Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Зархин, Многочлены от одной переменной и ранги некоторых касательных отображений, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 539–550

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 09:08:58

Многочлены от одной переменной и ранги некоторых касательных отображений

Ю. Г. Зархин

Мы изучаем отображение, переводящее приведенный комплексный многочлен $f(x)$ степени n без кратных корней в набор из n значений его производной в его корнях. Дается ответ на вопрос, поставленный Ю. С. Ильяшенко.

Библиография: 4 названия.

1. Определения, обозначения, формулировки. Обозначим через $\mathbb{C}$ поле комплексных чисел. Речь пойдет о вычислении ранга следующего отображения.

Рассмотрим n -мерное комплексное многообразие $P_n \subset \mathbb{C}^n$ всех приведенных комплексных многочленов степени $n \geq 2$

$$f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

с коэффициентами $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ и без кратных корней. Корни многочлена $f(x)$ мы обозначим через

$$\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\},$$

как-то их упорядочив; локально (по a) каждый α_i можно выбрать (с помощью теоремы о неявной функции) как гладкую (однозначную) функцию от коэффициентов a . В дальнейшем мы попытаемся продифференцировать эти функции по координатам, не вычисляя корней. И вот наше отображение:

$$M: a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto f'(\alpha) = (f'(\alpha_1), \dots, f'(\alpha_n)) \in \mathbb{C}^n.$$

Допуская вольность обозначений, мы можем считать, что отображение M определено локально на P_n , и писать $M(f)$ вместо $M(a_0, \dots, a_{n-1})$. Пусть

$$dM: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

– соответствующее касательное отображение (в точке $f(x)$). Удобно отождествлять касательное пространство $\mathbb{C}^n$ с пространством всех многочленов $p(x)$ степени $\leq n-1$. Точнее, многочлену $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ сопоставляется касательный вектор $(c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Так, производной $f'(x)$ отвечает касательный вектор

$(a_1, \dots, (n-1)a_{n-1}, n) \in \mathbb{C}^n$. Обозначим через $W = W(f)$ комплексное векторное пространство всех многочленов $p(x)$ степени $\leq n-2$ таких, что многочлен

$$R(x) := f''(x)p(x) - f'(x)p'(x)$$

делится на $f(x)$.

ТЕОРЕМА 1.1. Ранг касательного отображения $dM: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ во всех точках многообразия P_n равен $n-1$. Ядро отображения dM всегда содержит производную $f'(x)$ и совпадает с одномерным подпространством $\mathbb{C} \cdot f'(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Нетривиальность ядра отображения dM связана с тем, что для любого (малого) комплексного числа ϵ отображение M переводит многочлены $f(x)$ и $f(x + \epsilon)$ в один и тот же вектор в $\mathbb{C}^n$.

Обозначим через H_n пространство всех приведенных комплексных многочленов $g(x)$ степени $n \geq 2$ таких, что отображение

$$G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z),$$

имеет ровно n неподвижных точек. Ясно, что $g \in H_n$, если и только если многочлен $g(x) - x$ не имеет кратных корней, т.е.

$$g(x) - x \in P_n.$$

Также ясно, что корни $\beta_1, \dots, \beta_n$ многочлена $f(x) = g(x) - x$ — это в точности неподвижные точки отображения G , а соответствующий мультипликатор $g'(\beta_i)$ неподвижной точки β_i совпадает с $f(\beta_i) + 1$.

Рассмотрим определенное локально отображение

$$\text{Mult}: H_n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad g(x) \mapsto (g'(\beta_1), \dots, g'(\beta_n)) = M(g(x) - x) + (1, \dots, 1),$$

сопоставляющее отображению G набор его мультипликаторов.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Касательное отображение $d\text{Mult}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ к мультипликаторному отображению Mult во всех точках многообразия H_n имеет ранг $n-1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Нетривиальность ядра отображения $d\text{Mult}$ связана с тем, что для любого (малого) комплексного числа ϵ отображения $z \mapsto g(z)$ и $z \mapsto g(z + \epsilon) - \epsilon$ сопряжены и имеют один и тот же набор мультипликаторов.

