Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Е. В. Френкель,
Свободное произведение групп с объединением: нор-
мальные формы и меры, *Матем. заметки*, 2012, том 91,
выпуск 4, 633–637

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:23:21

Свободное произведение групп с объединением: нормальные формы и меры

А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Е. В. Френкель

1. Введение и формулировка основных результатов. Пусть $G = A *_C B$ – свободное произведение с объединением и A, B, C – свободные группы конечных рангов. В этом классе групп существуют группы, достаточно сложные с алгоритмической точки зрения: например, группы с неразрешимой проблемой сопряженности [1], [2]. Следовательно, если мы понимаем сложность алгоритма с классической точки зрения, то сложность алгоритма для решения проблемы сопряженности на множителях A и B значительно отличается от ее сложности на группе G . Однако, согласно исследованиям последних лет [3], [4] размер тех входных данных алгоритмов на группе G , для которых проблема сопряженности решается сложно, либо алгоритм вообще не дает ответа, пренебрежим в некотором точном математическом смысле по сравнению с размером всех входов. Вот один из примеров такого сорта результатов.

ТЕОРЕМА 1 [3; следствие 4.19]. Пусть $G = A *_C B$ – свободное произведение с объединением и A, B, C – свободные группы конечных рангов. Тогда поисковая проблема сопряженности в G разрешима для всех сопряженных к циклически редуцированным регулярным элементам группы G .

В связи с этим и другими результатами подобного рода возникают следующие проблемы: во-первых, нужно уметь оценивать в подходящей мере множество элементов группы G , записанных в нормальной форме, а также оценивать плотность в них подмножеств регулярных нормальных форм; во-вторых, показать, что на множестве регулярных нормальных форм проблема сопряженности решается за полиномиальное время.

Решению первой задачи посвящены работы [4], [5] и данная статья, в которой в конспективной форме представлены основные результаты (теоремы А, В) развернутой статьи [6]. Начнем с формулировки основных теорем. Необходимые пояснения к теоремам будут приложены позже.

ТЕОРЕМА А. Пусть $G = A *_C B$ – свободное произведение групп с объединением и A, B, C – свободные группы конечных рангов. Тогда

- (i) если C имеет конечный индекс в A и B , то всякая нормальная форма сингулярна и нестабильна;
- (ii) если C бесконечного индекса хотя бы в одной из групп A или B , то $\mathcal{NF}_r$ и $\mathcal{NF}_s$ экспоненциально μ -генерические относительно $\mathcal{NF}$, а $\mathcal{NF}_{\sin}$ и $\mathcal{NF}_{\text{uns}}$ экспоненциально μ -пренебрежимы относительно $\mathcal{NF}$ в следующих случаях:
 - (ii.1) μ определяется по псевдомерам μ_A и μ_B , которые являются функциями мощности на A и B соответственно, а ρ_μ – двумерная асимптотическая плотность;
 - (ii.2) μ определяется по атомарным вероятностным мерам $\mu_{A,l}$ и $\mu_{B,l}$ на A и B соответственно, а ρ_{μ_l} – двумерная асимптотическая плотность по Чезаро.

ТЕОРЕМА В. Пусть $G = A *_C B$ – свободное произведение групп с объединением и A, B, C – свободные группы конечных рангов. Если C имеет бесконечный индекс хотя бы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00067-а).

в одной из групп A или B , то множества всех нестабильных $\mathcal{NF}_{\text{uns}}$ и всех сингулярных $\mathcal{NF}_{\text{sin}}$ нормальных форм экспоненциально $\lambda_{\mathcal{NF}}$ -измеримы.

Теперь мы приведем основные определения и результаты, необходимые для понимания теорем **A** и **B**.

2. Измерение подмножеств свободной группы. Пусть $F = F(X)$ – свободная группа конечного ранга. Обозначим через S_n сферу радиуса n в F . Пусть μ будет атомарной псевдомерой на F . Напомним, что мера μ на счетном множестве P называется *атомарной*, если каждое подмножество $Q \subseteq P$ измеримо; при этом также выполняется $\mu(Q) = \sum_{q \in Q} \mu(q)$.

