Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Мирзоев, И. Дж. Джафаров, О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 470–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:23:23

О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных

С. С. Мирзоев, И. Дж. Джафаров

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – нормальный обратимый оператор в H . Тогда оператор A имеет полярное разложение $A = UC$, где U – унитарный, а C – положительно-определенный самосопряженный операторы в H . Обозначим через $H_\gamma (\gamma \geq 0)$ шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором C , т.е.

$$H_\gamma = D(C^\gamma), \quad (\varphi, \psi)_\gamma = (C^\gamma \varphi, C^\gamma \psi), \quad \varphi, \psi \in D(C^\gamma), \quad \gamma \geq 0.$$

При $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$.

Пусть $t \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ и положим $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}_+^2$ следующую краевую задачу:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A^2 u + A_{1,0} \frac{\partial u}{\partial t} + A_{0,1} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{1,1} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + A_{0,0} u = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^2, \quad (1)$$

$$u(0, x) = 0, \quad (2)$$

где $f(t, x), u(t, x)$ – функции, определенные почти всюду в $\mathbb{R}_+^2$, со значениями в H , а операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

- а) A – нормальный обратимый оператор, спектр которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon, 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2} \right\};$$

- б) $B_{1,0} = A_{1,0} A^{-1}$, $B_{0,1} = A_{0,1} A^{-1}$, $B_{1,1} = A_{1,1}$, $B_{0,0} = A_{0,0} A^{-2}$ суть ограниченные операторы в H .

Обозначим через $L_2(\mathbb{R}_+^2; H)$ гильбертово пространство измеримых H -значных функций $f(t, x)$, для которых

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} \|f(t, x)\|^2 dt dx \right)^{1/2} < +\infty.$$

Через $D(\mathbb{R}_+^2; H_2)$ обозначим линейал, состоящий из бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Определим пространство $W_2^2(\mathbb{R}_+^2; H)$ как пополнение $D(\mathbb{R}_+^2; H_2)$ по норме

$$\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+^2; H)} = \left(\sum_{j=0}^{2-k} \sum_{k=0}^2 \left\| C^{2-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial t^k \partial x^j} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)}^2 \right)^{1/2}.$$

Обозначим

$$\dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+^2; H) = \{u : u(t, x) \in W_2^2(\mathbb{R}_+^2; H), u(0, x) = 0\}.$$

Очевидно, этот линейал является собственным подпространством в $W_2^2(\mathbb{R}_+^2; H)$. При выполнении условия б) для функций $u(x, t) \in W_2^2(\mathbb{R}_+^2; H)$ каждое слагаемое в правой части уравнения (1) корректно определено и является функцией из $L_2(\mathbb{R}_+^2; H)$. Пусть правая часть $f \in L_2(\mathbb{R}_+^2; H)$. Функцию $u(x, t) \in W_2^2(\mathbb{R}_+^2; H)$ будем называть *регулярным решением* уравнения (1), если равенство (1) выполняется почти при всех $t > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Задачу (1), (2) назовем *регулярно разрешимой*, если для любой функции $f(t, x) \in L_2(\mathbb{R}_+^2; H)$ существует функция $u(x, t) \in \dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+^2; H)$, которая является регулярным решением уравнения (1), причем имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+^2; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)},$$

где постоянная не зависит от f .

В данной работе мы укажем достаточные условия, которые обеспечивают регулярную разрешимость задачи (1), (2). Эти условия выражаются только коэффициентами операторно-дифференциального уравнения (1). Отметим, что в одномерном случае разрешимость начально-краевых задач исследована многими авторами (см., например, [1]–[8]), в двумерном же случае, когда A – самосопряженный положительно-определенный оператор – в работе [9]. На всей плоскости разрешимость уравнения (1) рассмотрена, например, в работах [10]–[12].

Обозначим через

$$\begin{aligned} P_0 u &= -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A^2 u, & u(t, x) &\in \dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+^2; H), \\ P_1 u &= A_{1,0} \frac{\partial u}{\partial t} + A_{0,1} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{1,1} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + A_{0,0} u, & u(t, x) &\in \dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+^2; H). \end{aligned}$$

Сначала исследуем регулярную разрешимость задачи

$$P_0 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A^2 u = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^2, \quad (3)$$

$$u(0, x) = 0. \quad (4)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняется условие а). Тогда задача (3), (4) регулярно разрешима.

