Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Головина, Резольвенты операторов с разбегающими возмущениями, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 464–466

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:33:33

Резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями

А. М. Головина

Большое количество работ посвящено изучению операторов с разбегающимися возмущениями (см., например, [1]–[4]). В основном внимание уделялось исследованию асимптотического поведения собственных значений и собственных функций оператора Шрёдингера с возмущениями, описываемыми вещественными потенциалами. В работе [1] рассматривался оператор Шрёдингера с двумя вещественными потенциалами из класса Рольника (Rollnik class) в пространстве $\mathbb{R}^3$. Предполагалось, что области, где локализованы данные потенциалы, находятся на большом расстоянии друг от друга. Была доказана сходимость резольвенты возмущенного оператора к резольвенте невозмущенного. В [2] исследовался аналогичный оператор, где потенциалы предполагались вещественными и убывающими. На основе возмущенного оператора был построен матричный оператор с разбегающимися возмущениями, а также доказана сходимость резольвенты унитарного преобразования данного матричного оператора. Отметим, что унитарное преобразование строилось определенным образом и зависело от расстояния между разбегающимися потенциалами. В [3] вновь рассматривался оператор Шрёдингера в пространстве $\mathbb{R}^3$ с тремя вещественными потенциалами. На потенциалы накладывались следующие условия: оператор $V(I + \mathcal{H}_0)^{-1}$ компактный, где $\mathcal{H}_0$ – невозмущенный оператор, а V – потенциал, и оператор

$$D(\lambda)V(I + \mathcal{H}_0)^{-1}D(\lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^3,$$

является аналитическим продолжением ограниченного оператора $V(I + \mathcal{H}_0)^{-1}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$ и действует из $\mathbb{R}_+^3$ в сектор

$$S_\phi = \{\lambda \in \mathbb{C}^3 \mid \operatorname{Re} \lambda_l > 0, |\arg \lambda_l| < \phi, l = 1, 2, 3\},$$

где $\phi > 0$,

$$(D(\lambda)f)(y) = \prod_{l=1}^3 \lambda_l^{1/2} f(\lambda y), \quad \lambda y = (\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \lambda_3 y_3).$$

Доказана сходимость резольвенты возмущенного оператора к резольвенте невозмущенного оператора в смысле сильной резольвентной сходимости. Приведено разложение резольвенты возмущенного оператора в ряд Неймана, сходящийся в смысле сильной резольвентной сходимости. В [4] возмущающими операторами были произвольные абстрактные локализованные операторы, локализованность которых заключалась в том, что каждый из них был задан на определенной ограниченной области. Были доказаны теоремы сходимости и построены первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций.

В данной работе рассматривается матричный оператор общего вида с конечным числом локализованных возмущений. Невозмущенным является дифференциальный оператор высокого порядка, не обязательно симметричный. Главное условие – замкнутость невозмущенного оператора. Строго он вводится следующим образом.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_d)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, Γ – произвольная периодическая решетка в $\mathbb{R}^d$ с элементарной ячейкой $\square$. Определим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ невозмущенный оператор

$$\mathcal{H}_0 := (-1)^m \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^d \\ |\beta| = |\gamma| = m}} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} a_{\beta\gamma}(x) \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} + \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}_+^d \\ |\beta| \leq 2m-1}} b_\beta(x) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00118), программы Президента России поддержки молодых ученых (грант № МД-453.2010.1) и ФЦП (грант № 02.740.110612).

© А. М. Головина, 2012

с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $m \in \mathbb{N}$, $a_{\beta\gamma} \in C^m(\mathbb{R}^d)$, $b_\beta \in C^{m-1}(\mathbb{R}^d)$ – матричнозначные функции, периодические относительно решетки Γ . Будем считать, что выполнено условие эллиптичности:

$$\nu \sum_{\substack{\beta \in Z_+^d \\ |\beta|=m}} |\xi_\beta|^2 \leq \left| \sum_{\substack{\beta, \gamma \in Z_+^d \\ |\beta|=|\gamma|=m}} (a_{\beta\gamma} \xi_\beta, \xi_\gamma)_{\mathbb{C}^d} \right|, \quad \xi_\beta \in \mathbb{C}^d,$$

где ν – некоторая константа, не зависящая от x и ξ_β .

Для определения возмущающих операторов введем в рассмотрение произвольные абстрактные локализованные операторы $\mathcal{L}_i^0: W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $i = 1, \dots, k$, ограниченные как операторы из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Локализованность возмущающих операторов заключается в специально выбранных весовых функциях $\varsigma_i = \varsigma_i(r)$, $\eta_i = \eta_i(r) \in C^{2m}(\mathbb{R}_+)$, $i = 1, \dots, k$, которые неотрицательны, в окрестности нуля равные единице и удовлетворяют следующим условиям:

- (A1) существует функция $a \in C^{2m-1}[0, +\infty)$ такая, что справедливы оценки: $|\varsigma_i(r)| \leq C e^{-\int_0^r a(t) dt}$, $i = 1, \dots, k$, где C – некоторая константа;
- (A2) функция a и все ее производные до порядка $(2m-1)$ ограничены равномерно в $\mathbb{R}^d$, а также выполнено равенство $\int_0^{+\infty} a(t) dt = +\infty$;
- (A3) функция $a \equiv 0$, а функции $\eta_i \equiv 1$ при $r \in [0, r_0]$, где $r_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, функции η_i и все их производные до порядка $2m$ убывают на бесконечности.

