Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Донадзе, Об одном утверждении, эквивалентном гипотезе Римана, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 347–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:48:37

Об одном утверждении, эквивалентном гипотезе Римана

Г. Донадзе

В статье доказывается утверждение, эквивалентное гипотезе Римана.
Библиография: 6 названий.

1. Основной результат. Будем использовать классические обозначения аналитической теории чисел (см. [1] или [2]).

Известно следующее уравнение для дзета функции Римана ζ , определенной на комплексной плоскости для одной комплексной переменной:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

где $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 1$ и Λ – функция Мангольдта. Функция ζ'/ζ определена на всей комплексной плоскости следующим образом:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right), \quad (1.1)$$

где ρ пробегает все критические нули (с учетом кратности) функции ζ , а B абсолютная константа.

Пусть X вещественное число, $X > 1$. Тогда, в силу [3] существуют такие положительные постоянные $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, что для достаточно больших X сумма

$$\sum_{n \leq X} \frac{1 - \Lambda(n)}{n^{1/2}}$$

может быть больше $c_1 \ln \ln \ln X$ и меньше $-c_2 \ln \ln \ln X$ в зависимости от X . Но в предположении гипотезы Римана можно доказать, что

$$\sum_{n \leq X} \frac{1 - \Lambda(n)}{n^{1/2}} \ln \frac{X}{n} > 0,$$

для всех $X > 1$. Это одна часть нашего основного результата:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *гипотеза Римана справедлива;*

(ii) выполнено

$$\sum_{n \leq X} \frac{1 - \Lambda(n)}{n^{1/2}} \ln \frac{X}{n} > 0,$$

для всех $X > 1$.

2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 2.1. Пусть X вещественное число. Если $X > 1$, то для всех $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$, $\zeta(s) \neq 0$, имеем

$$\sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln \frac{X}{n} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ln X + \frac{X^{1-s} - 1}{(1-s)^2} + \sum_{\rho} \frac{1 - X^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - X^{-2n-s}}{(2n+s)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $X > 1$ не целое число. Тогда

$$\sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{X^{1-s}}{1-s} - \sum_{\rho} \frac{X^{\rho-s}}{\rho-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{-2n-s}}{-2n-s}$$

(см. [4]), где

$$\sum_{\rho} \frac{X^{\rho-s}}{\rho-s} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\rho| < T} \frac{X^{\rho-s}}{\rho-s}.$$

При этом

$$\sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n) \ln n}{n^s} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{s+\alpha-iT}^{s+\alpha+iT} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\zeta'(\tau+s)}{\zeta(\tau+s)} \right) \frac{X^{\tau}}{\tau} d\tau, \quad (2.1)$$

где α целое число и $\alpha + \operatorname{Re} s > 1$. Дифференцируя уравнение (1.1), получим

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\zeta'(s+\tau)}{\zeta(s+\tau)} = \frac{1}{(s+\tau-1)^2} - \sum_{\rho} \frac{1}{(s+\tau-\rho)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+\tau+2n)^2}. \quad (2.2)$$

Используя (2.1), (2.2) и стандартный метод вычисления интеграла, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n) \ln n}{n^s} &= \frac{1 - X^{1-s}}{(1-s)^2} - \sum_{\rho} \frac{1 - X^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - X^{-2n-s}}{(2n+s)^2} \\ &\quad + \frac{X^{1-s} \ln X}{1-s} - \sum_{\rho} \frac{X^{\rho-s} \ln X}{\rho-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{-2n-s} \ln X}{-2n-s}, \end{aligned}$$

откуда для нецелого числа X , $X > 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln \frac{X}{n} &= \ln X \sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n) \ln n}{n^s} \\ &= \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{X^{1-s}}{1-s} - \sum_{\rho} \frac{X^{\rho-s}}{\rho-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{-2n-s}}{-2n-s} \right) \ln X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1-X^{1-s}}{(1-s)^2} + \sum_{\rho} \frac{1-X^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-X^{-2n-s}}{(2n+s)^2} \\
& -\frac{X^{1-s} \ln X}{1-s} + \sum_{\rho} \frac{X^{\rho-s} \ln X}{\rho-s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{-2n-s} \ln X}{-2n-s} \\
& -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ln X + \frac{X^{1-s}-1}{(1-s)^2} + \sum_{\rho} \frac{1-X^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-X^{-2n-s}}{(2n+s)^2}.
\end{aligned}$$

Отсюда лемма справедлива для $X > 1$, если X не целое число. Так как функция

$$\sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ln \frac{X}{n} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ln X - \frac{X^{1-s}-1}{(1-s)^2} - \sum_{\rho} \frac{1-X^{\rho-s}}{(\rho-s)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-X^{-2n-s}}{(2n+s)^2}$$

непрерывна по X , отсюда следует, что данная лемма справедлива при всех $X \geq 1$.