При доказательстве теоремы 1.1 мы используем следующее чисто алгебраическое утверждение, представляющее некоторый самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $n \geq 2$ — целое число, $f(x)$ — комплексный многочлен степени n . Предположим, что существует ненулевой комплексный многочлен $p(x)$ степени $\leq n-2$ такой, что $f''(x)p(x) - f'(x)p'(x)$ делится на $f(x)$. Тогда

- (i) $n \geq 4$, $\deg(p) \geq 2$;
- (ii) найдется квадратный многочлен $\tilde{p}(x)$ такой, что $f(x)$ делится на $\tilde{p}(x)^2$; в частности, y $f(x)$ есть кратный корень;
- (iii) если $\deg(p) = 2$, то $p(x)$ делит и $f(x)$ и $f'(x)$; в частности, все корни многочлена $p(x)$ являются кратными корнями многочлена $f(x)$;
- (iv) если $n = 4$, то $\deg(p) = 2$ и найдется ненулевое комплексное число c такое, что $f(x) = c \cdot p(x)^2$.

2. Дифференцирование. Первый естественно возникающий вопрос – как работать с отображением M ? Мы интерпретируем нумерацию корней как выбор изоморфизма коммутативных полупростых $\mathbb{C}$ -алгебр

$$\psi: \Lambda = \mathbb{C}[x]/f(x)\mathbb{C}[x] \cong \mathbb{C}^n, \quad u(x) + f(x) \cdot \mathbb{C}[x] \mapsto u(\alpha) := (u(\alpha_1), \dots, u(\alpha_n)),$$

и проводим все вычисления, включая дифференцирование по a , для функций, принимающих значения в алгебре Λ , несмотря на то, что алгебра эта зависит от коэффициентов a ! (Впрочем, ее класс изоморфизма от коэффициентов не зависит.) Естественно, дифференцируя, мы будем пользоваться формулой Лейбница и тем, что $f(x) = 0$ в Λ . В последующих выкладках мы часто будем под многочленами понимать их образы в Λ (т.е. наборы их значений в корнях полинома $f(x)$, про которые мы будем стараться не вспоминать). Заметим, что отсутствие кратных корней означает, что производная $f'(x)$ – обратимый элемент в алгебре Λ . Отметим также, что $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ является образом (при изоморфизме ψ) независимой переменной x .

Первое, что хотелось бы вычислить, – это производные $d\alpha/da_i$. Так как $f(\alpha) = 0$, то $df(\alpha)/da_i = 0$. Имеем

$$\frac{df(\alpha)}{da_i} = \frac{\partial f}{\partial a_i}(\alpha) + f'(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{da_i}.$$

Поскольку $\partial f/\partial a_i = x^i$, мы получаем, что

$$0 = \alpha^i + f'(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{da_i},$$

что дает нам

$$\frac{d\alpha}{da_i} = -[f'(\alpha)]^{-1} \alpha^i.$$

Отсюда вытекает, что для любого многочлена $u(x)$ (коэффициенты которого могут зависеть от a)

$$\frac{du(\alpha)}{da_i} = \frac{\partial u}{\partial a_i}(\alpha) + u'(\alpha) \times \{-[f'(\alpha)]^{-1} \alpha^i\}.$$

Нас интересует случай, когда

$$u(x) = f'(x) = nx^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} ia_i x^{i-1}.$$

Получаем

$$\frac{df'(\alpha)}{da_i} = i\alpha^{i-1} - [f'(\alpha)]^{-1} \alpha^i f''(\alpha)$$

(естественно, при $i = 0$ первый член пропадает).

Собственно, ранг отображения dM в точке $f(x)$ – это размерность подпространства алгебры Λ , порожденного n элементами $(df'/da_i)(\alpha)$. Пусть набор из n комплексных чисел $c_0, \dots, c_{n-1}$ таков, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{df'}{da_i}(\alpha) = 0 \quad \text{в } \Lambda.$$

Если мы положим

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i,$$

то легко видеть, что

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{n-1} i c_i x^{i-1}$$

и в алгебре Λ

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{df'}{da_i}(\alpha) = p'(\alpha) - [f'(\alpha)]^{-1} p(\alpha) f''(\alpha).$$

Умножая (без потери общности) полученное нами условие на обратимый элемент $f'(\alpha)$, мы получаем эквивалентное условие, состоящее в том, что

$$f'(\alpha) p'(\alpha) - p(\alpha) f''(\alpha) = 0 \quad \text{в } \Lambda.$$

Иначе говоря, многочлен $f'(x)p'(x) - p(x)f''(x)$ делится на $f(x)$. Теперь ясно, что ранг касательного отображения dM в точке $f(x)$ равен

$$n - \left\{ \begin{array}{l} \text{размерность пространства многочленов } p(x) \text{ степени } \leq n-1 \text{ таких,} \\ \text{что } f'(x)p'(x) - p(x)f''(x) \text{ делится на } f(x) \end{array} \right\}.$$

