Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Крупи, М. Ла Барбьера, Минимальные градуированные резольвенты обратнo-лекссегментных идеалов, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 383–399

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:28:04

Минимальные градуированные резольвенты обратно-лекссегментных идеалов

М. Крупи, М. Ла Барбьера

Пусть k – поле, и пусть $S = k[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами из поля k . Мы изучаем минимальные градуированные свободные S -резольвенты от начальных обратно-лекссегментных идеалов в S . Кроме того, мы исследуем все обратно-лекссегментные идеалы с линейной резольвентой.

Библиография: 11 названий.

Введение. Пусть $S = k[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов над полем k . Обозначим через M_d множество всех мономов степени d в S . Если $u, v \in M_d$ и $u \geq v$, то множество всех мономов $w \in S$ степени d , для которых $u \geq w \geq v$, называется *сегментом* относительно отношения порядка $<$. Если $<$ – обратный лексикографический порядок, то такой сегмент называется *обратно-лексикографическим сегментом* (коротко: *обратно-лекссегментом*) и обозначается через $\mathcal{R}(u, v)$. Идеал, порожденный каким-либо обратно-лексикографическим сегментом, называется *обратно-лекссегментным идеалом*. Пусть $u \in M_d$. *Начальный* обратно-лексикографический сегмент – это множество

$$\mathcal{R}^i(u) = \{w \in M_d : w \geq u\} = \mathcal{R}(x_1^d, u),$$

конечный обратно-лексикографический сегмент – это множество

$$\mathcal{R}^f(u) = \{w \in M_d : w \leq u\} = \mathcal{R}(u, x_n^d).$$

Начальный обратно-лекссегментный идеал I в S – это такой обратно-лекссегментный идеал I в S , что в каждой степени d , если $I_d \neq 0$, то I_d порождается как k -векторное пространство некоторым начальным обратным лексикографическим сегментом, а *конечный* обратно-лекссегментный идеал I в S – это такой обратно-лекссегментный идеал I в S , для которого в каждой степени d , если $I_d \neq 0$, то I_d порождается как k -векторное пространство некоторым конечным обратно-лекссегментом. Начальные обратно-лекссегментные идеалы были изучены Дири в работе [1].

Цель этой статьи состоит в том, чтобы рассмотреть минимальную градуированную свободную резольвенту обратно-лекссегментного идеала I в S . Более точно,

изучается поведение некоторых специальных градуированных чисел Бетти, связанных с этой резольвентой, так называемых *экстремальных чисел Бетти*, соответствующих начальным и конечным обратнo-лекссегментным идеалам. Такие градуированные числа Бетти были введены в работе Байера, Чараламбуса и Попеску [2] в качестве уточнения понятия регулярности по Кастельнуово–Мамфорду. Начальные и конечные обратнo-лекссегментные идеалы – это стабильные идеалы в S , порожденные элементами фиксированной степени d , и поэтому у них имеется линейная резольвента [3]. Это неверно для произвольных обратнo-лекссегментных идеалов. Поэтому мы рассматриваем все обратнo-лекссегментные идеалы, обладающие линейной резольвентой. Идея изучения такого класса мономиальных идеалов в S восходит к исследованию класса (произвольных) лекссегментных идеалов Халлетом и Мартином в [4] и Арамова, Де Негри и Херцогом в работах [5] и [6]. В последней работе авторы описывают все лекссегментные идеалы, обладающие линейной резольвентой. Хотя обратнo-лексикографический сегмент в S и можно рассматривать как лексикографический сегмент относительно подходящего лексикографического упорядочения на S , интересно выяснить, что изменяется при замене мономиального порядка на S на обратный лексикографический порядок, если стоит задача классификации всех обратнo-лекссегментных идеалов с линейной резольвентой.

Структура настоящей работы такова.

В п. 1 содержатся некоторые предварительные сведения и понятия, которые будут использованы в работе.

В п. 2 обсуждаются экстремальные числа Бетти начального обратнo-лекссегментного идеала I . Если

$$F.: 0 \rightarrow F_r \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow I \rightarrow 0$$

– единственная минимальная градуированная свободная резольвента идеала I над S , где $F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{ij}}$, градуированные числа Бетти $\beta_{p,p+l}(I) \neq 0$ называются *экстремальными*, если

$$\beta_{i,i+j}(I) = 0 \quad \text{при всех } i \geq p, \quad j \geq l, \quad (i, j) \neq (p, l).$$

Мы утверждаем, что у начального обратнo-лекссегментного идеала имеется единственное экстремальное число Бетти (предложение 2.3). Более того, для заданной пары целых положительных чисел (p, l) , $p, l \geq 2$, мы приводим условия существования начального обратнo-лекссегментного идеала I с экстремальными числами Бетти $\beta_{p,p+l}(I)$ в заданных позициях (предложение 2.6). Наконец, мы обсуждаем экстремальные числа Бетти конечного обратнo-лекссегментного идеала. Поскольку конечный обратнo-лекссегментный идеал в S может рассматриваться как начальный лекссегментный идеал в S для обратного упорядочения переменных, поведение экстремальных чисел Бетти конечного обратнo-лекссегментного идеала можно вывести из работ [7] и [8].

В пп. 3 и 4 мы рассматриваем произвольные обратнo-лекссегментные идеалы. Наша цель состоит в том, чтобы установить, когда минимальная свободная градуированная резольвента обратнo-лекссегментного идеала линейна. Эта задача уже отчасти изучалась в работе [9] для вполне обратнo-лекссегментных идеалов (определение 1.6). В этой работе мы завершаем классификацию всех обратнo-лекссегментных идеалов с линейной резольвентой, начатую в [9].

1. Предварительные сведения и обозначения. Пусть k – поле, и пусть $S = k[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами из поля k . Мы рассматриваем S как $\mathbb{N}$ -градуированное кольцо, в котором $\deg x_i = 1$. Обозначим через M_d множество всех мономов степени d в кольце многочленов S .

Пусть $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ и $x^b = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n}$ – два монома в S , $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$.

Обратный лексикографический порядок (или *revlex-порядок*) на мономах кольца S определяется так [10]:

$$x^a >_{\text{revlex}} x^b$$

тогда и только тогда, когда $\deg x^a > \deg x^b$ или $\deg x^a = \deg x^b$ и последняя ненулевая координата вектора

$$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$$

отрицательна.

Относительно этого порядка выполнена следующая цепочка соотношений:

$$x_1 >_{\text{revlex}} x_2 >_{\text{revlex}} \cdots >_{\text{revlex}} x_n.$$

Чтобы упростить обозначения, на протяжении всей работы мы будем обозначать обратный лексикографический порядок на S через $>$.

Для произвольного монома $1 \neq u \in S$ положим

$$\begin{aligned} \text{supp}(u) &= \{i : x_i \text{ делит } u\}, \\ M(u) &= \max\{i : x_i \text{ делит } u\}, \quad m(u) = \min\{i : x_i \text{ делит } u\}. \end{aligned}$$

Отметим, что если рассмотреть обратный лексикографический порядок на мономах кольца S , то получится, что

$$\begin{aligned} M(v) < M(u) &\implies v > u, \\ v \geq u &\implies M(u) \geq M(v). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $u, v \in M_d$. Определим *произвольный обратнo-лексикографический сегмент* (или, для краткости, *произвольный обратнo-лекссегмент*) степени d как множество

$$\mathcal{R}(u, v) = \{w \in M_d : u \geq w \geq v\}.$$

Начальным обратнo-лексикографическим сегментом называется множество

$$\mathcal{R}^i(u) = \{w \in M_d : w \geq u\},$$

а *конечным обратнo-лексикографическим сегментом* – множество

$$\mathcal{R}^f(u) = \{w \in M_d : w \leq u\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Градуированный идеал I в S называется *обратнo-лекссегментным идеалом*, если он порожден обратнo-лексикографическим сегментом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $N \subset M_d$. Множество $\{x_i u : u \in N, i = 1, \dots, n\} \subset M_{d+1}$ называется *тенью* множества N и обозначается через $\text{Shad}(N)$.