Из этой теоремы следует, что оператор $P_0: \dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+^2; H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+^2; H)$ является изоморфизмом. Поэтому в пространстве $\dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+^2; H)$ нормы $\|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)}$ и $\|u\|_{\dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+^2; H)}$ эквивалентны.

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняется условие а). Положим

$$\begin{aligned} c_0(\varepsilon) &= \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \pi/4, \\ 1/\sin 2\varepsilon & \text{при } \pi/4 < \varepsilon < \pi/2, \end{cases} \\ c_1(\varepsilon) &= \frac{1}{2 \cos \varepsilon} \quad \text{при } 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}, \\ c_2(\varepsilon) &= \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \pi/4, \\ 1/\sqrt{2} \cos \varepsilon & \text{при } \pi/4 < \varepsilon < \pi/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда при любом $u \in \dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+^2; H)$ имеют место следующие оценки:

$$\|A^2 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)} \leq c_0(\varepsilon) c_2(\varepsilon) \|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)}, \quad (5)$$

$$\left\| A \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)} \leq c_0^{1/2}(\varepsilon) c_1(\varepsilon) \|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)}, \quad (6)$$

$$\left\| A \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)} \leq c_1(\varepsilon) c_2(\varepsilon) \|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)}, \quad (7)$$

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)} \leq c_0^{1/2}(\varepsilon) c_1(\varepsilon) \|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2; H)}. \quad (8)$$

Из (5)–(8) получаем, что оператор $P \equiv P_0 + P_1 : \dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+^2; H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+^2; H)$ ограничен.

В результате, можно установить достаточные условия регулярной разрешимости задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия а), б) и имеет место неравенство

$$\alpha(\varepsilon) = c_0^{1/2}(\varepsilon) c_1(\varepsilon) (\|B_{1,0}\| + \|B_{1,1}\|) + c_1(\varepsilon) c_2(\varepsilon) \|B_{0,1}\| + c_0(\varepsilon) c_2(\varepsilon) \|B_{0,0}\| < 1,$$

где числа $c_0(\varepsilon)$, $c_1(\varepsilon)$, $c_2(\varepsilon)$ определяются в теореме 2. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Отметим, что условия теоремы 3 о регулярной разрешимости точны при каждом $\varepsilon \in [0, \pi/2)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть A – положительно-определенный самосопряженный оператор и имеет место неравенство

$$\alpha = \frac{1}{2} (\|B_{1,0}\| + \|B_{0,1}\| + \|B_{1,1}\|) + \|B_{0,0}\| < 1.$$

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Г. Гасымов, Докл. АН СССР, **199**:4 (1971), 747–750. [2] М. Г. Гасымов, С. С. Мирзоев, Дифференц. уравнения, **28**:4 (1992), 651–661. [3] Ю. А. Дубинский, Матем. сб., **90**:1 (1973), 3–22. [4] А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликов, Функци. анализ и его прил., **17**:2 (1983), 38–61. [5] С. С. Мирзоев, Докл. АН СССР, **273**:2 (1983), 292–295. [6] А. А. Шкаликов, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **14**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989, 140–224. [7] А. Р. Алиев, С. С. Мирзоев, Функци. анализ и его прил., **44**:3 (2010), 63–65. [8] С. С. Мирзоев, Ф. А. Гулиева, Матем. заметки, **86**:5 (2009), 797–800. [9] С. С. Мирзоев, Тр. ИММ НАН Азербайджана, **8** (1998), 154–161. [10] Г. И. Асланов, Международный семинар “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” (пятнадцатая сессия совместных заседаний семинара им. И. Г. Петровского и Московского математического общества 19–22 января 1993 года), УМН, **48**:4 (1993), 172–173. [11] Г. И. Асланов, Докл. РАН, **337**:1 (1994), 10–13. [12] Х. В. Ягубова, Вестн. Бакинского ун-та. Сер. физ.-матем. наук, 1998, № 3, 94–101.

С. С. Мирзоев

Бакинский государственный университет, г. Баку

E-mail: mirzoyevsabir@mail.ru

Поступило

28.06.2011

И. Дж. Джафаров

Институт математики и механики

НАН Азербайджана, г. Баку