Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев, О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 624–628

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:09:35

О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа

А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ – пространство с вероятностной мерой, T – его эндоморфизм, т.е. такое отображение Ω в себя, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$, и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. Для $f \in L_2(\Omega)$ введем эргодические средние

$$A_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

Эргодические теоремы фон Неймана и Биркгофа утверждают существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n f = f^*$: первая теорема по норме $L_2(\Omega)$, вторая – п.в. в Ω . Скорость сходимости п.в. будем определять убыванием вероятностей ε -уклонений, т.е. убыванием для каждого $\varepsilon > 0$ величин

$$P_n^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon \right\} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Положим $g = f - f^*$; тогда $A_n f - f^* = A_n g$ для всех n . Пусть $b_k g$ – корреляционные коэффициенты, т.е. $b_k g = (g \circ T^k, g)$ при $k \geq 0$, и $b_k g = \overline{b_{-k} g}$ при $k < 0$; и пусть σ_g – спектральная мера функции g , т.е. такая конечная борелевская мера на единичной окружности, что

$$b_k g = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ikx} d\sigma_g(x)$$

для целых k .

Следуя работе Гапошкина [1], введем следующие обозначения:

$$\delta_m^*(x) = \max_{2^m \leq k < 2^{m+1}} |A_k g(x)|, \quad q_m(\varepsilon) = \lambda \{ \delta_m^* \geq \varepsilon \},$$

$$\delta_m(x) = \max_{2^m < k < 2^{m+1}} \left| \sum_{j=2^m+1}^k g \circ T^j(x) \right|.$$

В этих обозначениях при условии $2^m \leq n < 2^{m+1}$ очевидно неравенство

$$P_n^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k g| \geq \varepsilon \right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} q_{m+k-1}(\varepsilon) = \sum_{k=m}^{\infty} q_k(\varepsilon). \quad (1)$$

Следующие технические леммы дают необходимые далее неравенства.

ЛЕММА 1. *Справедливы оценки*

$$\delta_m^*(x) \leq |A_{2^m} g(x)| + 2^{-m} \delta_m(x), \quad q_m(\varepsilon) \leq 2(\|A_{2^m} g\|_2^2 + 2^{-2m} \|\delta_m\|_2^2) \varepsilon^{-2}.$$

Это в точности лемма 1 из работы [1].

ЛЕММА 2. *Если для последовательности $\{Y_j\}_1^\infty$ в $L^2(\Omega)$ при всех $m \geq 0$, $n \geq 1$ и некотором $\beta > 1$ справедлива оценка*

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{m+n} Y_j \right\|_2^2 \leq B n^\beta,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-8508-2010.1).

то

$$\left\| \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=m+1}^{m+k} Y_j \right| \right\|_2^2 \leq BC_\beta n^\beta \quad \text{при } m \geq 0, \quad n \geq 1,$$

где $C_\beta = (1 - 2^{(1-\beta)/2})^{-2}$.

ЛЕММА 3. Если для последовательности $\{Y_j\}_1^\infty$ в $L^2(\Omega)$ при всех $m \geq 0, n \geq 1$ справедлива оценка

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{m+n} Y_j \right\|_2^2 \leq Bn,$$

то

$$\left\| \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=m+1}^{m+k} Y_j \right| \right\|_2^2 \leq B(\log_2 2n)^2 n \quad \text{при } m \geq 0, \quad n \geq 1.$$

Леммы 2 и 3 получаются как частные случаи теорем 1 и 3 из работы Морица [2]: в обоих теоремах надо положить $g(F_{b,n}) = Bn$.