Определим i -ю тень индуктивно по правилу $\text{Shad}^i(N) = \text{Shad}(\text{Shad}^{i-1}(N))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Отметим, что если N – обратнo-лекссегмент степени d , то, вообще говоря, $\text{Shad}(N)$ не будет обратнo-лекссегментом степени $d + 1$ (см. [9]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Обратнo-лексикографический сегмент $\mathcal{R}$ называется *вполне обратнo-лексикографическим сегментом*, если все итерированные тени сегмента $\mathcal{R}$ суть обратнo-лексикографические сегменты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пусть I – градуированный идеал в S . Компонента градуировки идеала I называется *обратнo-лексикографическим сегментом*, если она порождена обратнo-лексикографическим сегментом как k -векторное пространство.

Идеал I называется *вполне обратнo-лекссегментным идеалом*, если все компоненты градуировки идеала I суть обратные лексикографические сегменты.

Если $u \in M_d$, то начальный обратнo-лекссегмент $\mathcal{R}^i(u)$ является вполне обратнo-лекссегментом тогда и только тогда, когда $x_{n-1}^d \geq u$, тогда как конечный обратнo-лекссегмент всегда является вполне обратнo-лекссегментом [9] (предложение 1.8 и предложение 1.10).

В работе [9] (теорема 3.1) классифицированы все вполне обратнo-лекссегментные идеалы.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ и $v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ – мономы степени d в S , $u \neq x_1^d$, $u \geq v$, и пусть I – идеал, порожденный $\mathcal{R}(u, v)$. Тогда I является вполне обратнo-лекссегментным идеалом в S тогда и только тогда, когда $b_n \neq 0$ и имеет место одно из следующих условий:

- (a) $u = x_1^{d-p} x_n^p$ и $v = x_{n-1}^{d-p} x_n^p$ для некоторого целого $0 < p \leq d$;
- (b) $a_n \neq b_n$, и для всякого $w > u$ существует такое число $i < n$, что $i \in \text{supp}(w)$ и $x_n w / x_i \geq v$.

Пусть теперь I – градуированный идеал в S . Пусть

$$F.: 0 \rightarrow F_r \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow I \rightarrow 0$$

– минимальная градуированная свободная резольвента идеала I над S , где $F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}}$. Числа $\beta_{i,j} = \beta_{i,j}(I)$ называются *градуированными числами Бетти* идеала I , тогда как $\beta_i = \sum_j \beta_{i,j}(I)$ называются *полными числами Бетти* идеала I . Имеется равенство

$$\beta_{i,j} = \dim_k \text{Tor}_i^S(k, I)_j.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Градуированное число Бетти $\beta_{p,p+l}(I) \neq 0$ называется *экстремальным*, если

$$\beta_{i,i+j}(I) = 0 \quad \text{при всех } i \geq p, \quad j \geq l, \quad (i, j) \neq (p, l).$$

Пара (p, l) называется *углом*.

Если градуированный идеал I порожден компонентой степени d , то мы будем говорить, что у I имеется линейная S -резольвента, если у него имеется минимальная градуированная свободная резольвента вида

$$0 \rightarrow S(-d-m)^{\beta_m} \rightarrow \cdots \rightarrow S(-d-1)^{\beta_1} \rightarrow S(-d)^{\beta_0} \rightarrow I \rightarrow 0.$$

Наконец, напомним, что мономиальный идеал I в S называется *стабильным*, если [3] выполнено следующее условие:

$$\text{при всех } u \in G(I) \text{ верно, что } (x_j u)/x_{M(u)} \in I \text{ для всех } j < M(u), \quad (1.1)$$

где $G(I)$ есть (единственное) наименьшее множество мономов, порождающих I .

У мономиальных идеалов $(\mathcal{R}^i(u))$ и $(\mathcal{R}^f(u))$ имеются линейные резольвенты [3], поскольку они являются стабильными идеалами, порожденными компонентой одной и той же степени d [1] (предложение 2.8).

2. Экстремальные числа Бетти начальных обратно-лекссегментных идеалов. В этом пункте мы обсудим экстремальные числа Бетти начальных обратно-лекссегментных идеалов.

Пусть $S = k[x_1, \dots, x_n]$, и пусть I – мономиальный идеал в S . Обозначим через $G(I)_d$ множество всех мономов $u \in G(I)$, для которых $\deg u = d$, и через $G(I)_{>d}$ множество всех таких мономов $u \in G(I)$, что $\deg u > d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Начальным обратно-лекссегментным идеалом I в S называется такой обратно-лекссегментный идеал в S , что в каждой степени d , для которой $I_d \neq 0$, компонента I_d порождена как k -векторное пространство некоторым начальным обратно-лексикографическим сегментом.*

ПРИМЕР 2.2. Пусть $S = k[x_1, x_2, x_3]$. Идеал

$$I = (x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, x_1 x_3^2, x_2 x_3^2, x_3^4)$$

является начальным обратно-лекссегментным идеалом в S .

Пусть I – градуированный идеал в S , и пусть

$$F.: 0 \rightarrow F_r \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow I \rightarrow 0$$

– минимальная градуированная свободная резольвента идеала I над S , где $F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{ij}}$.

В работах [7] и [8] рассматриваются экстремальные числа Бетти стабильных идеалов. В них доказано, что если $I \subset S = k[x_1, \dots, x_n]$ – стабильный идеал, то $\beta_{p,p+l}(I)$ является экстремальным числом Бетти тогда и только тогда, когда

$$p+1 = \max\{M(u) : u \in G(I)_l\}$$

и выполнено

$$M(u) \leq p \quad \text{при всех } j > l \quad \text{и при всех } u \in G(I)_j.$$

Более того, если $\beta_{p,p+l}(I)$ – экстремальное число Бетти идеала I , то

$$\beta_{p,p+l}(I) = |\{u \in G(I)_l : M(u) = p+1\}|.$$

Положим

$$l = \max\{j : G(I)_j \neq \emptyset\}, \quad m = \max\{M(u) : u \in G(I)\}.$$

Тогда имеет место следующее: $\beta_{m-1, m-1+l}(I)$ – единственное экстремальное число Бетти идеала I тогда и только тогда, когда

$$m = \max\{M(u) : u \in G(I)_l\}.$$

Следующий результат содержится в работе [8], но мы приведем его вместе с доказательством для полноты изложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть I – некоторый начальный обратнo-лекссегментный идеал в S . Тогда у I имеется единственное экстремальное число Бетти.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [1] (предложение 2.8) I – стабильный идеал. Пусть

$$p_1 = \max\{M(u) - 1 : u \in G(I)\},$$

$$l_1 = \max\{j : \text{существует } u \in G(I)_j, \text{ для которого } M(u) = p_1 + 1\}.$$

Следовательно, $\beta_{p_1, p_1+l_1}(I)$ является экстремальным числом Бетти, и

$$\beta_{p_1, p_1+l_1}(I) = |\{u \in G(I)_{l_1} : M(u) = p_1 + 1\}|.$$

Отметим, что $G(I)_{>l_1} = \emptyset$. Предположим, что существует $l > l_1$, для которого $G(I)_l \neq \emptyset$. Если u – наименьший моном из $G(I)_{l_1}$ относительно обратного лексикографического порядка, то $ux_n^{l-l_1}$ – наименьший моном, принадлежащий $\text{Shad}^{l-l_1}(I_{l_1})$. Из определения обратного лексикографического порядка вытекает, что для наибольшего монома w , превосходящего $ux_n^{l-l_1}$, верно, что $M(w) = n$, т.е. w обязан принадлежать множеству $G(I)_l$, так как I является начальным обратнo-лекссегментным идеалом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Согласно предложению 2.3 у всякого начального обратнo-лекссегментного идеала в S имеется единственное экстремальное число Бетти. Если $\beta_{p, p+l}(I)$ – такое экстремальное число Бетти, то

$$p + 1 = \max\{M(u) : u \in G(I)_l\} = \max\{M(u) : u \in G(I)\},$$

где $l = \max\{j : G(I)_j \neq \emptyset\}$.

