Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Наджафизаде, А. М. Агдам, Ф. Карими, Об идеалах колец без кручения ранга 1 и 2, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 432–439

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:39:05

Об идеалах колец без кручения ранга 1 и 2

А. Наджафизаде, А. М. Агдам, Ф. Карими

Пусть A – абелева группа без кручения ранга 1 или 2. Получены необходимые и достаточные условия на множество типов группы A , при которых подгруппа группы A является идеалом в любом кольце с аддитивной группой A .
Библиография: 6 названий.

1. Введение. Здесь рассматриваются только абелевы группы с операцией сложения. Для данной абелевой группы A мы называем R *кольцом* над A , если группа A изоморфна аддитивной группе кольца R . В такой ситуации мы пишем $R = (A, *)$, где $*$ обозначает умножение в кольце. Это умножение не предполагается ассоциативным. Каждую группу можно превратить в кольцо тривиальным образом, полагая все произведения равными нулю; такое кольцо называется *нуль-кольцом*. Если это единственное умножение над группой A , то мы называем A *нуль-группой*. Фред [1] охарактеризовал подгруппы абелевой группы, которые являются идеалами в любом кольце. Страттон [2] изучил множество типов абелевой группы без кручения ранга 2, на которой существует нетривиальная структура кольца, и классифицировал все возможные множества типов таких групп. Агдам [3] использовал классификацию Страттона, чтобы описать кольца над группами без кручения ранга 2. Мы используем множество типов и кольца над абелевой группой без кручения ранга 2 A для характеристики подгрупп группы A , которые являются идеалами в каждом кольце над A .

2. Обозначения и предварительные сведения. Пусть A – абелева группа без кручения. Для данного простого числа p $h_p^A(x)$ обозначает p -*высоту* элемента x , т.е. наибольшее целое k , для которого p^k делит x в группе A ; если такого максимального целого нет, то мы полагаем $h_p^A(x) = \infty$. Пусть $p_1, p_2, \dots$ – возрастающая последовательность всех простых чисел. Тогда последовательность

$$\chi_A(x) = (h_{p_1}^A(x), h_{p_2}^A(x), \dots, h_{p_n}^A(x), \dots)$$

называется *последовательностью высот* элемента x . Мы не пишем индекс A , когда ясно, о какой группе идет речь. Для любых двух последовательностей высот $\chi = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$ и $\mu = (l_1, l_2, \dots, l_n, \dots)$ мы полагаем $\chi \geq \mu$, если $k_n \geq l_n$ для всех n . Последовательности χ и μ считаются эквивалентными, если сумма $\sum_n |k_n - l_n|$ конечна (мы считаем, что $\infty - \infty = 0$). Класс эквивалентности последовательности высот называется *типом*. Если $\chi(x)$ принадлежит типу $\mathbf{t}$, то мы

говорим, что элемент x имеет тип $\mathbf{t}$. Произведение двух последовательностей высот $\chi = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$ и $\chi_1 = (l_1, l_2, \dots, l_n, \dots)$ определяется как

$$\chi\chi_1 = (k_1 + l_1, k_2 + l_2, \dots, k_n + l_n, \dots),$$

где ∞ плюс что угодно, естественно, считается равным ∞ . Последовательность высот χ идемпотентна (т.е. $\chi^2 = \chi$), в точности когда для любого n либо $k_n = 0$, либо $k_n = \infty$. Умножение согласовано с определенным выше отношением эквивалентности, поэтому можно говорить о произведении tt_1 типов t и t_1 и об идемпотентных типах ($t^2 = t$). Для двух типов t_1 и t_2 мы пишем $t_1 \leq t_2$, если существуют последовательности высот $\chi \in t_1$ и $\mu \in t_2$, для которых $\chi \leq \mu$. Через $T(A)$ мы обозначаем частично упорядоченное множество типов $t(x)$, $x \in A \setminus 0$. Группа без кручения A , в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$, называется *однородной*. Например, любая группа A ранга 1 однородна. Мы используем обозначение $t(A)$ для множества типов группы A ранга 1, которое содержит единственный элемент – тип любого ненулевого элемента группы A . Кроме того, для любого типа $t \in T(A)$ мы определяем вполне инвариантную чистую подгруппу $A(t)$ группы A как

$$A(t) = \{a \in A \mid t(a) \geq t\}.$$

Наконец, чистую подгруппу группы A , порожденную элементом x , мы обозначаем через $\langle x \rangle_*$. (В [4; с. 109] указано, где можно найти основные факты о типах, а также определения понятий, которые не были определены выше.)