Для множества $R \subseteq F$ определим его *сферическую асимптотическую плотность* относительно меры μ как следующий предел:

$$\rho_\mu(R) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_{\mu,n}(R), \quad \text{где} \quad f_{\mu,n}(R) = \frac{\mu(R \cap S_n)}{\mu(S_n)}.$$

Далее, пусть μ – псевдомера на F и $\rho_\mu(R)$ – сферическая асимптотическая плотность. Множество $R \subseteq F$ называется *генерическим* относительно меры μ , если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\mu,n}(R)$ существует и $\rho_\mu(R) = 1$, и *пренебрежимым* относительно меры μ , если $\rho_\mu(R) = 0$. Далее, будем говорить, что R является *экспоненциально генерическим* относительно μ , если существует положительное число $\delta < 1$ такое, что $1 - \delta^n < f_{\mu,n}(R) < 1$ для достаточно больших n . Если же $f_{\mu,n}(R) < \delta^n$ для всех достаточно больших n , то R называется *экспоненциально пренебрежимым* относительно меры μ . Далее мы будем опускать слова “относительно меры μ ”, если в качестве μ берется мощность множества.

3. Стратификация и измерение шрайеровых систем представителей в свободной группе. Пусть C – конечно порожденная подгруппа свободной группы $F = F(X)$. Рассмотрим множество S представителей правых классов смежности группы F по C . Система представителей S называется *шрайеровой*, если всякий начальный сегмент элемента из S тоже лежит в S . Представитель $s \in S$ назовем *сингулярным*, если он принадлежит обобщенному нормализатору C :

$$N_F^*(C) = \{f \in F \mid f^{-1}Cf \cap C \neq \{1\}\};$$

обозначим множество всех таких представителей через S_{sin} . Все прочие представители назовем *регулярными*. Представитель $s \in S$ назовем *стабильным*, если $sc \in S$ для любого $c \in C$. Обозначим через S_{uns} множество всех *нестабильных* представителей в S . В [4] (следствие 5.12) было доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть C – конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в $F(X)$ и S – шрайерова трансверсаль для C . Тогда множества сингулярных представителей S_{sin} и нестабильных представителей S_{uns} экспоненциально пренебрежимы относительно S .

4. Нормальные формы. Приведем четыре основных метода представления элементов группы G в нормальной форме (в п. 3) содержится два метода).

1) В свободно-редуцированной форме: $g = g_1 g_2 \dots g_n$, где g_i – редуцированные слова в алфавите $X \cup X^{-1}$ или $Y \cup Y^{-1}$, и если $g_i \in A$, то $g_{i+1} \in B$, и наоборот. Обозначим $\mathcal{EF}$ множество всех элементов в свободно-редуцированной форме.

2) В редуцированной форме: $g = c g_1 g_2 \dots g_k$, где $c \in C$, $g_i \in (A \cup B) \setminus C$, и g_i с g_{i+1} принадлежат различным множителям. Обозначим множество всех элементов в редуцированной форме через $\mathcal{RF}$.

3) В единственной (см. [7]) канонической нормальной форме: $g = c p_1 p_2 \dots p_l$, где $c \in C$, $p_i \in (S \cup T) \setminus \{1\}$, и p_i и p_{i+1} принадлежат различным множителям; пусть $\mathcal{CNF}$ означает множество всех элементов в такой форме. Определение циклически редуцированной формы см. в [7]; множество всех таких форм обозначим $\mathcal{CRF}$.

Будем говорить, что элемент записан в *нормальной форме*, если он лежит в одном из множеств $\mathcal{EF}$, $\mathcal{RF}$, $\mathcal{CNF}$, $\mathcal{CRF}$; далее $\mathcal{NF} = \{\mathcal{EF}, \mathcal{RF}, \mathcal{CNF}, \mathcal{CRF}\}$. Элемент $g \in F(X)$ мы называем *регулярным* (*стабильным*, и т.д.), если он может быть представлен в форме $g = cs$, $c \in C$, $s \in S$ и s регулярен, стабилен, и т.д. Элемент $g \in \mathcal{NF}$ называется *регулярным* (*стабильным*), если по крайней мере один из элементов g_i или p_i регулярен (стабилен). В противном случае g называется *сингулярным* (*нестабильным*).