Из [1] (следствие 2.13) известно, что если I является начальным обратнo-лекссегментным идеалом в S , то $x_{n-1}^l \in I_l$.

Рассмотрим два случая: $x_{n-1}^\mu \in G(I)$, где $\mu < l$, и $x_{n-1}^l \in G(I)$.

Предположим, что $x_{n-1}^\mu \in G(I)$ и $\mu < l$. Тогда для любого монома $w \in I_l$, не принадлежащего $\text{Shad}^{l-\mu}(I_\mu)$, верно, что $M(w) = n$. Поэтому $p + 1 = n$.

Предположим, что $x_{n-1}^l \in G(I)$. Если x_{n-1}^l – наименьший моном в $G(I)_l$, то $p + 1 = n - 1$. Иначе $p + 1 = n$.

Для заданной пары целых положительных чисел (l, p) и мономиального идеала I в S определим следующее множество:

$$I(l, p) = \{u \in G(I)_l : M(u) = p + 1\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть I – начальный обратнo-лекссегментный идеал в S , и пусть $\beta_{p, p+l}(I)$ – единственное экстремальное число Бетти идеала I .

(i) Если $I(l, n-1) = \emptyset$, то

$$1 \leq \beta_{p,p+l}(I) \leq \binom{n+l-3}{l-1},$$

где $\binom{n+l-3}{l-1}$ – это число всевозможных мономов $u \in S$ степени l , для которых $M(u) = p+1 = n-1$.

(ii) Если $I(l, n-1) \neq \emptyset$, то

$$1 \leq \beta_{p,p+l}(I) \leq \binom{n+l-2}{l-1},$$

где $\binom{n+l-2}{l-1}$ есть число всевозможных мономов $u \in S$ степени l , для которых $M(u) = p+1 = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что если $I(l, n-1) = \emptyset$ и $\beta_{p,p+l}(I)$ является экстремальным числом Бетти, то $x_{n-1}^l \in G(I)$, так что утверждение вытекает из замечания 2.4

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Для пары целых положительных чисел (p, l) , где $p \geq 2$ и $l \geq 2$, существование начального обратного-лекссегментного идеала $I \subset S$ с экстремальным числом Бетти $\beta_{p,p+l}(I) = a$ равносильно одному из следующих условий:

$$(i) \quad p+1 = n-1, \quad 1 \leq a \leq \binom{n+l-3}{l-1}.$$

$$(ii) \quad p+1 = n, \quad 1 \leq a \leq \binom{n+l-2}{l-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что I есть начальный обратного-лекссегментный идеал с экстремальным числом Бетти $\beta_{p,p+l}(I) = a$. Тогда выполнение условий (i) и (ii) вытекает из следствия 2.5.

Теперь предположим, что имеет место условие (i).

Пусть $a = \binom{n+l-3}{l-1}$. Построим обратного-лекссегментный идеал I в S , порожденный компонентой степени l , для которого $G(I) = \mathcal{R}(x_1^l, x_{n-1}^l)$.

Пусть $1 \leq a < \binom{n+l-3}{l-1}$. Пусть W – множество всех таких мономов $u \in M_l$, для которых $M(u) = n-1$. Положим

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}, \quad \text{где} \quad w_1 > w_2 > \dots > w_r = x_{n-1}^l$$

относительно обратного лексикографического порядка. При этом

$$r = |W| = \binom{n+l-3}{l-1}.$$

Построим начальный обратного-лекссегментный идеал I в S , порожденный в степенях $l-1$ и l , для которого $G(I) = A \cup B \cup C$, где A есть множество всех мономов степени $l-1$, начиная с x_1^{l-1} и заканчивая наибольшим мономом $\tilde{w}$ степени $l-1$, для которого $\tilde{w}x_{n-1} = w_{r-a}$; B состоит из всех таких мономов z степени l , что $z > w_{r-a+1}$ и z не делится на u ни для какого $u \in A$, а C состоит из a мономов $w_{r-a+1}, \dots, w_r$, т.е. $C = \mathcal{R}(w_{r-a+1}, w_r)$.

Предположим, что имеет место условие (ii).

Построим обратнo-лекссегментный идеал I в кольце S , порожденный компонентой степени l , где $G(I) = \mathcal{R}(x_1^l, x_{n-1}^l) \cup A$, множество A состоит из первых a мономов, следующих за x_{n-1}^l относительно обратного лексикографического порядка на S .

В завершение этого пункта обсудим экстремальные числа Бетти конечных обратнo-лекссегментных идеалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. *Конечный обратнo-лекссегментный идеал I в S – это такой обратнo-лекссегментный идеал в S , что в каждой степени d , для которой $I_d \neq 0$, компонента I_d порождена как k -векторное пространство некоторым конечным обратнo-лекссегментом.*

ПРИМЕР 2.8. Идеал $I = (x_1x_3^2, x_2x_3^2, x_3^3, x_2^3x_3)$ является конечным обратнo-лекссегментным идеалом в кольце $S = k[x_1, x_2, x_3]$.

Отметим, что если обратить порядок переменных в S , т.е. положить $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1$, то определение стабильного идеала, приведенное в п. 1, принимает следующий вид. Мономиальный идеал I в S *стабилен*, если

$$\text{при всех } u \in G(I) \text{ имеем } (x_j u)/x_{m(u)} \in I \text{ для всех } j > m(u). \quad (2.1)$$

Таким образом, результаты работ [7] и [8] относительно экстремальных чисел Бетти стабильных идеалов могут быть переформулированы путем замены $M(u)$ на $m(u)$. В частности, если $\beta_{p,p+l}(I)$ есть экстремальное число Бетти конечного обратнo-лекссегментного идеала I в S , то

$$\beta_{p,p+l}(I) = |\{u \in G(I)_l : m(u) = p+1\}|.$$

Более того, поскольку конечный обратнo-лекссегментный идеал I кольца S можно рассматривать как начальный лексикографический идеал в S относительно обратного порядка переменных, из [8] (теорема 3.2) следует, что у I имеется не более двух экстремальных чисел Бетти. Таким образом, поведение экстремальных чисел Бетти конечного обратнo-лекссегментного идеала может быть выведено из результатов работ [7] и [8].

3. Вполне обратнo-лекссегментные идеалы с линейной резольвентой.

В этом пункте мы описываем все вполне обратнo-лекссегментные идеалы, обладающие линейной резольвентой.

Напомним некоторые понятия и результаты из работ [5] и [9], которые будут нам полезны в дальнейшем.