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть A – группа ранга 2 без кручения. Если A не является ниль-группой, то множество $T(A)$ содержит не более трех элементов, причем среди них есть единственный минимальный элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2; теорема 3.3].

Наши рассуждения в основном основываются на рассмотрении следующих случаев, которые, как вытекает из доказательства теоремы 2.1, исчерпывают все возможности для множеств типов абелевой группы без кручения, не являющейся ниль-группой:

- (а) один тип, причем этот тип обязан быть идемпотентным;
 - (б) два типа, причем один из них минимален, а другой максимален;
 - (с) три типа, причем один из этих типов минимален, а два других максимальны;
- в этом случае один из максимальных типов обязан быть идемпотентным.

В заключение этого пункта мы докажем две теоремы, которые дают примеры колец над группами без кручения ранга 2 с множеством типов мощности 2.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть A – группа без кручения ранга 2 и $T(A) = \{t_1, t_2\}$, причем $t_1 < t_2$. Предположим, что $x, y \in A$, $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. Тогда

- (1) $xy = cy$, $yx = dy$ и $y^2 = ey$ для некоторых $c, d, e \in \mathbb{Q}$;
- (2) если $t_1^2 \neq t_1$, то $x^2 = by$ для некоторого $b \in \mathbb{Q}$;
- (3) если $t_2^2 \neq t_2$, то $y^2 = 0$;
- (4) если $t_1 t_2 > t_2$, то $xy = yx = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из предположения $t_1 < t_2$ вытекает, что $t(xy) \geq t(y) = t_2$, поэтому xy и y принадлежат подгруппе $A(t_2)$, которая является подгруппой ранга 1

в группе A . Следовательно, элементы xy и y зависимы. Это означает, что $xy = cy$ для некоторого $c \in \mathbb{Q}$. Из тех же соображений вытекает, что $xy = dy$ и $y^2 = ey$ для некоторых $b, c \in \mathbb{Q}$.

2) Ясно, что $t(x^2) > t(x) = t_1$, поскольку $t_1^2 \neq t_1$. Из того, что $T(A) = \{t_1, t_2\}$, вытекает равенство $t(x^2) = t_2$. Значит, $x^2 \in A(t_2)$. Таким образом, $x^2 = by$ для некоторого $b \in \mathbb{Q}$.

3) Если тип t_2 не идемпотентен, то $t(y^2) > t(y) = t_2$. Следовательно, $t(y^2) \notin T(A)$, откуда получаем $y^2 = 0$.

4) Имеем $t(xy) \geq t(x)t(y) = t_1t_2 > t_2$; значит, $t(xy) \notin T(A)$, т.е. $xy = 0$. Аналогично получаем $yx = 0$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть A – неразложимая группа без кручения ранга 2, и пусть $T(A) = \{t_1, t_2\}$, причем $t_1 < t_2$. Если $\{x, y\}$ – независимое множество, для которого $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$, то во всех нетривиальных кольцах над A выполнены соотношения $x^2 = by$ и $xy = yx = y^2 = 0$ для некоторого рационального числа b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3; лемма 3].

