Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Тен, Полиномиальные первые интегралы систем с гироскопическими силами, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 151–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm932>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:47:38

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМ С ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СИЛАМИ

В. В. Тен

1. Введение. Основной результат. Топологические препятствия к существованию полиномиальных по импульсам первых интегралов механических систем впервые были изучены в работе [1]. Эти исследования для случая геодезических потоков на двумерном торе продолжены в [2]: показано, что спектр Фурье (его определение приводится ниже) потенциала вполне интегрируемой натуральной системы на двумерном торе лежит на двух перпендикулярных прямых (это утверждение доказано в случае, когда потенциал является тригонометрическим полиномом, и высказана гипотеза для произвольного аналитического потенциала).

В настоящей работе установлен критерий интегрируемости для задачи о движении точки по плоскому двумерному тору под действием гироскопических сил, заданных аналитической 2-формой. Постановка задачи принадлежит В. В. Козлову. В работе [3] доказано (даже в более общей ситуации), что интеграл формы гироскопических сил по конфигурационному пространству равен нулю.

Пусть гироскопические силы заданы 2-формой $\lambda(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2$, кинетическая энергия – квадратичной формой $(y_1^2 + y_2^2)/2$ (здесь x_i – угловые координаты на торе, y_i – канонически сопряженные им импульсы, а $\lambda(x_1, x_2)$ – дwoякопериодическая аналитическая функция). Из доказательства теоремы будет видно, что в качестве кинетической энергии можно взять любую квадратичную форму с постоянными коэффициентами $(ay_1^2 + by_1y_2 + cy_2^2)/2$, после чего подходящей линейной заменой координат на накрывающей привести ее к сумме квадратов импульсов.

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, & \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_1 &= \lambda(x_1, x_2)y_2, & \dot{y}_2 &= -\lambda(x_1, x_2)y_1. \end{aligned} \quad (0)$$

Они, конечно, допускают интеграл энергии $y_1^2 + y_2^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Спектром Фурье* функции $f(x_1, x_2)$, периодической по обоим аргументам, называется подмножество целочисленной решетки $\{(k, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid f_{km} \neq 0\}$, где f_{km} – коэффициенты разложения этой функции в ряд Фурье.

В указанных предположениях справедлива

ТЕОРЕМА. *Система (0) допускает дополнительный полиномиальный по импульсам интеграл тогда и только тогда, когда спектр Фурье функции $\lambda(x_1, x_2)$ лежит на одной прямой, проходящей через начало координат, и среднее значение этой функции по конфигурационному тору равно нулю (это эквивалентно существованию циклической переменной).*

СЛЕДСТВИЕ. *Степень любого дополнительного неприводимого интеграла такой системы равна единице.*

2. Доказательство теоремы. Перейдем к новой “полярной” системе координат (x_1, x_2, φ) , r в T^*T^2 :

$$y_1 = r \cos \varphi, \quad y_2 = r \sin \varphi.$$

Уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r \cos \varphi, & \dot{x}_2 &= r \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\lambda(x_1, x_2), & \dot{r} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00953, и фонда INTAS, грант № 97-10771.

Пусть $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ – полиномиальный по импульсам первый интеграл. Будем считать, что он не делится на тривиальный первый интеграл $y_1^2 + y_2^2$. В новой системе координат его можно представить в следующем виде:

$$F(x_1, x_2, \varphi, r) = \sum_{k=0}^n \sum_{m \in M_k} f_{km}(x_1, x_2) r^k e^{i\varphi m},$$

$$M_k = \{m \in \mathbb{Z} \mid -k \leq m \leq k, (k+m) \bmod 2 = 0\}.$$

Все коэффициенты с индексами, не попавшими в условия суммирования, равны нулю.

Приравняв нулю производную F в силу системы (1), получаем уравнения на коэффициенты

$$\frac{\partial f_{k-1m-1}}{\partial z} - im\lambda f_{km} + \frac{\partial f_{k-1m+1}}{\partial \bar{z}} = 0.$$

В дальнейшем для удобства записи предполагается, что интеграл имеет степень $n+1$.

Введем обозначение: $g_k = f_{kk}$. Тогда функции g_k удовлетворяют цепочке соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{n+1}}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial g_n}{\partial z} = i(n+1)\lambda g_{n+1}, \quad \frac{\partial g_{n-1}}{\partial z} = in\lambda g_n, \\ \frac{\partial g_{n-2}}{\partial z} &= i(n-1)\lambda g_{n-1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial g_1}{\partial z} = i2\lambda g_2, \quad \frac{\partial g_0}{\partial z} = i\lambda g_1. \end{aligned} \quad (2)$$

В силу ограниченности коэффициентов g_{n+1} – произвольная постоянная. Простым поворотом системы координат (x_1, x_2) и нормировкой интеграла можно сделать этот коэффициент равным единице (новые координаты, вообще говоря, не задают двояко-периодических координат на торе, но нас это не должно беспокоить, так как дальнейшие рассуждения применяются к системе, поднятой на накрывающую плоскость $\mathbb{R}^2\{x_1, x_2\}$). Таким образом, первое уравнение (2) можно заменить на $g_{n+1} = 1$, а второе на $\partial g_n / \partial z = i(n+1)\lambda$, откуда сразу следует равенство нулю среднего функции λ .

Если $g_{n+1} = 0$, то начнем с ненулевого коэффициента с максимальным номером. Все g_k не могут быть равными нулю, так как мы предположили, что интеграл не делится на $y_1^2 + y_2^2$.