Пусть $I = (\mathcal{R}(u, v))$ – обратнo-лекссегментный идеал в кольце $S = k[x_1, \dots, x_n]$, порожденный компонентой степени d , и $u \geq v$.

Положим $J = (\mathcal{R}^i(v))$ и $K = (\mathcal{R}^f(u))$. Пусть L – идеал в S , порожденный всеми мономами степени d в S . Тогда $L = J + K$. Идеал L можно представлять себе как конечный обратнo-лекссегментный идеал, т.е. $L = (\mathcal{R}^f(x_1^d))$ и, следовательно, L является стабильным идеалом [3] относительно лексикографического порядка, в котором $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1$. То же рассуждение можно провести для идеала $K = (\mathcal{R}^f(u))$. Более того, идеал $J = (\mathcal{R}^i(v))$ также является стабильным идеалом.

В частности, из существования резольвенты Элияху–Кервера следует, что у идеалов J , K , L имеются линейные резольвенты, т.е.

$$\mathrm{Tor}_i^S(k, S/J)_j = 0 \quad \text{при} \quad i > 0, \quad j \neq i + d - 1,$$

и аналогично для K и L . Здесь через $\mathrm{Tor}_i^S(k, S/J)_j$ обозначена j -я компонента градуировки модуля $\mathrm{Tor}_i^S(k, S/J)$.

Напомним, что для произвольного градуированного идеала D градуированное векторное пространство $\mathrm{Tor}_i^S(k, S/D)$ изоморфно i -м кошулевским гомологиям $H_i(\underline{x}; S/D)$, где $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$. Для упрощения обозначений назовем эту группу гомологий $T_i(D)$.

В [11] авторы описывают циклы, классы гомологий которых образуют базис пространства $T_i(D)$ в случае, когда D – стабильный идеал. Для описания этих циклов введем некоторые обозначения, которые пригодятся нам в дальнейшем.

При $w \in M_d$ положим

$$w' = w/x_{M(w)}, \quad w'' = w/x_{m(w)},$$

где

$$M(w) = \max\{i : x_i \text{ делит } w\} \quad \text{и} \quad m(w) = \min\{i : x_i \text{ делит } w\}.$$

Рассмотрим кошулеву алгебру как внешнюю алгебру k -векторного пространства с базисом $e_1, \dots, e_n$. Тогда у i -й компоненты комплекса Кошуля имеется базис

$$e_\sigma = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}, \quad \sigma = \{j_1, \dots, j_i\} \subset \{1, \dots, n\}, \quad j_1 < \dots < j_i,$$

а дифференциал d в комплексе Кошуля задается так:

$$d(e_\sigma) = \sum_{i \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, i)} x_i e_{\sigma \setminus i},$$

где $\alpha(\sigma, i) = |\{r \in \sigma : r < i\}|$. Из [11] следует, что циклы, классы гомологий которых образуют базис пространства $T_i(L)$, суть

$$w'' e_{m(w)} \wedge e_\sigma, \quad \text{где} \quad w \in M_d, \quad |\sigma| = i - 1, \quad m(w) < \min(\sigma).$$

Аналогичным образом, классы гомологий таких же циклов, но для $w \in K$, образуют базис в $T_i(K)$. Такие циклы называются *неклассическими* циклами [6].

Циклы, классы гомологий которых образуют базис пространства $T_i(J)$, – это

$$w' e_\sigma \wedge e_{M(w)}, \quad \text{где} \quad w \in \mathcal{R}^i(v), \quad |\sigma| = i - 1, \quad \max(\sigma) < M(w).$$

Такие циклы называются *классическими* циклами [6].

Далее, пусть L – идеал в S , порожденный всеми мономами степени d из S , $J = (\mathcal{R}^i(v))$ и $K = (\mathcal{R}^f(u))$. Точная последовательность S -модулей

$$0 \rightarrow R/J \cap K \rightarrow R/J \oplus R/K \rightarrow R/L \rightarrow 0$$

дает длинную точную последовательность

$$\dots \rightarrow T_{i+1}(L) \rightarrow T_i(J \cap K) \rightarrow T_i(J) \oplus T_i(K) \xrightarrow{\varphi} T_i(L) \rightarrow \dots \quad (3.1)$$

Поскольку $I = J \cap K$, а у J , K и L есть линейные резольвенты, из наличия этой последовательности следует, что у I есть линейная резольвента тогда и только тогда, когда отображения φ сюръективны при всех $i > 1$.

Кроме того, поскольку отображение φ переводит класс $[w''e_{m(w)} \wedge e_\sigma]$ в себя как элемент $T_i(L)$, нужно описать индуцированное отображение

$$\varphi': T_i(J) \rightarrow T_i(L)/T_i(K)$$

где $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi')$, а базис в $T_i(L)/T_i(K)$ задан как

$$W = \{[w''e_{m(w)} \wedge e_\sigma], w \in M_d, w > u\}.$$

С другой стороны, базис в $T_i(J)$ образован классами гомологий классических циклов. Поэтому для изучения образа $T_i(J)$ в $T_i(L)$ полезно уметь представлять классический цикл как линейную комбинацию неклассических циклов в $T_i(L)$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $[z'e_\sigma \wedge e_{M(z)}]$ – элемент базиса пространства $T_i(J)$.

(а) Если $\min(\sigma) \leq m(z)$, то

$$\varphi([z'e_\sigma \wedge e_{M(z)}]) = [(x_{\min(\sigma)}z')''e_{m(x_{\min(\sigma)}z')} \wedge e_{\sigma \setminus \min(\sigma)} \wedge e_{M(z)}].$$

(б) Если $\min(\sigma) > m(z)$, то

$$\varphi([z'e_\sigma \wedge e_{M(z)}]) = (-1)^{i-1}[z''e_{m(z)} \wedge e_\sigma] + \sum_{t \in \sigma} \pm[(x_t z')''e_{m(x_t z')} \wedge e_{\sigma \setminus t} \wedge e_{M(z)}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Если $\min(\sigma) \leq m(z)$, то $m(x_{\min(\sigma)}z') = \min(\sigma)$. Значит,

$$\begin{aligned} z'e_\sigma \wedge e_{M(z)} &= (x_{\min(\sigma)}z')''e_{\min(\sigma)} \wedge e_{\sigma \setminus \min(\sigma)} \wedge e_{M(z)} \\ &= (x_{\min(\sigma)}z')''e_{m(x_{\min(\sigma)}z')} \wedge e_{\sigma \setminus \min(\sigma)} \wedge e_{M(z)} \end{aligned}$$

– неклассический цикл в $T_i(L)$. Следовательно,

$$\varphi([z'e_\sigma \wedge e_{M(z)}]) = [(x_{\min(\sigma)}z')''e_{m(x_{\min(\sigma)}z')} \wedge e_{\sigma \setminus \min(\sigma)} \wedge e_{M(z)}].$$

(б) Если $\min(\sigma) > m(z)$, то дифференциал Кошуля d – это

$$\begin{aligned} d(z'/x_{m(z)}e_{m(z)} \wedge e_\sigma \wedge e_{M(z)}) \\ = z'e_\sigma \wedge e_{M(z)} + \sum_{t \in \sigma} \pm(x_t z')''e_{m(z)} \wedge e_{\sigma \setminus t} \wedge e_{M(z)} + (-1)^i z''e_{m(z)} \wedge e_\sigma. \end{aligned}$$

