Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Бокаев, Ж. Б. Муканов, Об интегрируемости с весом двойных тригонометрических рядов и двойных рядов по мультипликативным системам с коэффициентами из класса $R_0^+ BVS^2$, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 617–620

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:06:03

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об интегрируемости с весом двойных тригонометрических рядов и двойных рядов по мультипликативным системам с коэффициентами из класса $R_0^+ BVS^2$

Н. А. Бокаев, Ж. Б. Муканов

В работе изучаются вопросы интегрируемости с весом двойных тригонометрических рядов

$$g(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{jk} \sin jx \sin ky, \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{jk} \cos jx \cos ky \quad (2)$$

и двойных рядов по мультипликативным системам Прайса [1]

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y), \quad (3)$$

где $\chi_j(x)$ – функции системы Прайса. Определение этой системы см. в [1]. Напомним лишь, что она определяется ограниченной последовательностью натуральных чисел $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$, по которой строится также последовательность $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \cdots p_n$, $n > 1$.

Напомним следующее определение (см. [2]), введенное Л. Лейндлером. Нуль-последовательность положительных чисел $c := \{c_n\}$ принадлежит классу $R_0^+ BVS$, если неравенство

$$\sum_{n=m}^{\infty} |c_n - c_{n+1}| \leq K \cdot c_m$$

справедливо для всех натуральных m .

В работе [3] Тихонова рассмотрены одномерные ряды по синусам и косинусам. Найдены условия на коэффициенты ряда, которые в зависимости от веса γ являются достаточными или необходимыми для интегрируемости в p -й степени с весом γ . А именно, доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\{\lambda_n\} \in R_0^+ BVS$, $1 \leq p < \infty$ и $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin nx$.

1) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{-p-1+\varepsilon_1}\}$ является почти убывающей, то условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^{p-2} \lambda_n^p < \infty \quad (4)$$

достаточно для выполнения условия

$$\gamma(x) |g(x)|^p \in L(0, \pi). \quad (5)$$

2) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{p-1-\varepsilon_2}\}$ является почти возрастающей, то условие (4) необходимо для выполнения условия (5).

Аналогичная теорема верна и для рядов по косинусам.

В этих теоремах функция $\gamma(x)$ определяется по последовательности $\{\gamma_n\}$ следующим образом: $\gamma(\pi/n) := \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$, и существуют положительные константы A и B такие, что $A\gamma_n \leq \gamma(x) \leq B\gamma_{n+1}$ для $x \in (\pi/(n+1), \pi/n)$. Последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_n\}$ называется *почти возрастающей* (*почти убывающей*), если неравенство $C\gamma_n \geq \gamma_m$ ($\gamma_n \leq C\gamma_m$) справедливо для всех натуральных $n \geq m$.

Здесь и в дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, разные в различных формулах.

Нашей целью является распространение этих результатов на случай двойных рядов вида (1)–(3). Для начала введем двумерный аналог класса $R_0^+ BVS$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что последовательность положительных чисел $a := \{a_{jk}\}$, удовлетворяющая условию $a_{jk} \rightarrow 0$ при $j+k \rightarrow \infty$, принадлежит классу $R_0^+ BVS^2$, если выполняются неравенства

$$\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| \leq C a_{mn}$$

при $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=m}^{\infty} |\Delta_{10} a_{jk}| \leq C a_{mk}$$

при каждом фиксированном k и

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{01} a_{jk}| \leq C a_{jn}$$

при каждом фиксированном j , где

$$\Delta_{11} a_{jk} = a_{jk} - a_{j+1,k} - a_{j,k+1} + a_{j+1,k+1}, \quad \Delta_{10} a_{jk} = a_{jk} - a_{j+1,k}, \quad \Delta_{01} a_{jk} = a_{jk} - a_{j,k+1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_{mn}\}$ *почти возрастает* (*почти убывает*), если для некоторой константы C и для всех натуральных $m_2 \geq m_1$, $n_2 \geq n_1$ выполнено неравенство $C\gamma_{m_2 n_2} \geq \gamma_{m_1 n_1}$ ($\gamma_{m_2 n_2} \leq C\gamma_{m_1 n_1}$).