Из результатов работы [3] следует, что стабильные и регулярные формы реализуют идею компоненты, на которой алгоритм работает хорошо, тогда как дополняющие множества, наоборот, являют собою “плохую” компоненту в множестве всех нормальных форм. Обозначим через $\mathcal{NF}_r(\mathcal{NF}_s)$ множество всех регулярных (стабильных) элементов в нормальной форме и через $\mathcal{NF}_{\sin}(\mathcal{NF}_{\text{uns}})$ – его дополнение в $\mathcal{NF}$.

5. Асимптотические плотности свободных произведений множеств. Пусть μ_A и μ_B – атомарные псевдомеры на A и B соответственно и $\mu_A(1) = \mu_B(1)$. Зафиксируем вероятностное распределение $\theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$; в частности, $\sum_{k=1}^{\infty} \theta(k) = 1$. Определим атомарную вероятностную меру μ на $F = A * B$ как

$$\mu(f) = \frac{1}{2} \theta(k) \mu_{F_1}(f_1) \cdots \mu_{F_k}(f_k),$$

где $f \in \mathcal{EF}$. Тогда для множества $R \subseteq F$ по определению $\mu(R) = \sum_{f \in R} \mu(f)$. Если μ_A, μ_B – атомарные вероятностные меры на A и B соответственно, то μ – атомарная вероятностная мера на F .

Далее, пусть $T = A_0 * B_0 \subseteq F = A * B$. Для пары натуральных чисел (n, k) определим

$$T_{n,k} = \{f = f_1 \dots f_k \in T : s(f) = k, |f_i| \leq n, i = 1, \dots, k\}.$$

Тогда $T = \bigcup_{k=0, n=0}^{\infty} T_{n,k}$. Для множества $Q = A_1 * B_1$ в F положим

$$\rho_{\mu}^{n,k}(Q, T) = \frac{\mu(Q \cap T_{n,k})}{\mu(T_{n,k})}.$$

Асимптотическое поведение Q относительно T мы будем характеризовать *двумерной асимптотической плотностью*, которую определим как следующий предел:

$$\rho_{\mu}(Q, T) = \overline{\lim}_{d(n,k) \rightarrow \infty} \rho_{\mu}^{n,k}(Q, T),$$

где под функцией направления $d(n, k)$ мы понимаем некоторый взаимнооднозначный между n и k путь из $(1, 1)$ в (∞, ∞) . Если указанный предел существует и не зависит от выбора направления, обозначим его через $\rho_{\mu}^e(Q, T)$. Множество Q является μ -генерическим относительно T , если $\rho_{\mu}^e(Q, T) = 1$, и μ -пренебрежимым относительно T , если $\rho_{\mu}^e(Q, T) = 0$. Назовем Q экспоненциально μ -генерическим относительно T , если Q является μ -генерическим и существует положительная константа $\delta < 1$ такая, что, начиная с некоторого k , выполняется $1 - \delta^k < \rho_{\mu}^{n,k}(Q, T) < 1$. Если Q является μ -пренебрежимым и $\rho_{\mu}^{n,k}(Q, T) < \delta^k$ для достаточно больших k , то Q называется экспоненциально μ -пренебрежимым относительно T .

6. Атомарные меры элементов в нормальной форме. Вероятность получить элемент $g \in \mathcal{EF}$ ($g \in \mathcal{RF}$) слоговой длины k равна

$$\mu_k(g) = \frac{1}{2} \mu_1(g_1) \cdots \mu_k(g_k),$$

где $\mu_i(g_i) = \mu_A(g_i)$, если $g_i \in A$, и $\mu_i(g_i) = \mu_B(g_i)$ в противном случае, $i = 1, \dots, k$, $k \geq 1$; если $k = 0$, то $\mu_0(c) = \mu_C(c)$, где $\mu_C(c) = \mu_{A,C}$, если C рассматривается как подгруппа A , и $\mu_C(c) = \mu_{B,C}$ иначе.

Вероятностная мера на элементах $g \in \mathcal{CNF}$ ($g \in \mathcal{CRF}$) слоговой длины k равна

$$\mu_k(g) = \frac{1}{2} \mu_C(c) \mu_1(p_1) \mu_2(p_2) \cdots \mu_k(p_k),$$

где $\mu_i(p_i) = \mu_{F(p_i)}(Cp_i)$, $i = 0, \dots, k$, и $\mu_C(c)$ определена выше.