Следующая теорема 1 уточняет асимптотическую теорему 11 из [3], теорему 1 из [4] и теорему 4 из [5], а также теоремы 1–3 из [1] (получаемые здесь константы извлекаются из доказательств упомянутых теорем 1–3 в [1]). Следует отметить, что константа B и показатель α из условия теоремы 1 ниже могут быть вычислены по поведению спектральной меры σ_g в окрестности нуля или по скорости убывания при $n \rightarrow \infty$ корреляционных коэффициентов $b_{n,g}$ функции g – см., например, [5], [6].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in (0, 2]$. Если для некоторой константы $B > 0$ при всех натуральных n выполнено неравенство $\|A_n g\|_2^2 \leq Bn^{-\alpha}$, то для любого $\varepsilon > 0$ при всех натуральных $n \geq 2$ справедливы следующие оценки величин $P_n^\varepsilon = \lambda\{\sup_{k \geq n} |A_k g| \geq \varepsilon\}$:

1) если $\alpha \in (0, 1)$, то

$$P_n^\varepsilon < \frac{B}{\varepsilon^2} \frac{2^{1+\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} \left(1 + \frac{1}{(1 - 2^{(\alpha-1)/2})^2} \right) n^{-\alpha};$$

2) если $\alpha = 1$, то

$$P_n^\varepsilon < \frac{8B}{\varepsilon^2} (\log_2^2 n + 2 \log_2 n + 4) n^{-1};$$

3) если $\alpha \in (1, 2]$, то

$$P_n^\varepsilon < \frac{8B}{\varepsilon^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{1 + 2^{1-\alpha}}{(1 - 2^{1-\alpha})^3} \right) n^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать работе Галошкина [1], вычисляя по ходу его доказательства интересующие нас константы.

Доказательство пункта 1. В лемме 2 положим $\beta = 2 - \alpha > 1$:

$$\begin{aligned} \|\delta_m\|_2^2 &= \left\| \max_{2^m < k < 2^{m+1}} \left| \sum_{j=2^m+1}^k g \circ T^j \right| \right\|_2^2 = \left\| \max_{1 \leq k \leq 2^m-1} \left| \sum_{j=2^m+1}^{2^m+k} g \circ T^j \right| \right\|_2^2 \\ &\leq BC_{2-\alpha} (2^m - 1)^{2-\alpha} < BC_{2-\alpha} 2^{m(2-\alpha)}. \end{aligned}$$

Используя в лемме 1 эту оценку и условие теоремы, получим неравенство

$$q_m(\varepsilon) < 2B\varepsilon^{-2} (1 + C_{2-\alpha}) 2^{-m\alpha}.$$

С учетом него оценка (1) дает нам неравенство

$$P_n^\varepsilon < 2B\varepsilon^{-2} (1 + C_{2-\alpha}) \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k\alpha} = 2B\varepsilon^{-2} (1 + C_{2-\alpha}) \frac{2^{-m\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}}.$$

Остается вспомнить, что $2^m \leq n < 2^{m+1}$, а значит, $2^{-m\alpha} < 2^\alpha n^{-\alpha}$.

Доказательство пункта 2. Воспользуемся леммой 3:

$$\begin{aligned} \|\delta_m\|_2^2 &= \left\| \max_{2^m < k < 2^{m+1}} \left| \sum_{j=2^m+1}^k g \circ T^j \right| \right\|_2^2 = \left\| \max_{1 \leq k \leq 2^m-1} \left| \sum_{j=2^m+1}^{2^m+k} g \circ T^j \right| \right\|_2^2 \\ &\leq B(\log_2 2(2^m - 1))^2 (2^m - 1) < B(m+1)^2 2^m. \end{aligned}$$

Используя в лемме 1 эту оценку и условие теоремы, получаем

$$q_m(\varepsilon) < 2B\varepsilon^{-2}(2^{-m} + (m+1)^2 2^{-m}).$$

Подстановка этого неравенства в (1) дает оценку

$$\begin{aligned} P_n^\varepsilon &< \frac{2B}{\varepsilon^2} \left(\sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} + 2 \sum_{k=m}^{\infty} (k+1)^2 2^{-(k+1)} \right) \\ &= \frac{2B}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2^{m-1}} + 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} k^2 2^{-k} \right) \\ &= \frac{2B}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2^{m-1}} + 2 \frac{(m+1)^2 + 2(m+1) + 3}{2^m} \right) = \frac{4B}{\varepsilon^2} \frac{(m+2)^2 + 3}{2^m}. \end{aligned}$$