Очевидно, что это пространство содержит ненулевой многочлен $f'(x)$, из чего следует, что ранг касательного отображения dM всегда не превосходит $n-1$. Поскольку степень $f'(x)$ равна $n-1$, то легко видеть, что ядро касательного отображения dM в точке $f(x)$ совпадает с прямой суммой $\mathbb{C} \cdot f'(x) \oplus W(f)$. Отсюда немедленно вытекает, что ранг касательного отображения dM в точке $f(x)$ равен

$$(n-1) - \dim_{\mathbb{C}}(W).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1 (по модулю теоремы 1.5). Поскольку $f(x)$ не имеет кратных корней, то из теоремы 1.5 вытекает, что

$$W = W(f) = \{0\},$$

и, стало быть, ранг касательного отображения dM в точке $f(x)$ равен

$$(n-1) - \dim_{\mathbb{C}}(W) = n-1-0 = n-1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Априори ясно, что множество многочленов $f(x)$, для которых отображение dM достигает максимального ранга, является непустым открытым по Зарискому подмножеством в P_n . Поэтому если интересоваться только ситуацией *общего положения*, то достаточно убедиться в том, что ранг равен $n-1$ хотя бы для одного многочлена $f(x)$: отсюда бы вытекало, что ранг равен $n-1$ для *типичных* многочленов, т.е. для всех многочленов, принадлежащих некоторому непустому открытому по Зарискому множеству в P_n .

3. Алгебра многочленов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Итак, пусть $f(x)$ – комплексный многочлен степени $n \geq 2$, а $p(x)$ – ненулевой многочлен степени $\leq n - 2$ такой, что

$$R(x) := f''(x)p(x) - f'(x)p'(x)$$

делится на $f(x)$. Не ограничивая общности, мы можем считать $f(x)$ и $p(x)$ приведенными, т.е. считать их старшие коэффициенты равными 1. Отметим, что в выражении $f''(x)p(x) - f'(x)p'(x)$ не происходит “сокращения степеней” (поскольку степени многочленов $p(x)$ и $f'(x)$ не совпадают). Действительно, $\deg(R) \leq n + \deg(p) - 2$, а коэффициент при $x^{n+\deg(p)-2}$ у многочлена $R(x)$ равен

$$n(n-1) - n \deg(p) = n[(n-1) - \deg(p)] \neq 0,$$

поскольку $\deg(p) \leq n - 2 < n - 1$. Отсюда вытекает, что $R(x) \neq 0$, а

$$\deg(R) = n - 2 + \deg(p) \leq n - 2 + n - 2 = 2n - 4.$$

(При этом $n[(n-1) - \deg(p)]$ – старший коэффициент многочлена $R(x)$.) Поскольку $R(x)$ – ненулевой многочлен, делящийся на $f(x)$,

$$n = \deg(f) \leq \deg(R) = n - 2 + \deg(p),$$

поэтому $\deg(p) \geq 2$ и, стало быть,

$$n - 2 \geq \deg(p) \geq 2,$$

откуда вытекает, что $n \geq 4$. Это доказывает утверждение (i). Также ясно, что если $n = 4$, то $\deg(p) = 2$.

Предположим теперь, что $p(x)$ – (приведенный) квадратный многочлен. Тогда

$$\deg(R) = n - 2 + \deg(p) = n - 2 + 2 = n = \deg(f)$$

и, значит, существует ненулевая константа h_0 такая, что

$$R(x) = f''(x)p(x) - f'(x)p'(x) = h_0 f(x).$$

Поскольку $f(x)$ приведен, а старший коэффициент многочлена $R(x)$ равен

$$n[(n-1) - \deg(p)] = n(n-1-2) = n(n-3),$$

то $h_0 = n(n-3)$. Мы получаем, что

$$R(x) = f''(x)p(x) - f'(x)p'(x) = n(n-3)f(x).$$

Дифференцируя, получаем

$$R'(x) = [f'''(x)p(x) + f''(x)p'(x)] - [f''(x)p'(x) + f'(x)p''(x)] = n(n-3)f'(x).$$