ЛЕММА 2.2. Пусть X вещественное число. Если $X > 1$, то для всех $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{n^{\alpha}} \ln \frac{X}{n} = \frac{X^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)^2} + \left(\zeta(\alpha) - 1 - \frac{1}{\alpha-1} \right) \ln X + \zeta'(\alpha) + \frac{1}{(\alpha-1)^2} + R(X),$$

где $R(X) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $X > 1$ и $s \in \mathbb{C}$ имеем

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} = \frac{[X]}{X^s} + s \int_1^X \frac{[\xi]}{\xi^{s+1}} d\xi$$

(см. [2] или [4]). Если $s \neq 1$, то

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} = \frac{[X]}{X^s} + s \int_1^X \frac{\xi}{\xi^{s+1}} d\xi + s \int_1^X \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{s+1}} d\xi = \frac{[X]}{X^s} + s \frac{X^{1-s}-1}{1-s} + s \int_1^X \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{s+1}} d\xi.$$

Дифференцируя по s , получим

$$\begin{aligned}
-\sum_{n \leq X} \frac{\ln n}{n^s} &= -\frac{[X] \ln X}{X^s} + \frac{X^{1-s}-1}{1-s} + s \frac{X^{1-s}-1}{(1-s)^2} \\
&\quad - s \frac{X^{1-s} \ln X}{1-s} + \int_1^X \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{s+1}} d\xi - s \int_1^X \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{s+1}} \ln \xi d\xi \\
&= -\frac{[X] \ln X}{X^s} + \frac{X^{1-s}-1}{(1-s)^2} - s \frac{X^{1-s} \ln X}{1-s} \\
&\quad + \int_1^X \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{s+1}} d\xi - s \int_1^X \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{s+1}} \ln \xi d\xi.
\end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} \ln \frac{X}{n} = \frac{X^{1-s}-1}{(1-s)^2} + \int_1^X \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{s+1}} d\xi + s \int_1^X \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{s+1}} \ln \frac{X}{\xi} d\xi.$$

Теперь предположим, что $0 < \alpha < 1$. Тогда в соответствии с последним равенством имеем

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{n^\alpha} \ln \frac{X}{n} = \frac{X^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha)^2} + \int_1^\infty \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{\alpha+1}} d\xi + \alpha \int_1^\infty \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{\alpha+1}} \ln \frac{X}{\xi} d\xi + R(X),$$

где $R(X) > 0$. При этом используя следующие формулы:

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha) &= 1 + \frac{1}{\alpha - 1} + \alpha \int_1^\infty \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{\alpha+1}} d\xi, \\ \zeta'(\alpha) &= -\frac{1}{(\alpha - 1)^2} + \int_1^\infty \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{\alpha+1}} d\xi - \alpha \int_1^\infty \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{\alpha+1}} \ln \xi d\xi, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{\alpha+1}} d\xi + \alpha \int_1^\infty \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{\alpha+1}} \ln \frac{X}{\xi} d\xi \\ &= (\ln X) \alpha \int_1^\infty \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{\alpha+1}} d\xi + \int_1^\infty \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{\alpha+1}} d\xi - \alpha \int_1^\infty \frac{[\xi] - \xi}{\xi^{\alpha+1}} \ln \xi d\xi \\ &= \left(\zeta(\alpha) - 1 - \frac{1}{\alpha - 1} \right) \ln X + \zeta'(\alpha) + \frac{1}{(\alpha - 1)^2}. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