В выкладках было использовано равенство

$$\sum_{k=N}^{\infty} k^2 2^{-k} = \frac{N^2 + 2N + 3}{2^{N-1}},$$

которое можно доказать по индукции. Индукционный переход очевиден, а для доказательства базиса индукции можно воспользоваться равенством

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{(1+x)x}{(1-x)^3} \quad \text{при } |x| < 1, \quad (2)$$

проверяемым достаточно просто. Действительно, дифференцируя равенство $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$ и умножая результат на x , получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Проделявая эту операцию еще раз, получаем требуемое равенство (2).

Полагая $\psi(t) = ((2 + \log_2 t)^2 + 3)/t$, перепишем последнее неравенство:

$$P_n^\varepsilon < \frac{4B}{\varepsilon^2} \frac{(m+2)^2 + 3}{2^m} = \frac{4B}{\varepsilon^2} \psi(2^m). \quad (3)$$

Как нетрудно проверить, $\psi(t)$ — монотонно убывающая функция. Так как $2^m \leq n < 2^{m+1}$, то

$$\psi(2^m) < \psi\left(\frac{n}{2}\right) = 2 \frac{(1 + \log_2 n)^2 + 3}{n}.$$

Остается подставить это неравенство в (3).

Доказательство пункта 3. В этот раз для оценки $\|\delta_m\|_2^2$ применим метод двоичных разбиений сумм. Для этого мы построим равномерную по k оценку для $|\sum_{l=2^m+1}^k g \circ T^l|$. Запишем двоичное представление числа k в виде

$$k = 2^m + 2^{p_1} + \dots + 2^{p_{s_k}}, \quad \text{где } 0 \leq p_{s_k} < \dots < p_1 \leq m-1, \quad s_k \leq m.$$

Тогда целочисленный промежуток $(2^m, k]$ представляется в виде

$$(2^m, k] = \bigcup_{t=1}^{s_k} J_t, \quad \text{где} \quad J_1 = (2^m, 2^m + 2^{p_1}), \quad J_2 = (2^m + 2^{p_1}, 2^m + 2^{p_1} + 2^{p_2}], \quad \dots$$

При $p = 0, 1, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots, 2^{m-p}$ обозначим через $I_{m,p,j}$ целочисленный промежуток $(2^m + (j-1)2^p, 2^m + j2^p]$ и положим

$$\Delta_{m,p,j} = \sum_{l \in I_{m,p,j}} g \circ T^l, \quad j = 1, \dots, 2^{m-p}, \quad p = 0, \dots, m-1.$$

Очевидно, что $J_t = I_{m,p_t,j_t}$, где $1 \leq j_t \leq 2^{m-p_t}$, а именно,

$$j_1 = 1, \quad j_2 = 2^{p_1-p_2}, \quad j_3 = 2^{p_1-p_3} + 2^{p_2-p_3}, \quad \dots$$

Поэтому для любых $k \in (2^m, 2^{m+1})$ имеем

$$\left| \sum_{l=2^m+1}^k g \circ T^j \right|^2 = \left| \sum_{t=1}^{s_k} \Delta_{m,p_t,j_t} \right|^2 \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{t=1}^{s_k} (p_t + 1)^2 |\Delta_{m,p_t,j_t}|^2 \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{p=0}^{m-1} (p+1)^2 \sum_{j=1}^{2^{m-p}} |\Delta_{m,p,j}|^2.$$

Здесь использовано неравенство

$$\left| \sum_j a_j \right|^2 \leq \sum_j (j+1)^2 |a_j|^2 \sum_j (j+1)^{-2} \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_j (j+1)^2 |a_j|^2.$$

Так как правая часть полученного неравенства не зависит от k , то для δ_m справедлива оценка

$$\delta_m \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{p=0}^{m-1} (p+1)^2 \sum_{j=1}^{2^{m-p}} |\Delta_{m,p,j}|^2.$$