Отметим, что $\min(\sigma) > m(z)$, $m(x_t z') = m(z)$ для всех $t \in \sigma$. Тогда получаем, что

$$[z'e_\sigma \wedge e_{M(z)}] = \pm[(x_t z')''e_{m(x_t z')} \wedge e_{\sigma \setminus t} \wedge e_{M(z)}] + (-1)^{i-1}[z''e_{m(z)} \wedge e_\sigma].$$

Значит,

$$\varphi([z'e_\sigma \wedge e_{M(z)}]) = (-1)^{i-1}[z''e_{m(z)} \wedge e_\sigma] + \sum_{t \in \sigma} \pm[(x_t z')''e_{m(x_t z')} \wedge e_{\sigma \setminus t} \wedge e_{M(z)}].$$

Теперь мы готовы описать произвольные вполне обратнo-лекссегментные идеалы с линейной резольвентой.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ и $v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ – мономы степени d в S , $u \geq v$, и пусть I – вполне обратно-лекссегментный идеал, порожденный $\mathcal{R}(u, v)$. Идеал I обладает линейной резольвентой тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих условий:

- (1) $u = x_1^{d-p} x_n^p$ и $v = x_{n-1}^{d-p} x_n^p$ для некоторого целого $0 < p \leq d$;
- (2) $a_n = b_n - 1$, и для наименьшего $w > u$, $w \in M_d$, верно, что $x_n w / x_{m(w)} \geq v$;
- (3) $a_n < b_n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку I – вполне обратно-лекссегментный идеал, из теоремы 1.7 получаем, что $b_n \neq 0$ и $I = J \cap K$, где $J = (\mathcal{R}^i(v))$ и $K = (\mathcal{R}^f(u))$.

Предположим, что имеет место условие (1). Тогда у I имеется линейная резольвента согласно [9] (теорема 4.1, (2)).

Предположим, что имеет место условие (2). Если $a_n = b_n - 1$, то, как нетрудно проверить, при всех $w > u$ верно, что $x_n w / x_{m(w)} \geq v$. Поэтому согласно [9] (теорема 4.1, (3)) получается, что у I есть линейная резольвента.

Пусть имеет место условие (3). Если $w = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$ и $w > u$, то $c_n \leq a_n < b_n - 1$. Отсюда без труда получаем, что $x_n w / x_{m(w)} \geq v$, и согласно условию (2) у идеала I имеется линейная резольвента.

Остается доказать, что если не выполнено ни одно из условий (1), (2) и (3), то у I нет линейной резольвенты. Поскольку I является вполне обратно-лекссегментным идеалом, по теореме 1.7, если $a_n = b_n$, то имеет место условие (1). Поэтому мы предполагаем, что условие (1) не выполняется, т.е. что $a_n \neq b_n$.

Используя длинную точную последовательность (4.4), получаем, что у I есть линейная резольвента тогда и только тогда, когда отображение

$$\varphi: T_i(J) \oplus T_i(K) \rightarrow T_i(L)$$

сюръективно при $i \geq 3$ [11].

Напомним, что классы гомологий неклассических циклов $w'' e_{m(w)} \wedge e_\sigma$, где $w \leq u$, принадлежат образу φ .

Пусть $w \in \mathcal{R}^i(v) \setminus \mathcal{R}^f(u)$; тогда $w > u$. Дифференциал соответствующего цикла – это

$$\begin{aligned} d(w'' e_{m(w)} \wedge e_\sigma) &= \pm w'' x_{m(w)} e_\sigma - \sum_{t \in \sigma} \pm w'' x_t e_{m(w)} \wedge e_{\sigma \setminus t} \\ &= \pm w e_\sigma + \sum_{t \in \sigma} \pm w'' x_t e_{m(w)} \wedge e_{\sigma \setminus t}. \end{aligned}$$

Предположим, что $\max(\sigma) \neq n$. Тогда $w'' x_t \in J$. Действительно, если $w = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$, из $w > u$ следует, что $c_n \leq a_n < b_n$. Тогда $[w'' e_{m(w)} \wedge e_\sigma] \in T_i(J)$. Поэтому циклы $w'' e_{m(w)} \wedge e_\sigma$, где $w > u$, принадлежат образу φ .

Пусть U – k -векторное подпространство в $T_i(L)$, порожденное классами $[w'' e_{m(w)} \wedge e_\sigma]$ для всех $w \in M_d$, для которых $\max(\sigma) \leq n - 1$, и классами $[w'' e_{m(w)} \wedge e_\tau \wedge e_n]$, где $w \leq u$. Отображение φ сюръективно тогда и только тогда, когда сюръективен индуцированный гомоморфизм

$$\bar{\varphi}: T_i(J) \rightarrow T_i(L)/U.$$

Базис пространства $T_i(L)/U$ состоит из классов гомологий неклассических циклов $w'' e_{m(w)} \wedge e_\tau \wedge e_n$ при $w > u$.

Теперь предположим, что условия (2) и (3) не выполнены, т.е. $a_n = b_n - 1$ и для наименьшего $w > u$ верно, что $x_n w'' < v$. Поскольку идеал I вполне обратнo-лекссегментный, по теореме 1.7 (b) существует такое число t , что $t \in \text{supp}(w)$ и $x_n w/x_t \geq v$. Положим

$$\tau = \{t \in \text{supp}(w) \mid t < n, x_n w/x_t \geq v\}.$$

Тогда для всех $t \in \tau$ имеем $t > m(w)$, поскольку по предположению $x_n w'' < v$. Таким образом, $[w'' e_{m(w)} \wedge e_\tau \wedge e_n]$ есть базисный элемент в $T_i(L)/U$ при некотором i . Для классического цикла $z' e_\rho \wedge e_{M(z)}$ положим

$$B(z, \rho) = \begin{cases} \{\min(\rho)\}, & \text{если } \min(\rho) \leq m(z), \\ \{t \in \rho : x_t z' > u\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Применяя лемму 3.1, получаем, что

$$\overline{\varphi}([z' e_\rho \wedge e_{M(z)}]) = \sum_{t \in B(z, \rho)} \pm [(x_t z')'' e_{m(z)} \wedge e_{\rho \setminus t} \wedge e_{M(z)}],$$

поскольку $[z'' e_{m(z)} \wedge e_\rho] \in U$. Если $\overline{\varphi}([z' e_\rho \wedge e_{M(z)}]) \neq 0$, то $M(z) = n$. Предположим, что $[w'' e_{m(w)} \wedge e_\tau \wedge e_n] \in \text{Im } \overline{\varphi}$; тогда существует классический цикл $z' e_\rho \wedge e_{M(z)}$, для которого $M(z) = n$ и

$$(x_t z')'' e_{m(z)} \wedge e_{\rho \setminus t} \wedge e_n = w'' e_{m(w)} \wedge e_\tau \wedge e_n$$

при некотором $t \in \rho$. Тогда $\rho \setminus t = \tau$ и $m(z) = m(w)$, так что $z = x_n w/x_t$ и в силу предположения $x_n w/x_t \geq v$. Это противоречит тому, что $t \notin \tau$. Значит, $\overline{\varphi}$ не сюръективен, т.е. у I нет линейной резольвенты.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $u \geq v$ – мономы в M_d , для которых $u \neq x_1^d$ и $v \neq x_n^d$. Пусть $I = (\mathcal{R}(u, v))$, $J = (\mathcal{R}^i(v))$ и $K = (\mathcal{R}^f(u))$.

