Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Комбаров, Замечание о Σ -произведениях, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 467–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:23:35

Замечание о Σ -произведениях

А. П. Комбаров

Напомним, что Σ -произведения были определены в 1959 г. Корсоном в работе [1], но сама конструкция Σ -произведения была известна гораздо раньше. Еще в 1938 г. Понтрягин использовал эту конструкцию для построения примера счетно компактного некомпактного пространства [2]. Выберем базисную точку $s = \{s_\alpha\}$ в тихоновском произведении

$$X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$$

пространств X_α . Отметим, что все пространства в этой заметке предполагаются регулярными и все отображения непрерывными. Для каждой точки x произведения X определено множество различающих индексов

$$Q(x) = \{\alpha \in A : x_\alpha \neq s_\alpha\}.$$

Σ -произведение пространств X_α , $\alpha \in A$, определяется как подпространство

$$\Sigma = \{x \in X : Q(x) \text{ не более чем счетно}\}$$

произведения X . Легко видеть, что Σ -произведение является всюду плотным подпространством произведения. Естественно рассматривать Σ -произведения, не совпадающие с произведением пространств. Такие Σ -произведения называются *собственными*. Собственное Σ -произведение, очевидно, не может быть сепарабельным пространством и не может быть паракомпактом. В 1959 г. Корсон [1] доказал, что Σ -произведение полных метрических пространств нормально. В 1977 г. Гулько [3] и Рудин (см. [4]) независимо доказали, что Σ -произведение метрических пространств является нормальным пространством. Затем автор [5] усилил этот результат, доказав, что Σ -произведение паракомпактных p -пространств нормально в том и только в том случае, когда теснота этого Σ -произведения счетна. Паракомпактные p -пространства можно определить как полные прообразы метрических пространств при замкнутых компактных отображениях [6], а лашневские пространства – это образы метрических пространств при замкнутых отображениях [7]. Хорошо известно, что лашневские пространства являются паракомпактами Фреше–Урысона (в частности, счетной тесноты) (см., например, [8]), но не обязаны быть p -пространствами, в связи с чем Кодама сформулировал широко известную ныне задачу (см., например, [9]): *является ли нормальным пространством Σ -произведение лашневских пространств?* В статье [9] доказано, что положительный ответ на этот вопрос невозможен, поскольку в некоторой модели теории множеств существует ненормальное Σ -произведение лашневских пространств. Вопрос о существовании “наивного” такого примера остается открытым. Основным результатом настоящей заметки является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Σ -произведение лашневских пространств, удовлетворяющих условию Суслина, нормально.*

Напомним, что топологическое пространство X удовлетворяет *условию Суслина*, если в X любая система, состоящая из попарно непересекающихся непустых открытых множеств, не более чем счетна. В частности, все сепарабельные пространства и все диадические компакты удовлетворяют условию Суслина. Отметим, что в формулировке теоремы 1 условие лашневости пространства не может быть опущено, поскольку известны примеры диадических компактов, Σ -произведение которых не является нормальным пространством [10]. Следующая лемма 1 доказана в книге [8; с. 399].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00741а).

© А. П. КОМБАРОВ, 2012

ЛЕММА 1. Пусть f является замкнутым отображением метрического пространства M на пространство X . Тогда найдется замкнутое подмножество F метрического пространства M такое, что $f(F) = X$ и ограничение отображения f на F неприводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если X – лашневское пространство, то из леммы 1 следует, что пространство X , удовлетворяющее условию Суслина, является образом некоторого метрического пространства F при неприводимом замкнутом отображении f , и если $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ – некоторая система непустых попарно непересекающихся открытых подмножеств пространства F , то $\{X \setminus f(F \setminus U_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ – система с аналогичными свойствами в пространстве X . Поэтому метрическое пространство F также удовлетворяет условию Суслина и, следовательно, обладает счетной базой [11; с. 85]. Отсюда сразу следует, что пространство X является пространством со счетной сетью [11; с. 92]. Таким образом, любое счетное произведение лашневских пространств, удовлетворяющих условию Суслина, обладает счетной сетью и, следовательно, является линделефовым наследственно сепарабельным пространством.

Пусть теперь Σ является Σ -произведением пространств X_α , $\alpha \in A$, и все X_α – лашневские пространства, удовлетворяющие условию Суслина. Пусть $B \subset A$. Гранью Σ -произведения будем называть подпространство

$$X_B = \{x_\alpha \in \Sigma : x_\alpha = s_\alpha \text{ при } \alpha \in A \setminus B\}.$$

Обозначим через p_B естественную проекцию Σ на грань X_B . Предположим, что подмножества Σ -произведения H_1 и H_2 не разделяются в Σ непересекающимися открытыми множествами. Поскольку для любого счетного множества $B \subset A$ грань X_B гомеоморфна произведению пространств X_α , $\alpha \in B$, грань X_B является линделефовым пространством и, следовательно, нормальным пространством, и поэтому замыкания множеств $p_B(H_1)$ и $p_B(H_2)$ обязаны пересекаться, т.е.