В силу стационарности последовательности $\{g \circ T^l\}_l$ и условия теоремы, учитывая нулевое среднее функции $g = f - f^*$, имеем

$$\|\Delta_{m,p,j}\|_2^2 \leq B 2^{p(2-\alpha)}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^{m-p}.$$

Поэтому

$$\|\delta_m\|_2^2 < \frac{\pi^2}{6} B \sum_{p=0}^{m-1} (p+1)^2 2^{p(1-\alpha)} 2^m < \frac{\pi^2}{6} B \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)^2 2^{p(1-\alpha)} 2^m.$$

В силу (2)

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)^2 2^{p(1-\alpha)} &= 2^{\alpha-1} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)^2 2^{(p+1)(1-\alpha)} = 2^{\alpha-1} \sum_{p=0}^{\infty} p^2 (2^{1-\alpha})^p \\ &= 2^{\alpha-1} \frac{(1+2^{1-\alpha})2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3} = \frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}. \end{aligned}$$

В итоге получаем неравенство

$$\|\delta_m\|_2^2 < \frac{\pi^2}{6} B \frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3} 2^m.$$

Используя в лемме 1 эту оценку и условие теоремы, получаем неравенство

$$q_m(\varepsilon) < 2B\varepsilon^{-2} \left(2^{-m\alpha} + \frac{\pi^2}{6} \frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3} 2^{-m} \right) < 2B\varepsilon^{-2} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3} \right) 2^{-m}.$$

С учетом него оценка (1) дает неравенство

$$P_n^\varepsilon < 4B\varepsilon^{-2} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{1 + 2^{1-\alpha}}{(1 - 2^{1-\alpha})^3} \right) 2^{-m}.$$

Остается вспомнить, что $2^m \leq n < 2^{m+1}$, а значит, $2^{-m} < 2n^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\alpha = 2$ в условиях теоремы 1 верно неравенство

$$\lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k g| > \varepsilon \right\} < \frac{B}{\varepsilon^2} n^{-1}.$$

Действительно, поскольку $\{\sup_{k \geq n} |A_k g| > \varepsilon\} = \bigcup_{k \geq n} \{|A_k g| > \varepsilon\}$, то

$$\lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k g| > \varepsilon \right\} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda \{|A_k g| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n}^{\infty} \|A_k g\|_2^2.$$

Если при $\alpha \in (1, 2]$ для всех k справедливо неравенство $\|A_k g\|_2^2 \leq Bk^{-\alpha}$, то

$$\lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k g| > \varepsilon \right\} \leq \frac{B}{\varepsilon^2} \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha} < \frac{B}{\varepsilon^2} \int_{n-1}^{\infty} x^{-\alpha} dx < \frac{B}{\varepsilon^2} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1},$$

что при подстановке $\alpha = 2$ и приводит нас к доказываемому утверждению.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Случай $\alpha > 2$ в условиях теоремы 1 невозможен: как показано в [7] (следствие 5), неравенство $\|A_n g\|_2^2 \leq Bn^{-\alpha}$ для всех n в этом случае бывает только при $g \equiv 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ф. Гапошкин, *ТВП*, **46:2** (2001), 370–375. [2] F. Móricz, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **35:4** (1976), 299–314. [3] А. Г. Качуровский, *УМН*, **51:4**(310) (1996), 73–124. [4] В. Ф. Гапошкин, *Матем. заметки*, **64:3** (1998), 366–372. [5] А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев, *Матем. сб.*, **202:8** (2011), 21–40. [6] Н. А. Джулай, А. Г. Качуровский, *Сиб. матем. журн.*, **52:5** (2011), 1039–1052. [7] В. Ф. Гапошкин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39:6** (1975), 1366–1392.

А. Г. Качуровский

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск

E-mail: agk@math.nsc.ru

Поступило

12.09.2011

В. В. Седалищев

Новосибирский государственный университет

E-mail: vvs1988@yandex.ru