Поскольку $p(x)$ – приведенный квадратный многочлен, $p''(x) = 2$. Учитывая это, раскрывая скобки и приводя подобные члены в формуле для $R'(x)$, получаем

$$R'(x) = f'''(x) \cdot p(x) - 2f'(x) = n(n-3)f'(x),$$

что дает нам

$$f'''(x) \cdot p(x) = (n^2 - 3n + 2)f'(x).$$

Мы получаем, что $p(x)$ делит $f'(x)$. (Напомним, что $n \geq 4$ и, значит, $n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2) \neq 0$.) Поскольку

$$f''(x) \cdot p(x) - f'(x)p'(x) = n(n-3)f(x),$$

мы получаем, что $p(x)$ делит $f(x)$. (Напомним, что $n \geq 4$ и, значит, $n(n-3) \neq 0$.) Это доказывает утверждение (iii). Также ясно, что если (квадратный многочлен) $p(x)$ не имеет кратных корней, то $f(x)$ делится на $p(x)^2$. Ну а если $p(x)$ имеет двукратный корень β , т.е. $p(x) = (x - \beta)^2$, то $f(x)$ делится на $(x - \beta)^3$.

Докажем утверждения (ii) и (iv) теоремы 1.5. Если все корни многочлена $f(x)$ кратные, то утверждение (ii) верно. Предположим, что $f(x)$ имеет простой корень, и обозначим его через α . Тогда $f'(\alpha) \neq 0$ и существует комплексный многочлен $f_1(x)$ степени $n-1$ такой, что

$$f(x) = (x - \alpha)f_1(x).$$

Простота корня α означает, что

$$f_1(\alpha) \neq 0, \quad f'(\alpha) \neq 0.$$

Пусть V – двумерное векторное (под)пространство многочленов, порожденное $f'(x)$ и $p(x)$. (Его двумерность вытекает из того, что ненулевые многочлены $f'(x)$ и $p(x)$ имеют разные степени.) Ясно, что степень любого элемента из V не превосходит $n-1$. Также ясно, что для любого $q(x) \in V$ многочлен $f''(x)q(x) - f'(x)q'(x)$ делится на $f(x)$, поскольку это верно для $q(x) = p(x)$ и для $q(x) = f'(x)$. Выберем в двумерном пространстве V ненулевой многочлен $q(x)$ такой, что

$$q(\alpha) = 0.$$

Ясно, что

$$q(x) \notin \mathbb{C} \cdot f'(x), \quad \deg(q) \leq n-1.$$

Имеем

$$f''(x)q(x) - f'(x)q'(x) = h(x)f(x) \quad (*)$$

для некоторого комплексного многочлена $h(x)$. Поскольку

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) \neq 0, \quad q(\alpha) = 0,$$

мы заключаем, что $q'(\alpha) = 0$, т.е. α – кратный корень (ненулевого) многочлена $q(x)$ и, стало быть, существует ненулевой комплексный многочлен $q_1(x)$ такой, что

$$q(x) = (x - \alpha)^2 q_1(x), \quad \deg(q_1) = \deg(q) - 2 \leq (n-1) - 2 = \deg(f_1) - 2.$$

Докажем, что $f_1''(x)q_1(x) - f_1'(x)q_1'(x)$ делится на $f_1(x)$ (и используем индукцию по n).

Имеем

$$f(x) = (x - \alpha)f_1(x), \quad f'(x) = f_1(x) + (x - \alpha)f_1'(x),$$

$$f''(x) = 2f_1'(x) + (x - \alpha)f_1''(x),$$

$$q(x) = (x - \alpha)^2 q_1(x), \quad q'(x) = (x - \alpha)^2 q_1'(x) + 2(x - \alpha)q_1(x).$$

Подставляя все эти выражения в формулу (*), получаем

$$\begin{aligned} & [2f_1'(x) + (x - \alpha)f_1''(x)](x - \alpha)^2q_1(x) \\ & - [f_1(x) + (x - \alpha)f_1'(x)][(x - \alpha)^2q_1'(x) + 2(x - \alpha)q_1(x)] \\ & = h(x)(x - \alpha)f_1(x). \end{aligned}$$

Поделив обе части на $(x - \alpha)$, получаем

$$\begin{aligned} & [2f_1'(x) + (x - \alpha)f_1''(x)]q_1(x)(x - \alpha) - [f_1(x) + (x - \alpha)f_1'(x)][(x - \alpha)q_1'(x) + 2q_1(x)] \\ & = h(x)f_1(x). \end{aligned}$$