3. Идеалы колец без кручения ранга 1. В этом пункте приводится необходимое и достаточное условие, при котором подгруппа группы без кручения ранга 1 является идеалом в любом кольце. Хорошо известно, что две группы без кручения ранга 1 A и B имеют одинаковый тип тогда и только тогда, когда они квазиизоморфны, т.е. существует элемент $r \in \mathbb{Q}$, для которого $A = rB$. Пусть A – абелева группа и $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A . Положим

$$I(A) = \langle \varphi(A) \mid \varphi \in \text{Hom}(A, E(A)) \rangle;$$

иными словами, пусть $I(A)$ – подгруппа в $E(A)$, порожденная всеми гомоморфными образами группы A в кольце $E(A)$. Ясно, что $I(A)$ является идеалом в $E(A)$. Ядро группы A , обозначаемое через $N(A)$, определяется как

$$N(A) = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha x \in A \text{ для всех } x \in A\}.$$

Мы обобщаем это определение на произвольную подгруппу C группы A следующим образом:

$$N(C) = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha x \in C \text{ для всех } x \in C\}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Подгруппа C группы A является идеалом в любом кольце над A , если и только если подгруппа C $I(A)$ -допустима, т.е. $I(A) \cdot C \leq C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4; теорема 117.2].

ТЕОРЕМА 3.2. Кольцо без кручения ранга 1 либо является нулевым кольцом, либо изоморфно подкольцу поля рациональных чисел. Группа без кручения ранга 1 не является ниль-группой, если и только если ее тип идемпотентен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4; теорема 121.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть A – группа без кручения ранга 1 и C – ее подгруппа. Тогда C является идеалом в любом кольце над A , если и только если $I(A) \subseteq N(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Если подгруппа C является идеалом в любом кольце над A , то по теореме 3.1 имеем $I(A).C \leq C$. Поскольку A – группа ранга 1, она изоморфна подгруппе поля $\mathbb{Q}$; значит, $I(A)$ – подкольцо поля $\mathbb{Q}$. Следовательно, из $I(A).C \leq C$ вытекает, что $r.c \in C$ для всех $c \in C$ и всех $r \in I(A)$, а это означает, что $r \in N(C)$.

($\Leftarrow$) Необходимость очевидна. Действительно, $I(A)C \subseteq N(C)C \subseteq C$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть A – группа без кручения ранга 1, над которой определено ненулевое кольцо R , и пусть C – произвольная подгруппа группы A . Тогда C является идеалом в R , если и только если $C = rR$ для некоторого $r \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Из предположения, что A не является ниль-группой, и теоремы 3.2 вытекает, что

$$t(A) = (k_1, k_2, \dots),$$

где $k_i = 0$ или ∞ . Если C – идеал в кольце R и $t(C) = (l_1, \dots, l_j, \dots)$, то $C.R \leq C$, откуда $t(C.R) \leq t(C)$. С другой стороны, имеем

$$t(C) \leq t(C)t(R) \leq t(CR) \leq t(C);$$

значит, $t(C) = t(C).t(R)$, а это означает, что

$$l_i = l_i + k_i. \quad (3.1)$$

Но $t(A)$ – идемпотент; следовательно, из (3.1) получаем $l_i = k_i$, откуда вытекает, что $t(C) = t(R)$. Поскольку подгруппа C и кольцо R имеют ранг 1, имеем $C \cong R$; значит, $C = rR$ для некоторого $r \in R$.

($\Leftarrow$) Если $C = rR$, то, очевидно, C является идеалом в R .

4. Идеалы колец без кручения ранга 2. Напомним некоторые определения из [5]. Пусть $\{x, y\}$ – независимое множество в группе без кручения A ранга 2. Каждый элемент w группы A можно единственным образом представить как $w = ux + vy$, где u и v – рациональные числа. Пусть

$$\begin{aligned} U_0 &= \{u_0 \in \mathbb{Q} : u_0x \in A\}, & U &= \{u \in \mathbb{Q} : ux + vy \in A \text{ для некоторого } v \in \mathbb{Q}\}, \\ V_0 &= \{v_0 \in \mathbb{Q} : v_0y \in A\}, & V &= \{v \in \mathbb{Q} : ux + vy \in A \text{ для некоторого } u \in \mathbb{Q}\}. \end{aligned}$$