Под разбегающимися возмущениями оператора $\mathcal{H}_0$ будем понимать возмущения вида

$$\sum_{i=1}^k \mathcal{S}(-X_i) \varsigma_i(|x|) \mathcal{L}_i^0 \eta_i(|x|) \mathcal{S}(X_i),$$

где $\mathcal{S}(X_i)$ – оператор сдвига, действующий по правилу: $(\mathcal{S}(X_i)u)(\cdot) := u(\cdot - X_i)$, $X_i \in \mathbb{R}^d$ – дискретные параметры, стремящиеся к бесконечности. Заметим, что любые два значения X_i можно перевести друг в друга с помощью конечного числа сдвигов вдоль решетки Γ и $|X_i - X_j| \xrightarrow{i \neq j} +\infty$. Описанное поведение параметров X_i далее будем кратко записывать в виде $X \rightarrow \infty$, где $X = (X_1, \dots, X_k)$.

Под возмущенным оператором в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ будем понимать оператор

$$\mathcal{H}_X := \mathcal{H}_0 + \sum_{i=1}^k \mathcal{S}(-X_i) \varsigma_i \mathcal{L}_i^0 \eta_i \mathcal{S}(X_i)$$

с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Самым простым примером возмущенного оператора является одномерный периодический дифференциальный оператор второго порядка с двойной потенциальной ямой. В данном случае $m = d = n = 1$, $\mathcal{L}_i^0 = V_i$, где V_i – некоторые ограниченные потенциалы, $i = 1, 2$. Возмущенный оператор $\mathcal{H}_X$ в этом случае рассматривается в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\ell &= \mathcal{H}_0 + \varsigma_1(|\cdot + \ell|) V_1(\cdot + \ell) \eta_1(|\cdot + \ell|) + \varsigma_2(|\cdot - \ell|) V_2(\cdot - \ell) \eta_2(|\cdot - \ell|), \\ \mathcal{H}_0 &= -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q, \end{aligned} \quad (1)$$

где $p \in C^1(\mathbb{R})$, $q \in C(\mathbb{R})$ – 1-периодические функции, ℓ – большой положительный параметр.

Для формулировки основного результата введем дополнительные обозначения. Пусть $\mathcal{H}_i := \mathcal{H}_0 + \varsigma_i \mathcal{L}_i^0 \eta_i$ – операторы в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с областями определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Будем предполагать, что

- (A4) операторы $\mathcal{H}_i$ замкнуты.

Через $\sigma(\cdot)$ обозначим спектр оператора, I – тождественный оператор, а символом $\|\cdot\|_{Y_1 \rightarrow Y_2}$ будем обозначать норму линейного оператора, действующего из пространства Y_1 в пространство Y_2 .

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для достаточно больших X оператор H_X замкнут. Для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=0}^k \sigma(\mathcal{H}_i)$ и достаточно больших X верно представление*

$$(\mathcal{H}_X - \lambda)^{-1} := \left[\sum_{i=1}^k \mathcal{S}(-X_i)(H_i - \lambda)^{-1} \mathcal{S}(X_i) - (k-1)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \right] (I + \mathcal{P}_X)^{-1},$$

$$\mathcal{P}_X := \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k \mathcal{S}(-X_i) \varsigma_i \mathcal{L}_i^0 \eta_i \mathcal{S}(X_i) [\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j - \lambda)^{-1} \mathcal{S}(X_j) - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}],$$

где $\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \rightarrow 0$ при $X \rightarrow \infty$.

Для приведенного выше оператора (1) резольвента имеет вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_\ell - \lambda)^{-1} &= (\mathcal{S}(-\ell)(\mathcal{H}_0 + \varsigma_1 V_1 \eta_1 - \lambda)^{-1} \mathcal{S}(\ell) \\ &\quad + \mathcal{S}(\ell)(\mathcal{H}_0 + \varsigma_2 V_2 \eta_2 - \lambda)^{-1} \mathcal{S}(-\ell) - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}) (I + \mathcal{P}_\ell)^{-1}, \\ \mathcal{P}_\ell &= \mathcal{S}(-\ell) \varsigma_1 V_1 \eta_1 \mathcal{S}(\ell) (\mathcal{S}(\ell)(\mathcal{H}_0 + \varsigma_2 V_2 \eta_2 - \lambda)^{-1} \mathcal{S}(-\ell) - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}) \\ &\quad + \mathcal{S}(\ell) \varsigma_2 V_2 \eta_2 \mathcal{S}(-\ell) (\mathcal{S}(-\ell)(\mathcal{H}_0 + \varsigma_1 V_1 \eta_1 - \lambda)^{-1} \mathcal{S}(\ell) - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}). \end{aligned}$$

Отметим, что класс невозмущенных и возмущающих операторов довольно широк. Например, в качестве невозмущенного оператора могут быть рассмотрены следующие операторы: дифференциальный оператор второго порядка, матричный и магнитный операторы Шрёдингера, оператор теории упругости, оператор Паули, бигармонический оператор, а также оператор, описывающий δ -взаимодействие, который с помощью некоторого преобразования, описанного в работе [4], можно привести к дифференциальному оператору второго порядка. Возмущающими операторами могут быть дифференциальный оператор, интегральный оператор, конечномерный оператор, псевдодифференциальный оператор с определенным условием на символ оператора. При определенном соотношении между размерностью пространства и порядком невозмущенного оператора в качестве возмущений можно взять кулоновские потенциалы.

Автор выражает благодарность Д. И. Борисову за постановку задачи и консультирование в процессе написания работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. Kostrykin, R. Schrader, *Rev. Math. Phys.*, **6:5** (1994), 833–853. [2] E. B. Davies, *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., **42**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995. [3] P. Aventini, R. Seiler, *Comm. Math. Phys.*, **41:2** (1975), 119–134. [4] D. Borisov, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **10:2** (2007), 155–196.

А. М. Головина

Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы, г. Уфа

E-mail: nastya_gm@mail.ru

Поступило

20.06.2011