Переносим вправо все члены, содержащие $f_1(x)$, получаем

$$\begin{aligned} & [2f_1'(x) + (x - \alpha)f_1''(x)]q_1(x)(x - \alpha) - (x - \alpha)f_1'(x)[(x - \alpha)q_1'(x) + 2q_1(x)] \\ & = \{h(x) + [(x - \alpha)q_1'(x) + 2q_1(x)]\}f_1(x). \end{aligned}$$

Положив

$$h_1(x) := h(x) + [(x - \alpha)q_1'(x) + 2q_1(x)],$$

получаем

$$\begin{aligned} & [2f_1'(x) + (x - \alpha)f_1''(x)]q_1(x)(x - \alpha) - (x - \alpha)f_1'(x)[(x - \alpha)q_1'(x) + 2q_1(x)] \\ & = h_1(x)f_1(x). \end{aligned}$$

Левая часть делится на $x - \alpha$, в то время как $f_1(x)$ (из правой части) на $x - \alpha$ не делится. Это означает, что найдется комплексный многочлен $h_2(x)$ такой, что $h_1(x) = (x - \alpha)h_2(x)$ и

$$[2f_1'(x) + (x - \alpha)f_1''(x)]q_1(x) - f_1'(x)[(x - \alpha)q_1'(x) + 2q_1(x)] = h_2(x)f_1(x).$$

Раскрывая скобки в левой части и приводя подобные члены, получаем

$$(x - \alpha)f_1''(x)q_1(x) - f_1'(x)(x - \alpha)q_1'(x) = h_2(x)f_1(x).$$

Опять левая часть делится на $x - \alpha$, а $f_1(x)$ (из правой части) на $x - \alpha$ не делится. Это означает, что найдется комплексный многочлен $h_3(x)$ такой, что $h_2(x) = (x - \alpha) \times h_3(x)$ и

$$f_1''(x)q_1(x) - f_1'(x)q_1'(x) = h_3(x)f_1(x).$$

Рассмотрим теперь отдельно случаи $n = 4$ и $n > 4$.

Пусть $n = 4$. Тогда $\deg(f_1) = 4 - 1 = 3$ и мы получаем противоречие с уже доказанным утверждением (i). Стало быть, все корни многочлена $f(x)$ являются кратными, откуда легко вытекает, что либо $f(x)$ имеет два двойных корня, либо один корень кратности 4. (В частности, $f(x)$ не имеет трехкратных корней.) Мы также знаем, что $\deg(p) = 2$, а $p(x)$ делит и $f(x)$ и $f'(x)$. Мы уже знаем, что если квадратный многочлен $p(x)$ не имеет кратных корней, то $f(x)$ делится на $p(x)^2$, а сравнение степеней и старших коэффициентов дает нам равенство $f(x) = p(x)^2$. С другой стороны, если у $p(x)$ есть двукратный корень β , то мы знаем, что $p(x) = (x - \beta)^2$ и $f(x)$ делится на $(x - \beta)^3$. Поскольку у $f(x)$ нет трехкратных корней,

приведенный многочлен $f(x) = (x - \beta)^4$. Поскольку $p(x) = (x - \beta)^2$, мы получаем, что $f(x) = p(x)^2$. Это доказывает утверждение (iv). Заодно, это доказывает и утверждение (ii) для $n = 4$.

Пусть $n > 4$. Тогда $\deg(f_1) = n - 1$. Используя индукцию по n , мы можем теперь применить утверждение (ii) теоремы 1.5 к $n - 1$ (вместо n) и многочленам f_1 и q_1 (вместо f и p соответственно) и получить, что существует квадратный многочлен $\tilde{p}(x)$ такой, что $f_1(x)$ делится на $\tilde{p}(x)^2$. Отсюда вытекает, что $f(x) = (x - \alpha)f_1(x)$ также делится на $\tilde{p}(x)^2$. Теперь доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Анализ доказательства теоремы 1.5 показывает, что оно проходит для многочленов (не только над произвольным полем нулевой характеристики, но и) над полями характеристики $> n$. В частности, утверждение теоремы 1.5 справедливо для многочленов над полями положительной характеристики $> n$.