Тогда U_0 и V_0 – подгруппы групп U и V соответственно. Группы U , U_0 , V и V_0 называются *группами ранга 1, индуцированными независимым множеством $\{x, y\}$* . Мы обобщаем эти определения на произвольную подгруппу C группы A следующим образом:

$$\begin{aligned} U_0^C &= \{u_0 \in \mathbb{Q} : u_0x \in C\}, & U^C &= \{u \in \mathbb{Q} : ux + vy \in C \text{ для некоторого } v \in \mathbb{Q}\}, \\ V_0^C &= \{v_0 \in \mathbb{Q} : v_0y \in C\}, & V^C &= \{v \in \mathbb{Q} : ux + vy \in C \text{ для некоторого } u \in \mathbb{Q}\}. \end{aligned}$$

Ясно, что $U_0^A = U_0$, $V_0^A = V_0$, $U^A = U$ и $V^A = V$. Для любых двух подгрупп R и S поля $\mathbb{Q}$ мы полагаем

$$Rx \dot{+} Sy = \{rx + sy \in A : r \in R, s \in S\}.$$

Наконец, мы говорим, что собственная подгруппа C группы A является *сильной ниль-подгруппой* группы A , если для любого кольца $(A, \cdot)$ над A и для любых элементов $a \in A$ и $c \in C$ выполнено условие $a \cdot c = c \cdot a = 0$. Подгруппа C является сильной ниль-подгруппой группы A , если она не является сильной ниль-подгруппой.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть A – группа без кручения ранга 2 и $T(A) = \{t_0, t_1, t_2\}$, где $t_0 < t_1$ и $t_0 < t_2$. Предположим, что $x, y \in A$, $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. Тогда если $t_1^2 = t_1$ и $t_2^2 \neq t_2$, то $x^2 = ax$ и $y^2 = xy = yx = 0$ для некоторого рационального a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [6; лемма 3].

В теореме 4.2 мы используем подгруппу

$$T = \{r \in \mathbb{Q} : x^2 = rx, y^2 = xy = yx = 0 \text{ определяют кольцо над } A\}$$

группы U_0 .

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть A – группа без кручения ранга 2 и

$$T(A) = \{t_0, t_1, t_2\}, \quad \text{где } t_0 < t_1, \quad t_0 < t_2, \quad t_1^2 = t_1, \quad t_2^2 \neq t_2.$$

Предположим, что $x, y \in A$, $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. Тогда подгруппа C группы A является идеалом в каждом кольце над A , если и только если

$$TUU^C \subseteq U_0^C.$$

В частности, если подгруппа C ранга 1 является идеалом в каждом кольце над A , то она представляет собой сильную ниль- или сильную ниль-подгруппу в A тогда и только тогда, когда $C = U_0^C(nx)$ для некоторого ненулевого целого n или, соответственно, $C \leq V_0y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – подгруппа группы A . Тогда для любых

$$\varphi \in \text{Hom}(A, \text{End}(A)), \quad a = ux + vy \in A, \quad c = \alpha x + \beta y \in C$$

имеем

$$(\varphi a)(c) = a \cdot c.$$

С другой стороны, из теоремы 4.1 вытекает, что $a \cdot c = r\alpha x$ для некоторого $r \in T$; значит, $I(A) \cdot C = TUU^C x$. Первое утверждение теоремы теперь следует из предложения 3.3.

Предположим, что C – подгруппа ранга 1 в группе A , которая является идеалом в любом кольце над A . Предположим также, что C является сильной ниль-подгруппой. По теореме 4.1 в любом кольце над A выполнены соотношения

$$x^2 = rx \quad \text{и} \quad y^2 = xy = yx = 0$$

для некоторого $r \in T$. С другой стороны, при доказательстве теоремы 121.1 в [4] определен элемент $c \in C$, удовлетворяющий условию $c^2 = tc$ для некоторого ненулевого $t \in \mathbb{Z}$. Пусть $c = \alpha x + \beta y$ для рациональных α и β ; тогда $c^2 = \alpha^2 rx$. Следовательно, $\alpha^2 rx = t\alpha x + t\beta y$, откуда получаем $\beta = 0$ и $t = \alpha r$. Значит,