У идеала $J \cap K$ есть линейная резольвента тогда и только тогда, когда имеют место условия (1), (2) или (3) теоремы 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если у $J \cap K$ есть линейная резольвента, то этот идеал порожден компонентой степени d . Значит, $J \cap K = I$ ([7]). Это эквивалентно тому, что I – вполне обратнo-лекссегментный идеал в силу [9]. В этом случае у $J \cap K = I$ есть линейная резольвента тогда и только тогда, когда I является вполне обратнo-лекссегментным идеалом. Значит, у $J \cap K$ есть линейная резольвента тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий (1), (2) или (3) теоремы 3.2

4. Обратнo-лекссегментные идеалы с линейной резольвентой. В этом пункте мы описываем процедуру, позволяющую определить, обладает ли обратнo-лекссегментный идеал линейной резольвентой. Начнем с некоторых замечаний.

Пусть $I = (\mathcal{R}(u, v))$, где $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ и $v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ – мономы степени d .

Если $u = v$, то у I есть линейная резольвента. Поэтому можно считать, что $u > v$.

Если I – вполне обратнo-лекссегментный идеал, то теорема 3.2 указывает, когда у I есть линейная резольвента.

Если I не является вполне обратнo-лекссегментным идеалом, то пусть $m \leq n$ таковы, что $a_m < b_m$ и $a_i = b_i$ при $i = m+1, \dots, n$. Положим $f = x_m^{a_m} x_{m+1}^{b_{m+1}} \cdots x_n^{b_n}$ и обозначим через $\tilde{I}$ идеал в $k[x_1, \dots, x_m]$, порожденный $\mathcal{R}(u/f, v/f)$. Тогда

$$u/f = x_1^{a_1} \cdots x_{m-1}^{a_{m-1}} > v/f = x_1^{b_1} \cdots x_m^{b_m - a_m}.$$

Ясно, что у I имеется линейная резольвента тогда и только тогда, когда линейная резольвента имеется у $\tilde{I}$.

Если $\tilde{I}$ – вполне обратно-лекссегментный идеал, то, вновь применяя теорему 3.2, можно выяснить, имеет ли $\tilde{I}$ линейную резольвенту. Если $\tilde{I}$ – не вполне обратно-лекссегментный идеал, то для установления того, есть ли у $\tilde{I}$ линейная резольвента, нам понадобятся результаты, которые будут приведены ниже.

Приведем следующий результат из работы [9] (теорема 2.6).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $u \geq v$ – два монома из M_d . Если

- a) $n \in \text{supp}(v)$,
- b) $u/x_{M(u)} \geq v/x_n$,

то $\text{Shad}(\mathcal{R}(u, v))$ также является обратным лекссегментом. Более того, $(\mathcal{R}(u, v))$ является вполне обратно-лекссегментным идеалом.

ЛЕММА 4.2. Пусть $u = x_1^{a_1} \dots x_{n-1}^{a_{n-1}}$ и $v = x_1^{b_1} \dots x_{n-1}^{b_{n-1}} x_n$ – мономы из M_d . Пусть $J = x_n(\mathcal{R}^i(v'))$ и $K = (\mathcal{R}(u, x_{n-1}^d))$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- (1) у идеала $(\mathcal{R}(u, v))$ есть линейная резольвента тогда и только тогда, когда у идеала, порожденного множеством $\text{Shad}(\mathcal{R}^i(v')) \cap \mathcal{R}^f(u)$ в $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$, есть линейная резольвента и $J \cap K$ порожден компонентой степени $d+1$;
- (2) если I – не вполне обратно-лекссегментный идеал и $(J \cap K)_{d+1} \neq 0$, то $b_{n-1} = 0$ и $a_{n-1} \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Во-первых, заметим, что $I = J + K$. Тогда имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow R/J \cap K \rightarrow R/J \oplus R/K \rightarrow R/I \rightarrow 0,$$

которая определяет следующую длинную точную последовательность:

$$\dots \rightarrow T_{i+1}(I) \rightarrow T_i(J \cap K) \rightarrow T_i(J) \oplus T_i(K) \rightarrow T_i(I) \rightarrow \dots$$

Поскольку идеал $J = x_n(\mathcal{R}^i(v'))$, где $v' = v/x_{M(v)}$, обладает линейной резольвентой, то $T_i(J)_j = 0$ при $j \neq i + d - 1$.

С другой стороны, у $K = (\mathcal{R}(u, x_{n-1}^d))$ также есть линейная резольвента, поскольку множество его образующих $\mathcal{R}(u, x_{n-1}^d)$, рассматриваемое как подмножество кольца многочленов $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$, есть конечный обратно-лекссегмент степени d . Значит, K – стабильный идеал, порожденный компонентой степени d , а следовательно, он обладает линейной резольвентой.

Таким образом, поскольку $(J \cap K)_d = 0$, из вышеприведенной последовательности получается, что у I есть линейная резольвента тогда и только тогда, когда у идеала $J \cap K$ есть линейная резольвента и при этом $(J \cap K)_{d+1} \neq 0$.

Отметим, что

$$J \cap K = x_n((\mathcal{R}^i(v')) \cap (\mathcal{R}(u, x_{n-1}^d))). \quad (4.1)$$

Действительно, пусть w – моном, принадлежащий $J \cap K$, тогда $w = x_n p u = q z$, где $y \in \mathcal{R}^i(v')$, $z \in \mathcal{R}(u, x_{n-1}^d)$ и p, q – мономы.

Поскольку $n \notin \text{supp}(z)$, то $n \in \text{supp}(q)$ и поэтому $w \in x_n((\mathcal{R}^i(v')) \cap (\mathcal{R}(u, x_{n-1}^d)))$.

С другой стороны, нетрудно проверить, что

$$x_n((\mathcal{R}^i(v')) \cap (\mathcal{R}(u, x_{n-1}^d))) \subseteq J \cap K.$$

Из равенства (4.1) следует, что $(J \cap K)_{d+1} \neq 0$ порожден множеством $x_n A$, где

$$A = \text{Shad}(\mathcal{R}^i(v')) \cap \mathcal{R}^f(u) \subset k[x_1, \dots, x_{n-1}].$$

Так мы получаем (1).

(2) Сначала докажем, что $u \geq x_{n-1}v'$ и, следовательно, $a_{n-1} \leq 1$.

Поскольку $(J \cap K)_{d+1} \neq 0$, имеем $A \neq \emptyset$, откуда следует, что существует моном

$$z \in \text{Shad}(\mathcal{R}^i(v')) \cap \mathcal{R}^f(u).$$

Значит, $z = x_j w$, где $w \geq v'$ и $j \in \text{supp}(z)$, и при этом $z \leq u$. Следовательно,

$$v' \leq w = z/x_j \implies x_j v' \leq z \implies x_{n-1} v' \leq x_j v' \leq z \leq u.$$

Предположим, что $b_{n-1} \geq 1$. Мы покажем, что I удовлетворяет условию (b) теоремы 4.1, откуда будет следовать, что I – вполне обратно-лекссегментный идеал.

Пусть $w > u$ – произвольный моном степени d . Если $M(w) = n - 1$, то $M(u) = n - 1$. Значит,

$$w > u \geq x_{n-1}v' \implies w/x_{n-1} > u/x_{n-1} \geq v' = v/x_n \implies x_n w/x_{M(w)} > v.$$

Если $M(w) < n - 1$, то, поскольку $M(v') = n$, получаем, что $w' > v'$, а значит, $x_n w/x_{M(w)} > v$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $u = x_1^{d-1} x_l$ и $v = x_1^{b_1} \cdots x_{l-1}^{b_{l-1}} x_n$ – мономы в M_d , где $1 \leq l \leq n - 1$. Тогда $I = (\mathcal{R}(u, v))$ имеет линейную резольвента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J = x_n(\mathcal{R}^i(v'))$ и $K = (\mathcal{R}(u, x_{n-1}^d))$. В лемме 4.2 было доказано, что $J \cap K = x_n((\mathcal{R}^i(v')) \cap (\mathcal{R}(u, x_{n-1}^d)))$. Значит, у идеала $J \cap K$ есть линейная резольвента тогда и только тогда, когда у идеала $\mathcal{R} = (\mathcal{R}^i(v')) \cap (\mathcal{R}^f(u))$ как у идеала в кольце $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ есть линейная резольвента.