Перемножая второе и третье уравнения системы (2), имеем

$$\frac{\partial(g_n^2)}{\partial z} = \frac{2(n+1)}{n} \frac{\partial g_{n-1}}{\partial z},$$

откуда получаем

$$g_{n-1} = \frac{n}{2(n+1)} g_n^2 + C_{n-1}.$$

Вообще, для произвольного k

$$\frac{\partial(g_k^2)}{\partial z} = \frac{2(k+1)}{k} \frac{\partial g_{k-1}}{\partial z} g_{k+1}. \quad (3)$$

По индукции можно доказать, что все функции g_k выражаются через g_n : $g_k = G_k(g_n)$, где $G_k(w)$ – голоморфные всюду, за исключением счетного множества точек, функции.

Предположим, это справедливо для коэффициентов с номерами $\geq k$. Из формулы (3) получаем

$$\frac{\partial g_{k-1}}{\partial z} = \frac{k}{2(k+1)} \frac{\partial(g_k^2)}{\partial z} \frac{1}{g_{k+1}} = \frac{k}{k+1} \frac{G_k(g_n)}{G_{k+1}(g_n)} \frac{\partial G_k(g_n)}{\partial g_n} \frac{\partial g_n}{\partial z} = \frac{\partial I(g_n)}{\partial g_n} \frac{\partial g_n}{\partial z},$$

где $I(w)$ – первообразная функции

$$\frac{k}{k+1} \frac{G_k(w)}{G_{k+1}(w)} \frac{\partial G_k(w)}{\partial w}.$$

Следовательно, $g_{k-1} = I(g_n) + C_{k-1} = G_{k-1}(g_n)$.

Таким образом, $g_0(z) = G_0(g_n(z))$, причем в силу вещественности разлагаемой функции $\text{Im } G_0(g_n(z)) \equiv 0$. Функция $G_0(z)$ не постоянна, так как в противном случае либо $\lambda = 0$, либо все остальные $g_k = 0$, а в этом случае $F - g_0$ делится нацело на кинетическую энергию.

Для окончания доказательства нам требуется

ЛЕММА. Пусть $f(z)$ и $\lambda(z)$ – вещественно-аналитические функции двух переменных x_1 и x_2 ($z = x_1 + ix_2$) такие, что $R(f(z))$ и $i\partial f(z)/\partial z \equiv -\lambda(z)$ – чисто вещественные функции, где $R(w)$ – непостоянная голоморфная всюду кроме дискретного множества функция; кроме того, функции f и λ не имеют особенностей на всей плоскости. Тогда существует линейная ортогональная замена координат $(x_1, x_2) \mapsto (X_1, X_2)$ такая, что λ не зависит от переменной X_2 .

Это утверждение доказано в п. 3.

Для завершения доказательства необходимости осталось, учитывая второе уравнение системы (2) (при $g_{n+1} = 1$), применить лемму и вернуться на накрываемый тор.

Докажем достаточность. Пусть $\lambda = \lambda(x_2)$ и $\int_{\mathbb{T}^2} \lambda dx_1 dx_2 = 0$. Рассмотрим линейную по импульсам функцию $-\mu(x_2) + y_1$, где μ – первообразная λ по x_2 . Нетрудно проверить, что это первый интеграл, периодический по x_2 .

Теорема доказана.

3. Доказательство леммы. Уравнение $\text{Im}(R(u+iv)) = 0$ определяет на плоскости $\mathbb{R}^2\{u, v\}$ некоторую аналитическую кривую. Можно считать, что $v = S(u)$, где S – некоторая вещественно-аналитическая функция одной переменной (по крайней мере локально). Тогда $\partial v/\partial x_1 = S'(u)\partial u/\partial x_1$, $\partial v/\partial x_2 = S'(u)\partial u/\partial x_2$, а условия леммы

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda$$

можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + S'(u)\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad S'(u)\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda. \quad (4)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (4). Пусть $u(x_1, x_2)$ – некоторое его нетривиальное частное решение, удовлетворяющее условиям леммы. Предположим $L_c = \{(x_1, x_2) \mid u(x_1, x_2) = c\}$ – неособая кривая уровня ($c = \text{const}$); по лемме Сарда множество таких кривых имеет полную меру. Вектор $(1, S'(u))$ ортогонален вектору градиента и является постоянным на L_c , так как S' зависит только от значения u . Следовательно, линия уровня L_c – прямая. Аналогичные рассуждения можно провести и для близких кривых $L_{c+\varepsilon}$. Ясно, что эти прямые не должны пересекаться, откуда следует, что они параллельны и множитель $S' = \text{const}$ (в действительности можно показать, что эта постоянная – нуль).

Поворотом исходной системы координат в небольшой окрестности L_c можно ввести новые координаты (X_1, X_2) , в которых система (4) записывается как

$$\frac{\partial u}{\partial X_1} = \lambda, \quad \frac{\partial u}{\partial X_2} = 0.$$

Следовательно, λ не зависит от X_2 .

В силу аналитичности функции $\lambda(x_1, x_2)$ такие координаты существуют на всей плоскости.

Лемма доказана.

Автор благодарит В. В. Козлова за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В. В., Трещев Д. В. // Матем. сб. 1988. Т. 135. № 1. С. 119–138.
2. Козлов В. В., Денисова Н. В. // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 9. С. 125–148.
3. Болотин С. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 6. С. 75–82.