Вероятностные меры μ_A , μ_B и $\mu_C(c)$ и др. могут быть определены, как и в [5], [8] и [4] при помощи невозвратного случайного блуждания на некотором графе для A , B или их подгруппы C .

Вероятностная мера μ на множестве $\mathcal{NF}$ по определению равна $\mu(g) = \theta(k) \mu_k(g)$.

7. Меры на множествах нормальных форм: два подхода. В п. 2 мы определили асимптотические плотности подмножеств свободной группы внутри самой группы $F = F(X)$; здесь же, следуя [4], мы введем понятие асимптотической плотности множества $R \subseteq F$ относительно другого множества $L \subseteq F$. Пусть

$$f_n(R, L) = \frac{|R \cap S_n|}{|L \cap S_n|}.$$

Асимптотическая плотность $\rho(R, L)$ множества R относительно L вычисляется как $\rho(R, L) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(R, L)$. Понятия (экспоненциально) пренебрежимого и генерического множества относительно L могут быть введены так же, как и в п. 2.

В [8] были также введены понятия λ_L -измеримого и экспоненциально λ_L -измеримого множества R . Именно,

$$\lambda_L(R) = \sum_{w \in R} \lambda_L(w) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(R, L),$$

где

$$f'_n(R, L) = \sum_{w \in R \cap S_n} \lambda_L(w),$$

и $\lambda_L(w)$, $f'_n(R, L)$ определяются случайным блужданием на некотором автомате для L (см. более подробно в [4; п. 5.2, с. 109]). Отметим, что вообще говоря, частоты $f'_k(R, L)$ отличаются от относительных частот $f_k(R, L)$, определенных выше, в силу специфики автомата для L . С другой стороны, эти частоты совпадают для $L = F(X)$, т.е. $f'_n(R, F(X)) = f_n(R, F(X))$.

Множество R назовем λ_L -измеримым, если $\lambda_L(R)$ конечно. Множество R будем называть экспоненциально λ_L -измеримым, если $f'_n(R, L) \leq \delta^n$ для всех достаточно больших n и положительной константы $\delta < 1$.

Для всякого $w \in F$ множество $C_L(w) = L \cap C(w)$ называется L -конусом, и конус $C_L(w)$ называется L -малым, если он экспоненциально λ_L -измерим; в противном случае конус называется большим. В работе [4] был также доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 2 [5; теорема 5.4]. Пусть R – регулярное подмножество префиксно-замкнутого регулярного множества L в свободной группе F конечного ранга. Тогда либо префиксное замыкание $\overline{R}$ множества R в L содержит большой L -конус, либо $\overline{R}$ экспоненциально λ_L -измеримо.

Эту теорему мы применяем при доказательстве теоремы В.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян, В. Г. Дурнев, *УМН*, **55**:2 (2000), 3–94. [2] C. F. Miller III, *Algorithms and Classification in Combinatorial Group Theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **23**, Springer, New York, 1992, 1–59. [3] A. V. Borovik, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, *Internat. J. Algebra Comput.*, **17**:7 (2007), 1299–1333. [4] E. Frenkel, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, *Combinatorial and Geometric Group Theory*, Trends Math., Birkhäuser Verlag, Basel, 2010, 93–118. [5] A. V. Borovik, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, *Internat. J. Algebra Comput.*, **13**:6 (2003), 705–731. [6] А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Е. В. Френкель, *Фундамент. и прикл. матем.*, **16**:8 (2010), 189–221. [7] В. Магнус, А. Каррасс, Д. Солитер, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974. [8] W. Woess, *Arch. Math. (Basel)*, **41**:4 (1983), 363–370.

А. Г. Мясников

Charles V. Schaefer, Jr. School of Engineering &
Science, Stevens Institute of Technology, USA
E-mail: amiasnik@stevens.edu

Поступило

22.07.2011

В. Н. Ремесленников

Омский филиал Института математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Е. В. Френкель

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: lizzy.frenkel@gmail.com