3. Доказательство основного результата. Часть 1. (i) $\Rightarrow$ (ii). Очевидно,

$$\sum_{n \leq X} \frac{1 - \Lambda(n)}{n^{1/2}} \ln \frac{X}{n} > 0,$$

если $1 < X \leq 2$. Пусть $X > 2$. Из лемм 2.1 и 2.2 получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq X} \frac{1 - \Lambda(n)}{n^{1/2}} \ln \frac{X}{n} \\ &= \left(\zeta\left(\frac{1}{2}\right) - 1 - \frac{1}{1/2 - 1} + \frac{\zeta'(1/2)}{\zeta(1/2)} \right) \ln X \\ & \quad + \zeta'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(1/2 - 1)^2} - \sum_{\rho} \frac{1 - X^{\rho-1/2}}{(\rho - 1/2)^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1 - X^{-2n-1/2}}{(2n + 1/2)^2} + R(X) \\ &> \left(\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{\zeta'(1/2)}{\zeta(1/2)} \right) \ln X + \zeta'\left(\frac{1}{2}\right) + 4 - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n + 1/2)^2} - \sum_{\rho} \frac{1 - X^{\rho-1/2}}{(\rho - 1/2)^2} \\ &> 2.22 \ln X - 0.23 - \sum_{\rho} \frac{1 - X^{\rho-1/2}}{(\rho - 1/2)^2} > - \sum_{\rho} \frac{1 - X^{\rho-1/2}}{(\rho - 1/2)^2}. \end{aligned}$$

При этом из гипотезы Римана следует

$$- \sum_{\rho} \frac{1 - X^{\rho-1/2}}{(\rho - 1/2)^2} = \sum_{\rho} \frac{1 - \cos(|\rho - 1/2| \ln X)}{|\rho - 1/2|^2} \geq 0.$$

Отсюда (i) влечет (ii).

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) можно упростить, используя методы Карацубы (см. [5] и [6]).

Часть 2. (ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $a_n = (1 - \Lambda(n))n^{-1/2}$. Тогда для всех $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 1/2$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \int_1^{\infty} \left(\sum_{n \leq X} a_n \right) \frac{1}{X^{s+1}} dX,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ln n}{n^s} = s \int_1^{\infty} \left(\sum_{n \leq X} a_n \ln n \right) \frac{1}{X^{s+1}} dX,$$

откуда

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) = \frac{d}{ds} \int_1^{\infty} \left(\sum_{n \leq X} a_n \right) \frac{1}{X^{s+1}} dX$$

и, значит,

$$\frac{1}{s^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} + \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ln n}{n^s} = \int_1^{\infty} \left(\sum_{n \leq X} a_n \right) \frac{\ln X}{X^{s+1}} dX,$$

а следовательно,

$$\frac{1}{s^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \int_1^{\infty} \left(\sum_{n \leq X} a_n \ln \frac{X}{n} \right) \frac{1}{X^{s+1}} dX.$$

Отсюда на полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$ имеем

$$\frac{1}{s^2} \left(\zeta \left(s + \frac{1}{2} \right) + \frac{\zeta'(s + 1/2)}{\zeta(s + 1/2)} \right) = \int_1^{\infty} \left(\sum_{n \leq X} \frac{1 - \Lambda(n)}{n^{1/2}} \ln \frac{X}{n} \right) \frac{1}{X^{s+1}} dX.$$

Так как

$$\sum_{n \leq X} (1 - \Lambda(n)) n^{-1/2} \ln \frac{X}{n} > 0$$

для всех $X > 1$ и

$$\left(\zeta \left(\sigma + \frac{1}{2} \right) + \frac{\zeta'(\sigma + 1/2)}{\zeta(\sigma + 1/2)} \right) \sigma^{-2}$$

не имеет полюсов на полупрямой $0 < \sigma < \infty$, а следовательно, функция

$$\int_1^{\infty} \left(\sum_{n \leq X} \frac{1 - \Lambda(n)}{n^{1/2}} \ln \frac{X}{n} \right) \frac{1}{X^{s+1}} dX$$

аналитична на полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Следовательно,

$$\left(\zeta \left(s + \frac{1}{2} \right) + \frac{\zeta'(s + 1/2)}{\zeta(s + 1/2)} \right) s^{-2}$$

не имеет полюсов на полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Отсюда следует гипотеза Римана.

В заключение автор выражает благодарность анонимному рецензенту за важные замечания и предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Grad. Texts in Math., **74**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [2] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [3] J. E. Littlewood, “Sur la distribution des nombres premiers”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **158** (1914), 1869–1872.
- [4] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Grundlehren Math. Wiss., **91**, Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [5] А. А. Карацуба, “О числе перемен знаков функции $R_1(x)$ и ее средних значениях”, *Чебышевский сб.*, **6**:2(14) (2005), 163–183.
- [6] А. А. Карацуба, “О приближении функции $\pi(x)$ ”, *Чебышевский сб.*, **5**:4(12) (2004), 5–20.

Г. Донадзе

Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии

E-mail: donad@rmi.acnet.ge, gdonad@gmail.com

Поступило

09.12.2010