ПРИМЕР 3.2. Пусть $p(x)$ – приведенный квадратный многочлен. Положим $n = 4$ и $f(x) = p(x)^2$. Имеем

$$\begin{aligned} p''(x) &= 2, & f'(x) &= 2p(x)p'(x), \\ f''(x) &= 2p'(x)^2 + 2p(x)p''(x) = 2p'(x)^2 + 4p(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$f''(x)p(x) - f'(x)p'(x) = [2p'(x)^2 + 4p(x)]p(x) - 2p(x)p'(x)p'(x) = 4p(x)^2 = 4f(x).$$

ПРИМЕР 3.3. Пусть d – произвольное комплексное число. Положим $n = 5$,

$$\begin{aligned} f(x) &:= (x + d) \left(x^2 - \frac{d}{2}x + \frac{9}{4}d^2 \right)^2 = x^5 + \frac{15}{4}d^2x^3 + \frac{5}{2}d^3x^2 + \frac{45}{16}d^4x + \frac{81}{16}d^5, \\ p(x) &:= x^3 + 2d^2x + \frac{9}{8}d^3. \end{aligned}$$

Тогда

$$f''(x)p(x) - f'(x)p'(x) = 5x \cdot f(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Для многочлена $f(x) = x^n - 1$, не имеющего кратных корней, можно дать более простое доказательство того, что *не существует* ненулевого многочлена $p(x)$ степени $\leq n - 2$ такого, что

$$R(x) = f''(x)p(x) - f'(x)p'(x)$$

делится на $f(x)$, т.е. $R(x) = f(x)h(x)$ для некоторого многочлена $h(x)$. Действительно, предположим, что такой $p(x)$ существует; мы можем считать его приведенным. Легко видеть (см. самое начало доказательства теоремы 1.5), что

$$R(x) \neq 0, \quad \deg(R) \leq 2n - 4.$$

Отсюда вытекает, что $h(x) \neq 0$ и

$$\deg(h) = \deg(R) - n \leq n - 4.$$

Подставляя в формулу для $R(x)$ явные формулы для $f(x)$ и его первой и второй производных, получаем

$$n(n-1)x^{n-2}p(x) - nx^{n-1}p'(x) = h(x)(x^n - 1).$$

Отсюда вытекает, что ненулевой многочлен $h(x)$ делится на x^{n-2} и, стало быть, $\deg(h) \geq n-2$, что неверно. Полученное противоречие доказывает, что таких $p(x)$ нет и, стало быть, $W(f) = \{0\}$, т.е. касательное отображение dM в точке $f(x) = x^n - 1$ имеет ранг $n-1$. Согласно замечанию 2.1 отсюда немедленно следует, что ранг отображение dM равен $n-1$ для *типичных* многочленов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Прочитав предыдущие варианты этой статьи, Рис [1] и (независимо и одновременно) Вик. С. Куликов предложили более прямой подход к доказательству теоремы 1.1. А именно, они рассмотрели матрицу Якоби отображения

$$\widetilde{M}: (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto (f'(\alpha_1), \dots, f'(\alpha_n))$$

и доказали, что ее первый главный $((n-1) \times (n-1))$ -минор равен

$$c \prod_{1 \leq i < j < n} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

где c – некоторая константа, не зависящая от $f(x)$. (Для доказательства теоремы 1.1 достаточно убедиться в том, что $c \neq 0$.) Рис [1] доказал, что

$$c = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} (n-1)!.$$

Подход Куликова излагается в дополнении, которое он любезно согласился написать для этой статьи.

Эта заметка возникла при попытке ответить на вопрос, поставленный Ю. С. Ильяшенко в связи с работами [2], [3]. (На самом деле его вопрос относился к рангу отображения dM для типичных многочленов $f(x)$.) Я благодарен ему за его вопросы, стимулирующие обсуждения и интерес, проявленный к этой работе. Я также благодарю Э. Э. Шноля, чьи работы, лекции и семинары разбудили во мне интерес к алгебраическим аспектам обыкновенных дифференциальных уравнений. Я признателен В. Л. Попову и Вик. С. Куликову, прочитавшим предварительный вариант статьи и сделавшим ряд полезных замечаний.

4. Дополнение¹. Напомним (см. замечания 2.1 и 3.4), что утверждение о том, что дифференциал dM имеет в общей точке ранг $n-1$, доказывается значительно проще, чем теорема 1.1 в полном объеме. Это позволяет вывести теорему 1.1, используя следующее представляющее самостоятельный интерес утверждение, доказательство которого требует минимум вычислений. Рассмотрим многочлен

$$f(x, \alpha) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i,$$

¹Написано Вик. С. Куликовым, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, E-mail: kulikov@mi.ras.ru.