Определим в случае тригонометрических рядов функцию $\gamma(x, y)$ по последовательности $\{\gamma_{jk}\}$ следующим образом:

$$\gamma\left(\frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right) = \gamma_{jk} \quad \text{для всех } j, k \in \mathbb{N}$$

и существуют положительные константы A и B такие, что имеют место неравенства

$$A\gamma_{jk} \leq \gamma(x, y) \leq B\gamma_{j+1, k+1} \quad \text{для всех } x \in \left(\frac{\pi}{j+1}, \frac{\pi}{j}\right), \quad y \in \left(\frac{\pi}{k+1}, \frac{\pi}{k}\right).$$

В случае же ряда по мультипликативной системе определим две функции $\gamma(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ равенствами

$$\gamma\left(\frac{1}{j}, \frac{1}{k}\right) = \gamma_{jk}, \quad \varphi\left(\frac{1}{m_j}, \frac{1}{m_k}\right) = \varphi_{jk} \quad \text{для всех } j, k \in \mathbb{N}$$

и существуют положительные константы A, B, C и D такие, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} A\gamma_{jk} &\leq \gamma(x, y) \leq B\gamma_{j+1, k+1} && \text{для всех } x \in \left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right), \quad y \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right); \\ C\varphi_{jk} &\leq \varphi(x, y) \leq D\varphi_{j+1, k+1} && \text{для всех } x \in \left(\frac{1}{m_{j+1}}, \frac{1}{m_j}\right), \quad y \in \left(\frac{1}{m_{k+1}}, \frac{1}{m_k}\right). \end{aligned}$$

Используя критерий Коши сходимости двойных рядов, преобразование Абеля и оценки ядер Дирихле для рассматриваемых систем, получим следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если $\{\lambda_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$, то ряды (1), (2) сходятся по Прингсхейму на $[0, \pi)^2$, а ряд (3) – на $[0, 1)^2$.

Основными результатами работы являются следующие утверждения

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g(x, y)$ – сумма ряда (1), $\{\lambda_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$, $1 \leq p < \infty$.

А) Если последовательность положительных чисел $\{\gamma_{jk}\}$ удовлетворяет условию: существуют некоторые $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что последовательность $\{\gamma_{jk} \cdot j^{-1+\varepsilon_1}\}$ почти убывает при каждом фиксированном k и последовательность $\{\gamma_{jk} \cdot k^{-1+\varepsilon_2}\}$ почти убывает при каждом фиксированном j , то из условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{jk}(jk)^{p-2} \cdot \lambda_{jk}^p < \infty \quad (6)$$

следует, что

$$\gamma(x, y)|g(x, y)|^p \in L(0, \pi)^2. \quad (7)$$

В) Если последовательность $\{\gamma_{mn}\}$ удовлетворяет условию: существуют $\varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ такие, что последовательности $\{\gamma_{mn}m^{p-1-\varepsilon_3}\}$ является почти возрастающей при фиксированном n и последовательность $\{\gamma_{mn}n^{p-1-\varepsilon_4}\}$ является почти возрастающей при фиксированном m , то условие (6) необходимо для выполнения условия (7).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x, y)$ – сумма ряда (2), $\{\lambda_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$, $1 \leq p < \infty$.

А) Если последовательность положительных чисел $\{\gamma_{jk}\}$ удовлетворяет условию: существуют некоторые $\varepsilon_5, \varepsilon_6 > 0$ такие, что последовательность $\{\gamma_{jk} \cdot j^{-1+\varepsilon_5}\}$ почти убывает при каждом фиксированном k и последовательность $\{\gamma_{jk} \cdot k^{-1+\varepsilon_6}\}$ почти убывает при каждом фиксированном j , то из условия (6) для коэффициентов ряда (2) следует, что

$$\gamma(x, y)|f(x, y)|^p \in L(0, \pi)^2. \quad (8)$$

В) Если $\{\lambda_{jk}\}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{jk}}{jk} - \frac{\lambda_{j+1, k}}{(j+1)k} \right| \leq \frac{C\lambda_{mn}}{mn} \quad (9)$$