Во-первых, покажем, что

$$\mathcal{R} = x_l(\mathcal{R}^i(v')) + x_{l+1}(\mathcal{R}^i(v')) + \cdots + x_{n-1}(\mathcal{R}^i(v')) = \sum_{t=l}^{n-1} x_t(\mathcal{R}^i(v')).$$

Рассмотрим какой-либо моном $w \in \mathcal{R}$. Тогда $w = py = qz$, $y \in \mathcal{R}^i(v')$, $z \in \mathcal{R}^f(u)$, p, q – некоторые мономы.

Поскольку $z \leq u$, имеем неравенства $n - 1 \geq M(z) \geq l = M(u)$. Значит, моном $x_{M(z)}$ не делит монома y . Тогда $x_{M(z)}$ делит моном p . Поэтому $w = py \in x_{M(z)}(\mathcal{R}^i(v'))$, а значит,

$$\mathcal{R} \subseteq \sum_{t=l}^{n-1} x_t(\mathcal{R}^i(v')).$$

Обратно, пусть w – моном в $x_m(\mathcal{R}^i(v'))$ для некоторого $l \leq m \leq n - 1$. Тогда $w = x_m p y$, $y \in \mathcal{R}^i(v')$, и, следовательно, $w = x_m z q$, $z \in M_{d-1}$. Из $x_l z > x_m z$ получаем, что $u = x_1^{d-1} x_l > x_l z > x_m z$. Значит, $x_m z \in \mathcal{R}^f(u)$ и $w \in \mathcal{R}$.

Осталось показать, что у идеала $\mathcal{R} = \sum_{t=l}^{n-1} x_t(\mathcal{R}^i(v'))$ есть линейная резольвента.

Это так, если $l = n - 1$, поскольку у $(\mathcal{R}^i(v'))$ есть линейная резольвента.

Поскольку

$$(x_l(\mathcal{R}^i(v')) + x_{l+1}(\mathcal{R}^i(v')) + \cdots + x_m(\mathcal{R}^i(v'))) \cap x_{m+1}(\mathcal{R}^i(v')) \\ = x_l x_{m+1}(\mathcal{R}^i(v')) + \cdots + x_m x_{m+1}(\mathcal{R}^i(v')),$$

при $l \leq m \leq n-2$, при помощи индукции по l можно показать, действуя аналогично доказательству леммы 4.2, что у $\mathcal{R}$ имеется линейная резольвента.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $u = x_1^{a_1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}}$ и $v = x_1^{b_1} \cdots x_{n-1}^{b_{n-1}} x_n^{b_n}$ — мономы степени d в кольце S , где $b_n \neq 0$. Предположим, что идеал $I = (\mathcal{R}(u, v))$ не является вполне обратно-лекссегментным. У идеала I есть линейная резольвента тогда и только тогда, когда u и v имеют вид

$$u = x_1^{d-1} x_l \quad u \quad v = x_1^{b_1} \cdots x_{l-1}^{b_{l-1}} x_n$$

для некоторого l , $1 \leq l \leq n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку I не является вполне обратно-лекссегментным, согласно теореме 4.1 $u/x_{M(u)} < v/x_n$. Следовательно, $b_n = 1$. Действительно, из $u/x_{M(u)} < v/x_n$ следует, что

$$u/x_{M(u)} = x_1^{a_1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}-1} < v/x_n = x_1^{b_1} \cdots x_{n-1}^{b_{n-1}} x_n^{b_n-1}.$$

По лемме 4.2 достаточно показать, что если $u = x_1^{a_1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}}$, $v = x_1^{b_1} \cdots x_{n-1}^{b_{n-1}} x_n$ и у идеала $I = (\mathcal{R}(u, v))$ есть линейная резольвента, то $u = x_1^{d-1} x_l$ и $v = x_1^{b_1} \cdots x_{l-1}^{b_{l-1}} x_n$ для некоторого $1 \leq l \leq n-1$.

Имеет место равенство

$$I = J + K, \quad \text{где} \quad J = x_n(\mathcal{R}^i(v')), \quad K = (\mathcal{R}(u, x_n^d)).$$

Поскольку у I есть линейная резольвента в силу леммы 4.2, то $b_{n-1} = 0$ и $a_{n-1} \leq 1$, т.е.

$$u = x_1^{a_1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}}, \quad a_{n-1} \in \{0, 1\}, \quad \text{и} \quad v = x_1^{b_1} \cdots x_{n-2}^{b_{n-2}} x_n.$$

Возможны два случая: $a_{n-1} = 1$ и $a_{n-1} = 0$.

Пусть $a_{n-1} = 1$. Докажем, что

$$u = x_1^{a_1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}} = x_1^{d-1} x_{n-1}.$$

Сначала покажем, что в кольце $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ имеется равенство $\text{Shad}(\mathcal{R}^i(v')) \cap \mathcal{R}^f(u) = \mathcal{R}(u, v'x_{n-1})$.

Пусть $z \in \mathcal{R}(u, v'x_{n-1})$; тогда $u \geq z \geq v'x_{n-1}$. Значит, $z = x_1^{c_1} \cdots x_{n-2}^{c_{n-2}} x_{n-1}$ и, следовательно, $z \in \mathcal{R}^f(u) \cap \text{Shad}(\mathcal{R}^i(v'))$.

Обратно, пусть z — моном из $\mathcal{R}^f(u) \cap \text{Shad}(\mathcal{R}^i(v'))$. Значит, $u \geq z \geq x_{n-1}^d$ и $z = x_j w$, $j \in \text{supp}(z)$ и $w \geq v'$. Наконец, $u \geq z = x_j w \geq x_j v' \geq x_{n-1} v'$, и поэтому $z \in \mathcal{R}(u, v'x_{n-1})$.

В лемме 4.2 было доказано, что $(J \cap K)_{d+1}$ порожден множеством

$$x_n(\text{Shad}(\mathcal{R}^i(v')) \cap \mathcal{R}^f(u)) = x_n(\mathcal{R}(u, v'x_{n-1})).$$

Тогда, поскольку у I имеется линейная резольвента, получаем, что $\mathcal{R}(u, v'x_{n-1}) \neq \emptyset$ и поэтому $u \geq v'x_{n-1}$.

Мы покажем, что если $u \neq x_1^{d-1}x_{n-1}$, то у $J \cap K$ есть образующий элемент степени $d+2$, и в силу леммы 4.2 это приведет нас к противоречию.

Положим $l = M(u')$ и $p = M(v')$. Поскольку $u \geq v'x_{n-1}$, то $M(u') \leq M(v')$, $l \leq p$ и $n-2 \leq l \leq p < n-1$.