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Определим отображение $\widetilde{M}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, положив

$$\widetilde{M}(\alpha) = (f'_x(\alpha_1, \alpha), \dots, f'_x(\alpha_n, \alpha)),$$

и пусть D – матрица Якоби отображения $\widetilde{M}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Ранг матрицы $\text{rg } D \leq n - 1$. Вектор $v = (1, \dots, 1)$ является собственным вектором матрицы D с собственным значением 0. Если $n > 1$, то для любого i , $1 \leq i \leq n$, минор $M_{i,i}$ матрицы D равен

$$c \prod_{j < k, j \neq i, k \neq i} (\alpha_k - \alpha_j)^2,$$

где c – некоторая не равная нулю константа.

Очевидно, теорема 1.1 является следствием теоремы 4.1. Действительно, во-первых, $M_{i,i} \neq 0$ в точке, координаты которой попарно различны. Во-вторых, для любого α прямая $l_\alpha(t) = \alpha - t(1, \dots, 1)$ лежит в слое отображения $\widetilde{M}$. Следовательно, кривая $f(x+t)$ лежит в слое отображения M , касательным вектором в точке $f(x)$ к которой является вектор $f'(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Отображение $\widetilde{M}$ в координатах $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ задается многочленами

$$y_i = f'_x(\alpha_i, \alpha) = (\alpha_i - \alpha_1) \cdots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \cdots (\alpha_i - \alpha_n), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Вычисляя частные производные, легко видеть, что элемент $d_{i,j}$ матрицы D равен

$$d_{i,j} = -\frac{f'_x(\alpha_i, \alpha)}{(\alpha_i - \alpha_j)}, \quad j \neq i, \quad d_{i,i} = \sum_{j \neq i} \frac{f'_x(\alpha_i, \alpha)}{(\alpha_i - \alpha_j)}.$$

Следовательно, сумма всех столбцов матрицы D равна нулю. Поэтому $\det D = 0$ и вектор $v = (1, \dots, 1)$ является собственным вектором матрицы D с собственным значением 0.

Покажем, что минор $M_{i,i}$ матрицы D равен

$$c \prod_{j < k, j \neq i, k \neq i} (\alpha_k - \alpha_j)^2.$$

При $n = 2$ это очевидно.

Пусть $n > 2$. Заметим прежде всего, что $M_{i,i}$ является многочленом от переменных α_j степени $(n-1)(n-2)$. Кроме того, легко видеть, что миноры $M_{i,i}$ инвариантны относительно следующих преобразований $\sigma_{j,k}$: перестановка местами строк с номерами j и k с последующей перестановкой столбцов с теми же номерами и заменой $\alpha_j \leftrightarrow \alpha_k$. Так как перестановки двух строк и двух столбцов в матрице не меняют ее определитель, то $M_{i,i}$ является симметрической функцией от переменных α_j , $j \neq i$. Далее, ограничим отображение $\widetilde{M}$ на гиперплоскость $\alpha_i = \text{const}$ и рассмотрим композицию с проекцией на гиперплоскость

$$y_i = 0: (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n).$$

Обозначим полученное отображение через

$$\widetilde{M}_i: \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}.$$

Очевидно, матрица Якоби отображения $\widetilde{M}_i$ совпадает с матрицей D_i , полученной из D вычеркиванием i -й строки и i -го столбца. Легко видеть, что для любой тройки i, j, k попарно различных чисел образ гиперплоскости $\alpha_j = \alpha_k$ при отображении $\widetilde{M}_i$ имеет коразмерность ≥ 2 , так как он лежит в пересечении гиперплоскостей $y_j = 0$ и $y_k = 0$. Следовательно, якобиан отображения $\widetilde{M}_i$ равен нулю при $\alpha_j = \alpha_k$ и любом значении α_i . Но, с другой стороны, якобиан отображения $\widetilde{M}_i$ совпадает с $M_{i,i}$ и, следовательно, $M_{i,i}$ делится на $\alpha_j - \alpha_k$. Из симметричности многочлена $M_{i,i}$ от переменных $\alpha_j, j \neq i$, следует, что $M_{i,i}$ делится на $(\alpha_j - \alpha_k)^2$ для любой тройки i, j, k попарно различных чисел. А так как $\deg(M_{i,i}) = (n-1)(n-2)$, то