$c = \alpha x \in C$. Мы заключаем, что существует целое l , для которого $lx \in C$; следовательно, $C = U_0^C(nx)$ для некоторого ненулевого целого n . Наконец, предположим, что C является сильной ниль-подгруппой. Возьмем произвольный элемент $c = \alpha x + \beta y$ подгруппы C . Если $\alpha \neq 0$, то $0 = cx = \alpha rx$ для некоторого $r \in T$, откуда $0 = \alpha r$. Это выполнено для всех колец над A ; значит, $\alpha = 0$ – мы пришли к желаемому противоречию. Следовательно, C является подгруппой группы V_0y .

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть A – группа без кручения ранга 2 и $T(A) = \{t_0, t_1, t_2\}$, где $t_0 < t_1$ и $t_0 < t_2$. Предположим, что $x, y \in A$, $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. Если $t_1^2 = t_1$ и $t_2^2 = t_2$, то $x^2 = ax$, $y^2 = by$ и $xy = yx = 0$ для некоторых рациональных чисел a и b , не равных нулю одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3; предложение 9].

В дальнейшем нам понадобятся следующие подгруппы T и S групп U_0 и V_0 соответственно:

$$\begin{aligned} T &= \{r \in \mathbb{Q} : x^2 = rx, y^2 = sy, xy = yx = 0 \\ &\quad \text{для некоторой кольцевой структуры на } A \text{ и некоторого } s \in \mathbb{Q}\}, \\ S &= \{s \in \mathbb{Q} : x^2 = rx, y^2 = sy, xy = yx = 0 \\ &\quad \text{для некоторой кольцевой структуры на } A \text{ и некоторого } r \in \mathbb{Q}\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть A – группа без кручения ранга 2 и

$$T(A) = \{t_0, t_1, t_2\}, \quad \text{где } t_0 < t_1, \quad t_0 < t_2, \quad t_1^2 = t_1, \quad t_2^2 = t_2.$$

Пусть $x, y \in A$, где $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. Тогда подгруппа C группы A является идеалом в любом кольце над A , если и только если

$$TUU^C \subseteq U^C \quad \text{и} \quad SVV^C \subseteq V^C.$$

В частности, подгруппа C ранга 1, которая является идеалом в любом кольце над A , представляет собой сильную ниль-подгруппу и $C = U_0^C(nx)$ или $V_0^C(my)$ для некоторых целых m и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – подгруппа в A . Тогда для любых

$$\varphi \in \text{Hom}(A, \text{End}(A)), \quad a = ux + vy \in A, \quad c = \alpha x + \beta y \in C$$

имеем

$$(\varphi a)(c) = a.c = u\alpha rx + v\beta sy, \quad \text{где } r \in T, \quad s \in S.$$

Следовательно,

$$I(A).C = TUU^C x + SVV^C y.$$

Теперь первое утверждение вытекает из предложения 3.3.

Пусть C – подгруппа ранга 1 группы A , которая является идеалом в любом кольце над A . Рассуждая от противного, предположим, что C является сильной ниль-подгруппой. Пусть R – произвольное кольцо над A . Тогда $x^2 = rx$, $y^2 = sy$ и $xy = yx = 0$ для некоторых $r, s \in \mathbb{Q}$. С другой стороны, для произвольного элемента $c = \alpha x + \beta y$ подгруппы C имеем $c^2 = 0 = \alpha^2 rx + \beta^2 sy$, откуда вытекает,

что $\alpha^2 r = \beta^2 s = 0$. Это условие выполнено в любом кольце над A , т.е. для любых $r \in T$ и $s \in S$; следовательно, $\alpha = \beta = 0$, а значит, $C = 0$. Мы получили противоречие, которое доказывает, что C является сильной ниль-подгруппой в A . Если $c = \alpha x + \beta y \in C$, где $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то $xc = \alpha rx \in C$ и $yc = \beta sy \in C$. Отсюда вытекает, что все ненулевые кратные элементов x и y лежат в C . Поэтому C имеет ранг 2, а это противоречит предположению, что C – подгруппа ранга 1. Мы заключаем, что $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. Из тех же соображений, что и в доказательстве теоремы 4.2, имеем $C = U_0^C(nx)$ или $C = V_0^C(my)$ для некоторых целых m и n .