для любых m, n и последовательность γ_{mn} удовлетворяет условию: существуют $\varepsilon_7, \varepsilon_8 > 0$ такие, что последовательность $\{\gamma_{mn}m^{p-1-\varepsilon_7}\}$ является почти возрастающей при фиксированном n и последовательность $\{\gamma_{mn}n^{p-1-\varepsilon_8}\}$ является почти возрастающей при фиксированном m , то условие (6) необходимо для выполнения условия (8).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $h(x, y)$ – сумма ряда (3), $\{\lambda_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$, $1 \leq p < \infty$, и последовательность положительных чисел $\{\gamma_{jk}\}$ удовлетворяет условию: существуют некоторые $\varepsilon_9, \varepsilon_{10} > 0$ такие, что последовательность $\{\gamma_{jk} \cdot j^{-1+\varepsilon_9}\}$ почти убывает при каждом фиксированном k и последовательность $\{\gamma_{jk} \cdot k^{-1+\varepsilon_{10}}\}$ почти убывает при каждом фиксированном j . Тогда из условия (6) для коэффициентов ряда (3) следует, что

$$\gamma(x, y)|h(x, y)|^p \in L(0, 1)^2.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $h(x, y)$ – сумма ряда (3), $\{\lambda_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$, $1 \leq p < \infty$, и последовательность положительных чисел $\{\varphi_{jk}\}$ удовлетворяет условию: существуют некоторые $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} > 0$ такие, что последовательность $\{\varphi_{jk} \cdot m_j^{p-1-\varepsilon_{11}}\}$ почти возрастает при каждом фиксированном k и последовательность $\{\varphi_{jk} \cdot m_k^{p-1-\varepsilon_{12}}\}$ почти возрастает при каждом фиксированном j . Тогда из условия $\varphi(x, y)|h(x, y)|^p \in L(0, 1)^2$ следует, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{jk} m_j^{p-1} m_k^{p-1} \left(\frac{1}{m_j m_k} \sum_{\mu=0}^{m_j-1} \sum_{\nu=0}^{m_k-1} \lambda_{\mu\nu} \right)^p < \infty.$$

Для доказательства этих теорем используются следующие леммы.

ЛЕММА А [4]. Пусть $\{a_n \geq 0\}$, $\{\lambda_n \geq 0\}$, $p \geq 1$. Тогда верны следующие неравенства типа Харди–Литтлвуда:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \right)^p &\leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} a_n^p \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_{\nu} \right)^p, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu} \right)^p &\leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} a_n^p \left(\sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} \right)^p. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Пусть $\{\lambda_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$ и $g(x, y)$ – сумма ряда (1). Тогда имеет место неравенство

$$|g(x, y)| \leq C \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \lambda_{jk} \quad \text{при} \quad x \in \left[\frac{\pi}{m+1}, \frac{\pi}{m} \right), \quad y \in \left[\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n} \right).$$

Аналогичные неравенства имеют место для сумм рядов (2) и (3).

ЛЕММА 2. Если последовательность $\lambda_{mn} \in R_0^+ BVS^2$ и удовлетворяет условию

$$\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{jk}}{jk} - \frac{\lambda_{j+1,k}}{(j+1)k} \right| \leq \frac{C \lambda_{mn}}{mn}$$

для любых m и n , то и $\{\lambda_{mn}/(mn)\} \in R_0^+ BVS^2$.

Доказательство теорем опирается на возможности перехода к повторным рядам при применении неравенств типа Харди–Литтлвуда и других одномерных методов работы [3]. В теореме 5 пришлось наложить дополнительное условие (9) на коэффициенты λ_{jk} , аналог которого не требуется в одномерном случае.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987. [2] L. Leindler, *Anal. Math.*, **28**:4 (2002), 279–286. [3] С. Ю. Тихонов, *Матем. заметки*, **78**:3 (2005), 476–480. [4] М. К. Потапов, М. Бериша, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **26** (40) (1979), 215–228.

Н. А. Бокаев

Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилева, г. Астана
E-mail: bokayev@mail.ru

Поступило

05.07.2011

Ж. Б. Муканов

Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилева, г. Астана
E-mail: mukanovj@mail.ru