mail.ru

Поступило

19.11.2011

Исправленный вариант

29.03.2012

К. К. Кудайбергенов

Каракалпакский государственный университет
им. Бердаха, Узбекистан
E-mail: karim2006@mail.ru

С. Ж. Тлеумуратов

Каракалпакский государственный университет
им. Бердаха, Узбекистан
E-mail: sarsenmat@rambler.ru

Ж. Х. Сейпуллаев

Каракалпакский государственный университет
им. Бердаха, Узбекистан
E-mail: jumabek81@mail.ru