Возьмем $z = x_{n-1}u/x_l$. Получаем, что

$$z < v'x_{n-1} \leq u \quad \text{и} \quad x_1z/x_{n-1}^2 > u' \geq v'. \quad (4.2)$$

Действительно,

$$v'x_{n-1} = x_1^{b_1} \cdots x_{n-2}^{b_{n-2}} x_{n-1} > z = x_1^{a_1} \cdots x_{n-2}^{a_{n-2}} x_{n-1}^2/x_l. \quad (4.3)$$

Поэтому $x_1x_nz \in (J \cap K)_{d+2}$. В самом деле, из того, что $u \geq z \geq x_{n-1}^d$, следует то, что $z \in K = (\mathcal{R}(u, x_{n-1}^d))$. С другой стороны, $x_1z > v'x_{n-1}^2$. Значит, $x_1z \in (\mathcal{R}^i(v'))$ и $x_1x_nz \in J = x_n(\mathcal{R}^i(v'))$. Следовательно, $z \in (J \cap K)_{d+2}$.

Предположим, что $x_1z \in \text{Shad}(\mathcal{R}(u, v'x_{n-1}))$. Тогда $x_1z = x_ty$, $u \geq y \geq v'x_{n-1}$, $1 \leq t \leq n-1$.

Отметим, что если $t = n-1$, то из (4.2) получается, что

$$y = x_1z/x_{n-1} > u'x_{n-1} = u.$$

Если $t < n-1$, из (4.3) заключаем, что $y < v'x_{n-1}$. Значит, в обоих случаях получается противоречие. Наконец, x_1x_nz является образующим элементом идеала $J \cap K$ степени $d+2$.

Пусть $a_{n-1} = 0$. Положим $l = M(u')$ и $p = M(v')$; тогда

$$u = x_1^{a_1} \cdots x_l^{a_l}, \quad v = x_1^{b_1} \cdots x_p^{b_p} x_n, \quad \text{где} \quad l \leq n-2.$$

Поскольку I не вполне обратно-лекссегментный, по теореме 4.1 заключаем, что $u/x_{M(u)} < v/x_n$. Следовательно, $M(v') < M(u')$, т.е. $p \leq l \leq n-2$. Рассмотрим идеал $Q = (\mathcal{R}(u, v))$ в кольце многочленов $k[x_1, \dots, x_{l-1}, x_l, x_n]$. Идеал I является вполне обратно-лекссегментным тогда и только тогда, когда идеал Q вполне обратно-лекссегментный. Действительно, $\text{supp}(u) \subset \{1, \dots, l\}$; тогда для всех мономов $w \in S$, для которых $w > u$, получаем, что $\text{supp}(w) \subset \{1, \dots, l\}$. Значит, условие (b) теоремы 1.7 имеет место для Q тогда и только тогда, когда оно имеет место для I . Поскольку идеал I не вполне обратно-лекссегментный, то и Q не вполне обратно-лекссегментный. Идеал Q есть обратно-лекссегментный идеал $(\mathcal{R}(u, v))$, где u и v имеют вид $u = x_1^{a_1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}}$ и $v = x_1^{b_1} \cdots x_{n-1}^{b_{n-1}} x_n$ в кольце многочленов $k[x_1, \dots, x_{l-1}, x_l, x_n]$. Поскольку $a_l \neq 0$, аналогично первому случаю заключаем, что если у Q есть линейная резольвента, то $u = x_1^{d-1}x_l$ и $v = x_1^{b_1} \cdots x_{l-1}^{b_{l-1}} x_n$. Для завершения доказательства покажем, что если у I есть линейная резольвента, то она есть и у Q . Положим $P = (\mathcal{R}(x_1^{d-1}x_{l-1}, x_{n-1}^d))$ в кольце $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Далее, пусть $\bar{Q}$ и $\bar{P}$ суть образы Q и P соответственно при подъеме в кольцо S . Отметим, что $I = \bar{P} + \bar{Q}$. Теперь достаточно показать, что если у I есть линейная резольвента, то и у $\bar{Q}$ есть линейная резольвента. Поскольку $I = \bar{P} + \bar{Q}$, то при всех $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ можно рассмотреть длинную точную последовательность k -векторных пространств

$$\cdots \rightarrow T_i(\bar{P} \cap \bar{Q})_a \rightarrow T_i(\bar{P})_a \oplus T_i(\bar{Q})_a \xrightarrow{\varphi} T_i(I)_a \rightarrow \cdots, \quad (4.4)$$

где через a обозначена a -я градуированная компонента соответствующего векторного пространства. Далее, предположим, что у I имеется линейная резольвента, а у $\overline{Q}$ линейной резольвенты нет. Тогда существует такое целое число i и такое $a \in \mathbb{Z}^n$, что

$$T_i(\overline{Q})_a \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n a_j > d - i + 1.$$

Идеал $\overline{Q}$ порожден элементами из кольца многочленов $k[x_1, \dots, x_{l-1}, x_l, x_n]$, поэтому $T_i(\overline{Q})_c = 0$, если $c_j \neq 0$ при некотором j , $l+1 \leq j \leq n-1$. Следовательно, $a_j = 0$ при $j = l+1, \dots, n-1$. Более того, одна из переменных $x_{l+1}, \dots, x_{n-1}$ принадлежит носителям всех образующих идеалов $\overline{Q}$ и $\overline{P} \cap \overline{Q}$. Следовательно, c -я компонента градуировки пространства T_i равна нулю при всех $c \in \mathbb{Z}^n$, где $c_j = 0$ при $j = l+1, \dots, n-1$. В частности, a -я компонента градуировки всех этих пространств T_i равна нулю. Значит, $T_i(I)_a \cong T_i(\overline{Q})_a = 0$, поскольку у идеала $\overline{Q}$ нет линейной резольвенты. Но $T_i(I)_a \neq 0$; мы приходим к противоречию, поскольку в силу предположения у идеала I есть линейная резольвента.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Deery, “Rev-lex segment ideals and minimal Betti numbers”, *The Curves Seminar at Queen’s*, Vol. X, Queen’s Papers in Pure and Appl. Math., **102**, Queen’s Univ., Kingston, ON, 1996, 193–219.
- [2] D. Bayer, H. Charalambous, S. Popescu, “Extremal Betti numbers and applications to monomial ideals”, *J. Algebra*, **221**:2 (1999), 497–512.
- [3] S. Eliahou, M. Kervaire, “Minimal resolutions of some monomial ideals”, *J. Algebra*, **129**:1 (1990), 1–25.
- [4] H. Hulett, H. M. Martin, “Betti numbers of lex-segment ideals”, *J. Algebra*, **275**:2 (2004), 629–638.
- [5] A. Aramova, E. De Negri, J. Herzog, “Lexsegment ideals with linear resolution”, *Illinois J. Math.*, **42**:3 (1998), 509–523.
- [6] E. De Negri, J. Herzog, “Completely lexsegment ideals”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:12 (1998), 3467–3473.
- [7] M. Crupi, R. Utano, “Extremal Betti numbers of lexsegment ideals”, *Geometric and Combinatorial Aspects of Commutative Algebra*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **217**, Dekker, New York, 2001, 159–164.
- [8] M. Crupi, R. Utano, “Extremal Betti numbers of graded ideals”, *Results Math.*, **43**:3-4 (2003), 235–244.
- [9] М. Крупн, М. Ла Барбьера, “Идеалы, порожденные обратно-лексикографическими сегментами”, *Матем. заметки*, **89**:1 (2011), 53–69.
- [10] D. Eisenbud, *Commutative Algebra*, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [11] A. Aramova, J. Herzog, “Almost regular sequences and Betti numbers”, *Amer. J. Math.*, **122**:4 (2000), 689–719.

М. Крупн

University of Messina, Италия

E-mail: mcrupi@unime.it

Поступило

20.09.2010

М. Ла Барбьера

University of Messina, Италия

E-mail: monicalb@libero.it