$$R_B = [p_B(H_1)] \cap [p_B(H_2)] \neq \emptyset.$$

Выберем произвольно счетное множество $B_1 \subseteq A$. Поскольку грань X_{B_1} наследственно сепарабельна, найдутся счетные подмножества $E_{11} \subset H_1$ и $E_{21} \subset H_2$ такие, что

$$R_{B_1} = [p_{B_1}(E_{11})] \cap [p_{B_1}(E_{21})].$$

Предположим теперь, что для каждого натурального числа $i < j$ определено счетное множество индексов $B_i \subseteq A$, причем, если $k < i$, то $B_k \subseteq B_i$. В частности, определена проекция $p_{B_k}^{B_i}$ грани X_{B_i} на грань X_{B_k} и проекция p_{B_i} всего Σ -произведения Σ на грань X_{B_i} , причем для всех $i < j$ замкнутое множество

$$R_{B_i} = [p_{B_i}(H_1)] \cap [p_{B_i}(H_2)] \subseteq X_{B_i}$$

непусто. Предположим далее, что выбраны счетные подмножества $E_{1i} \subset H_1$ и $E_{2i} \subset H_2$ такие, что

$$R_{B_i} = [p_{B_i}(E_{1i})] \cap [p_{B_i}(E_{2i})].$$

Пусть $j = i + 1$. По предположению

$$R_{B_i} = [p_{B_i}(E_{1i})] \cap [p_{B_i}(E_{2i})], \quad E_{1i} \subset H_1, \quad E_{2i} \subset H_2.$$

Пусть

$$B_j = B_i \cup \bigcup \{Q(x) : x \in E_{1i} \cup E_{2i}\}.$$

Очевидно, что $B_i \subset B_j$ и что множество B_j счетно. Поскольку множества H_1 и H_2 не разделяются в Σ непересекающимися открытыми множествами, то

$$R_{B_j} = [p_{B_j}(H_1)] \cap [p_{B_j}(H_2)] \neq \emptyset.$$

Легко видеть, что найдутся счетные множества $E_{1j} \subset H_1$ и $E_{2j} \subset H_2$ такие, что

$$R_{B_j} = [p_{B_j}(E_{1j})] \cap [p_{B_j}(E_{2j})].$$

Построение закончено.

Пусть $B = \bigcup \{B_j : j = 1, 2, 3, \dots\}$. Множество B счетно. Поэтому

$$R_B = [p_B(H_1)] \cap [p_B(H_2)] \neq \emptyset.$$

Выберем точку $y \in R_B$. Произвольная окрестность точки y содержит окрестность вида

$$U = (p_{B_i})^{-1}(V) \cap \bigcap \{\pi_\alpha^{-1}(O^\alpha) : \alpha \in K\},$$

где множество V открыто в некоторой грани X_{B_i} , K является конечным подмножеством $A \setminus B$, множество O^α открыто в X_α и содержит точку s_α , а π_α — проекция Σ на X_α при $\alpha \in K$. Поскольку $y \in X_B$ и проекция $p_{B_i}^B$ грани X_B на грань X_{B_i} непрерывна, то $p_{B_i}^B(y) \in R_{B_i}$ и, следовательно, $V \cap p_{B_i}(E_{ji}) \neq \emptyset$, $j = 1, 2$. Таким образом, окрестность U точки y содержит точки множеств E_{ji} , $j = 1, 2$, и, следовательно, произвольная окрестность точки y пересекается с множествами $E_j = \bigcup \{E_{ji} : i = 1, 2, \dots\}$, $j = 1, 2$, лежащими в грани X_B . Поэтому $y \in [E_1]_\Sigma \cap [E_2]_\Sigma$. Но $E_{ji} \subset H_j$, $j = 1, 2$, т.е. $y \in [H_1]_\Sigma \cap [H_2]_\Sigma$. Следовательно, H_1 и H_2 не могут быть непересекающимися замкнутыми подмножествами Σ . Таким образом, любые два замкнутых непересекающихся подмножества Σ разделяются (непересекающимися) открытыми множествами, и пространство Σ нормально. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Corson, *Amer. J. Math.*, **81**:3 (1959), 785–796. [2] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Математика в монографиях: Основная сер., **3**, Гостехиздат, М.–Л., 1938. [3] С. П. Гулько, *Докл. АН СССР*, **237**:3 (1977), 505–508. [4] K. Kunen, J. E. Vaughan (eds.), *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1984. [5] А. П. Комбаров, *Докл. АН СССР*, **239**:4 (1978), 775–778. [6] А. В. Архангельский, *Матем. сб.*, **67**:1 (1965), 55–88. [7] Н. С. Лашнев, *Докл. АН СССР*, **170** (1966), 505–507. [8] J.-I. Nagata, *Modern General Topology*, Bibliotheca Mathematica, **7**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1968. [9] K. Eda, G. Gruenhage, P. Koszmider, K. Tamano, S. Todorčević, *Topology Appl.*, **67**:3 (1995), 189–220. [10] А. П. Комбаров, *Докл. АН СССР*, **199** (1971), 526–528. [11] А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*, Наука, М., 1974.

А. П. Комбаров

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: kombarov@mech.math.msu.su

Поступило

29.09.2011