Пусть A – неразложимая группа без кручения ранга 2 и $T(A) = \{t_1, t_2\}$, где $t_1 < t_2$. Если $\{x, y\}$ – независимое множество, причем $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$, то по теореме 2.3 во всех нетривиальных кольцах над A выполнены соотношения $x^2 = by$ и $xy = yx = y^2 = 0$ для некоторого рационального числа b . Во втором случае определим такую подгруппу группы V_0 :

$$W = \{r \in \mathbb{Q} \mid x^2 = ry, y^2 = xy = yx = 0 \text{ определяют кольцо над } A\}.$$

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть A – неразложимая группа без кручения ранга 2 и $T(A) = \{t_1, t_2\}$, где $t_1 < t_2$. Предположим, что $\{x, y\}$ – независимое множество, причем $t(x) = t_1$ и $t(y) = t_2$. Тогда произвольная подгруппа C группы A является идеалом в любом кольце над A , если и только если

$$WUUC \subseteq V_0^C.$$

Более того, если подгруппа группы A имеет ранг 1 и является идеалом в любом кольце над A , то она представляет собой сильную ниль-подгруппу и является подгруппой в V_0y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – подгруппа группы A . По теореме 2.3 для любых $\varphi \in \text{Hom}(A, \text{End}(A))$, $a = ux + vy \in A$ и $c = \alpha x + \beta y \in C$ имеем $(\varphi a)(c) = \alpha byu$ для некоторого $b \in W$. Это означает, что $I(A).C = WUUCy$; таким образом, первое утверждение вытекает из предложения 3.3.

Предположим, что C – подгруппа группы A и C является идеалом в любом кольце над A . Рассуждая от противного, предположим, что C является сильной нениль-подгруппой. Если R – ненулевое кольцо над A , то найдется элемент $b \in W$, для которого $x^2 = by$ и $xy = yx = y^2 = 0$. Те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 4.2, доказывают, что C содержит ненулевой элемент $c = \alpha x + \beta y$, для которого $c^2 = tc$ при некотором ненулевом целом t . По предположению имеем $0 = c^2 = t\alpha x + t\beta y$, откуда $\alpha = \beta = 0$. Следовательно, $C = 0$. Мы получили противоречие. Отсюда уже легко вывести требуемое утверждение.

Авторы искренне признательны рецензенту за внимательное чтение статьи и ряд полезных замечаний, которые значительно улучшили первоначальную версию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Fried, “On the subgroups of an abelian group that are ideals in every ring”, *Proc. Colloq. Abelian Groups*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964, 51–55.
- [2] A. E. Stratton, “The type set of torsion-free rings of finite rank”, *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, **27** (1979), 199–211.

- [3] A. M. Aghdam, “On the strong nilstufе of rank two torsion free groups”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **49**:1-4 (1985), 53–61.
- [4] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Vol. II, Pure Appl. Math., **36-II**, Academic Press, New York, 1973.
- [5] R. A. Beaumont, R. J. Wisner, “Rings with additive group which is a torsion-free group of rank two”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **20** (1959), 105–116.
- [6] A. M. Aghdam, A. Najafizadeh, “Square subgroups of rank two abelian groups”, *Colloq. Math.*, **117**:1 (2009), 19–28.

А. Наджафизаде

University of Tabriz, Иран

E-mail: ar_najafizadeh@yahoo.com

Поступило

15.03.2011

Исправленный вариант

01.05.2011

А. М. Агдам

University of Tabriz, Иран

E-mail: mehdizadeh@tabrizu.ac.ir

Ф. Карими

University of Tabriz, Иран

E-mail: karimi@tabrizu.ac.ir