$$M_{i,i} = c \prod_{j < k, j \neq i, k \neq i} (\alpha_k - \alpha_j)^2$$

для некоторой константы c . Легко видеть (так как вектор $(1, \dots, 1)$ не является касательным к гиперплоскости $\alpha_i = \text{const}_i$), что $c \neq 0$, поскольку дифференциал dM (и, следовательно, $d\widetilde{M}$) имеет в общей точке ранг $n-1$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Образ отображения $\widetilde{M}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ лежит в неприводимой гиперповерхности S_{n-1} , заданной в $\mathbb{C}^n$ уравнением*

$$\sum_{i=1}^n y_1 \cdots y_{i-1} y_{i+1} \cdots y_n = 0.$$

Образ $\widetilde{M}(\mathbb{C}^n)$ всюду плотен в S_{n-1} в комплексной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неприводимость гиперповерхности S_{n-1} следует из неприводимости многочлена

$$s_{n-1} = \sum_{i=1}^n y_1 \cdots y_{i-1} y_{i+1} \cdots y_n,$$

которая легко проверяется. Отображение $\widetilde{M}$ задано многочленами

$$y_1 = f'_x(\alpha_1, \alpha), \quad \dots, \quad y_n = f'_x(\alpha_n, \alpha).$$

Рассмотрим s_{n-1} как многочлен от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, подставив вместо y_i многочлены $f'_x(\alpha_i, \alpha)$. Имеем: s_{n-1} является однородным симметрическим многочленом от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ степени $(n-1)^2$.

Легко видеть, что если $\alpha_i = \alpha_j$, то $y_i = y_j = 0$. Следовательно, многочлен s_{n-1} равен нулю, если $\alpha_i = \alpha_j$, и поэтому он делится на $\alpha_i - \alpha_j$ при любых i и $j, i \neq j$. А так как s_{n-1} — симметрический многочлен, то он делится на $(\alpha_i - \alpha_j)^2$. Следовательно, он делится на многочлен $\prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j)$, степень которого $n(n-1)$. Так как $n(n-1) > (n-1)^2$, то $s_{n-1}(\alpha) \equiv 0$, и поэтому образ $\widetilde{M}(\mathbb{C}^n)$ лежит в S_{n-1} . Пусть X — открытое алгебраическое подмногообразие всех точек с попарно различными координатами в $\mathbb{C}^n$, а $Y \subset S_{n-1}$ — замыкание в топологии Зарисского

(под)множества $\widetilde{M}(X)$. Ясно, Y – неприводимое замкнутое алгебраическое подмногообразие в S_{n-1} ; в частности $\dim(Y) \leq \dim(S_{n-1}) = n - 1$. Из теоремы 6.5 главы 1 книги [4] вытекает, что $\widetilde{M}(X)$ содержит открытое по Зарисскому непустое подмножество в Y ; в частности, оно содержит неособую точку многообразия Y . Из теоремы 4.1 и неприводимости S_{n-1} вытекает, что $\dim(Y) \geq n - 1$. Отсюда следует, что $\dim(Y) = n - 1 = \dim(S_{n-1})$ и, стало быть, $Y = S_{n-1}$. Поскольку образ $\widetilde{M}(\mathbb{C}^n)$ содержит $\widetilde{M}(X)$, мы заключаем, что $\widetilde{M}(\mathbb{C}^n)$ содержит открытое по Зарисскому непустое подмножество в S_{n-1} ; в частности, $\widetilde{M}(\mathbb{C}^n)$ всюду плотен в S_{n-1} в комплексной топологии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Rees, *On a paper by Y. G. Zarhin*, arXiv: [math.AG/1105.4156](https://arxiv.org/abs/math/1105.4156).
- [2] G. T. Buzzard, S. L. Hruska, Yu. Ilyashenko, “Kupka–Smale theorem for polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$ and persistence of heteroclinic intersections”, *Invent. Math.*, **161**:1 (2005), 45–89.
- [3] И. Горбовицкий, *Нетипичность гомоклинических касаний для полиномиальных автоморфизмов $\mathbb{C}^2$, сохраняющих объем*, Дипломная работа, МГУ, М., 2006.
- [4] И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, МЦНМО, М., 2007.

Ю. Г. Зархин

Pennsylvania State University, USA

Институт математических проблем биологии РАН, г. Пущино

E-mail: zarhin@math.psu.edu

Поступило

02.10.2010

Исправленный вариант

25.05.2011